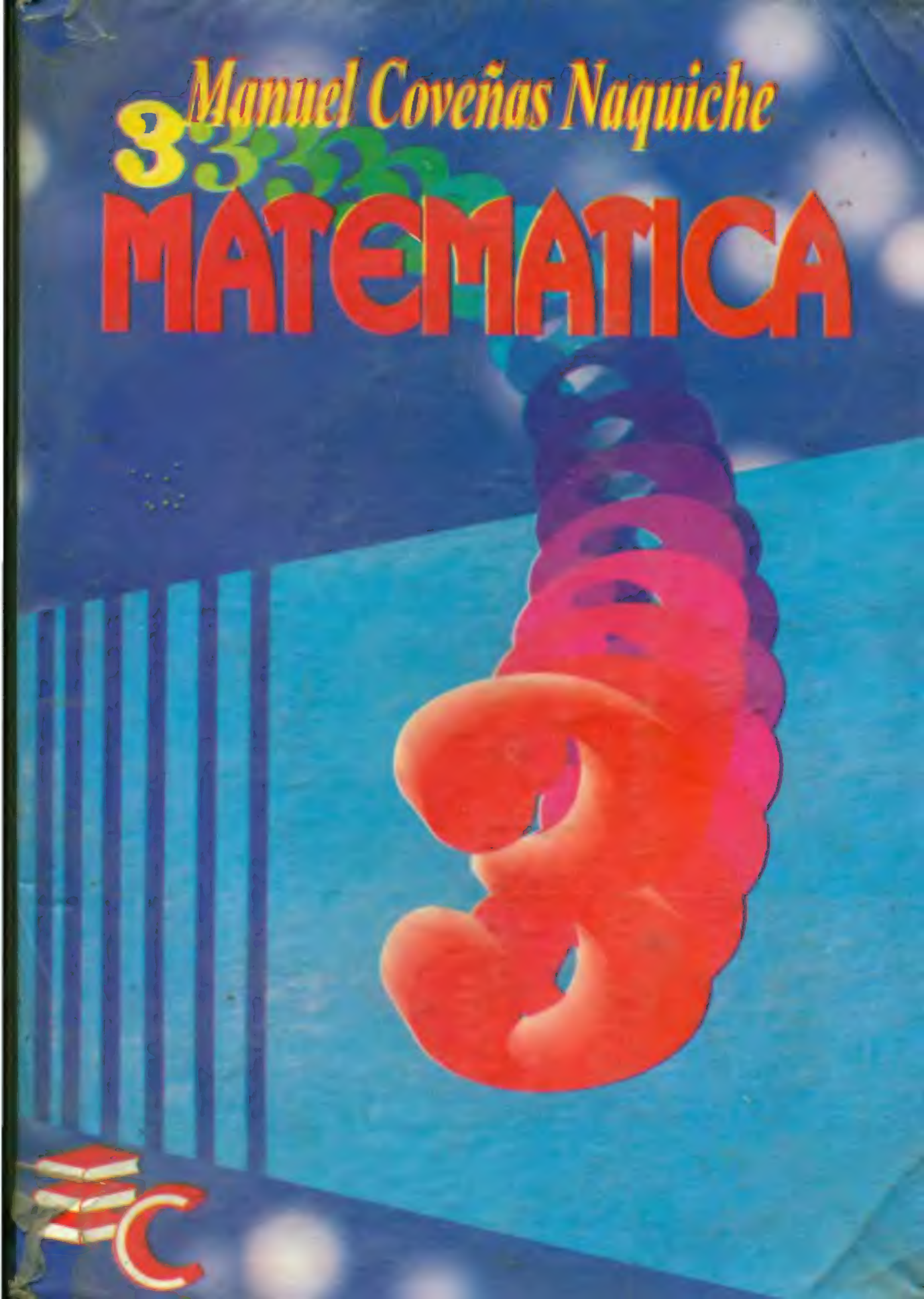

Manuel Coveñas Naquiche
MATEMATICA
3
C

Manuel Coveñas Naquiche

MATEMÁTICA

MATEMÁTICA

IMPRESO EN EL PERU PRINTED IN PERU

Jr. Las Verdolagas Nº 199 Urb. "Micaela Bastidas"
Los Olivos - Lima/Perú
Telfs. 486-7957 • 521-0949
RUC. Nº 29534659

Diagramación y Dibujos de Interiores
Sara Lock de Alvarez
Composición y Montaje
"EDITORIAL COVEÑAS E.I.R.Ltda"

Presentación

"Caminante no hay camino,
se hace camino al andar"

Estas coplas, en las que el vate Antonio Machado expresa poéticamente una gran verdad de la sabiduría popular, cobran plena vigencia en la actividad de profesional de ***Manuel COVEÑAS NAQUICHE****, con justicia* ***"el Isaac Asimov de las matemáticas peruanas"*** *por su prolífica producción bibliográfica -en el área didáctica- en esta no fácil ciencia formal.*

En efecto, Manolo, como le gusta que le digan sus amigos, se abrió camino como un extraordinario docente, por sus virtudes didácticas, ¡innatas en él!, y por su sencillez; ahora, sigue caminando, haciendo camino, en el difícil arte de crear libros... ¡no se duerme en sus laureles!, por eso, sigue mejorando sus textos escolares, gracias a su experiencia pedagógica y a los consejos de uno de los elementos fundamentales del proceso enseñanza-aprendizaje: ***¡EL MAESTRO DE AULA!****, con quien está en permanente contacto.*

Con ocasión de esta segunda edición -ampliada y corregida de sus textos de ***MATEMÁTICAS****, para cada uno de los grados de Educación Secundaria, nos presenta una nueva estructura de los mismos:*

- ***Una exposición teórica sencilla****, accesible al alumno, de cada uno de los temas tratados, que se ve clarificada con...*
- ***Ejemplos resueltos*** *en orden de dificultad progresiva y con...*
- ***Talleres*** *para cada capítulo, a desarrollarse en clase, ¡mejor si es a nivel grupal!, motivando así la participación activa de los educandos.*

No contento con esto, añade:

- ***Ejercicios de reforzamiento*** *en dos niveles, según el grado de dificultad y,*
- ***Propuesta de Olimpíadas Matemáticas,*** *con su respectivo desarrollo, que globalizan los conocimientos inpartidos en cada unidad temática.*

Como pueden apreciar amigos/as lectores/as, estos textos se convierten en un material de invalorable valor pedagógico, porque, facilitan el proceso de la enseñanza-aprendizaje de las ***Matemáticas****, saber que permite optimizar la capacidad lógico-deductiva del ser humano.*

Prof. Lucio R. Blanco A.

INDICE

Capítulo 1 FUNCIONES

1.1 FUNCIONES

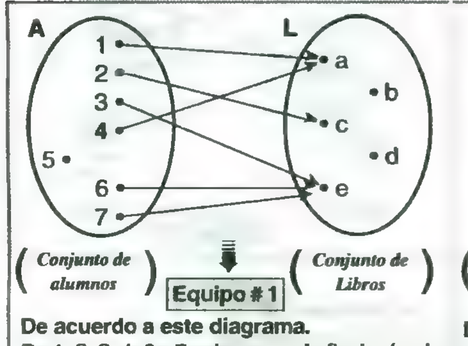
Empezamos el estudio de las funciones recordando algunas ideas que has aprendido en cursos anteriores.

El Profesor de Historia del Perú organiza a sus alumnos de clase en equipos, para que realicen un trabajo **(asignación)**. Con tal fin les recomienda una lista de libros y pide que cada alumno lea un libro.

Veamos cómo trabajó cada equipo:

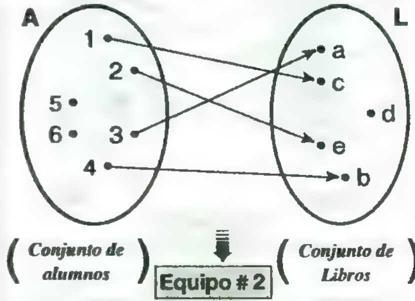
A = {alumnos del equipo # 1}	B = {alumnos del equipo # 2}
L = {libros recomendados}	L = {libros recomendados}

Los diagramas representan la relación R .... **leyó el libro** ...... entre el conjunto de alumnos de un equipo y el conjunto de libros recomendados. Observa cuántas flechas salen de cada punto del dominio.



Equipo # 1

De acuerdo a este diagrama.
De 1, 2, 3, 4, 6 y 7 sale **una sola** flecha (cada uno leyó un libro).
De 5 no sale **ninguna** flecha. (No leyó ningún libro).



Equipo # 2

De acuerdo a este diagrama.
De 1, 2, 3 y 4 sale **una sola** flecha. (Cada uno leyó un solo libro).
De 5 y 6 no sale **ninguna** flecha (no leyeron ningún libro).

* *De cada punto del conjunto de partida sale una sola flecha o ninguna. Las relaciones que cumple esta propiedad se llaman* ***funciones.***

Definición: *Se dice que una relación entre A y B es una* ***función*** *cuando de cada punto del* ***conjunto de partida*** *sale* ***a lo más*** *una flecha*

- Ahora analicemos el diagrama del equipo # 1.

* **En el conjunto de partida:**

El punto **1** tiene como correspondiente al punto **a**, se dice que **a** es imagen de **1**.

Al punto **5** no le corresponde ninguno como imagen. Se dice que la función no está definida para el punto **5**.

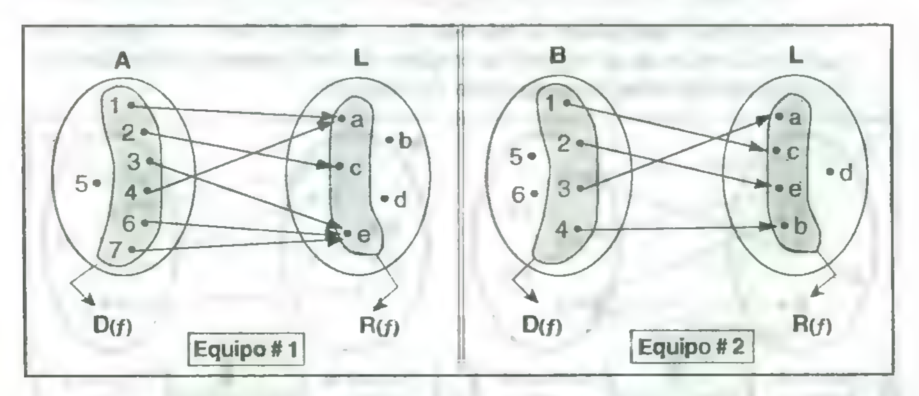
Los puntos 1, 2, 3, 4, 6 y 7 tienen una sola imagen.

* **En el conjunto de llegada:**

A los puntos **b** y **d** no llega ninguna flecha (**b** y **d** no son imágenes de ningún punto del dominio).

Al punto **c** llega una flecha (**c** es imagen de un punto del dominio).
Al punto **a** llegan dos flechas (**a** es imagen de dos puntos del dominio).
Al punto **e** llegan tres flechas (**e** es imagen de tres puntos del dominio).

- Marquemos el dominio de cada función:



Observa: *De cada punto del dominio sale* ***una sola flecha.***
El conjunto D(f) se llama ***Dominio de la función.***
El conjunto R(f) se llama ***Rango de la función.***

* *De acuerdo con estas observaciones podemos dar otra definición de función.*

Definición: *Se dice que una relación es una función cuando de cada punto de de su **dominio** sale **una y sólo una flecha**.*

Observaciones: ***Toda función es una relación,*** *esto quiere decir que de una función surge la presencia de:*

i) Un conjunto de partida *ii) Un conjunto de llegada*
iii) Una regla de correspondencia

* *Para que una relación sea **función** ,debe cumplirse lo siguiente:*

"Cada elemento de su dominio debe tener una sola imagen"

* *No toda relación es función.*

1.1.1 NOTACIÓN DE UNA FUNCIÓN:

$$f = \{(x; y) \in A \times B / y = f(x)\}$$

Donde:

- A : conjunto de partida
- B : conjunto de llegada
- $y = f(x)$: Regla de correspondencia
  - x : preimágenes; variable independiente
  - y : imágenes; variable dependiente
- $D(f)$: Dominio de la función; conjunto de todas las preimágenes.
- $R(f)$: Rango de la función; conjunto de todas las imágenes.

Observación: *Si el dominio de la función **D(f)** es igual al conjunto de partida **(A)**; osea: **D(f) = A**, entonces la función recibe el nombre de **Aplicación.** Luego, toda **aplicación** es una función; pero no toda **función** es una aplicación .*

Ejemplo 1 : Dado los conjuntos: $A = \{1; 3; 5; 7\} \wedge B = \{2; 4; 6; 9; 10; 12\}$

Hallar: **a)** $f : A \to B$; tal que: $y = x + 1$

b) $D(f)$ y $R(f)$

c) Diagrama Sagital

d) ¿Es aplicación?

Resolución:

a) **Por tabulación:**

x	$y = f(x) = x + 1$
1	$y = f(1) = 1 + 1 = \boxed{2 \in B}$
3	$y = f(3) = 3 + 1 = \boxed{4 \in B}$
5	$y = f(5) = 5 + 1 = \boxed{6 \in B}$
7	$y = f(7) = 7 + 1 = \boxed{8 \notin B}$

Luego:

$$f = \{(1; 2), (3; 4), (5; 6)\}$$

Recuerda que:

- Una relación f de **A** en **B** denotada por f : **A → B**; es una función si y sólo si a un elemento **x** ∈ **A**, le corresponde un único elemento **y** ∈ **B**, a través de "f".
- Las funciones se designan con letras minúsculas f, **g** , h
- Una función también se denota por:

o por: $f(x) = y$ que se lee: "La imagen de **x** por f es igual a **y**"

b) **Dominio de la función:** $D(f) = \{1; 3; 5\}$

Rango de la función: $R(f) = \{2; 4; 6\}$

c) $f : A \to B$

Se lee: "f aplica **x** en **y**"

A: 1, 3, 5, 7 → B: 2, 4, 6, 9, 10, 12 (1 → 2, 3 → 4, 5 → 6)

(*Conjunto de partida*) (*Conjunto de llegada*)

d) **No es aplicación** pues el dominio de la función o sea:

$D(f) = \{1; 3; 5\}$ es diferente del conjunto de partida A; o sea: $A = \{1; 3; 5; 7\}$

$$\therefore \boxed{D(f) \neq A}$$

Ejemplo 2 : Dados los conjuntos: $A = \{-2; -1; 0; 1; 2\} \wedge B = \{0; 1; 2; 3; 4\}$

Hallar: **a)** $f : A \to B$; tal que: $y = x^2$ **b)** $D(f)$ y $R(f)$

c) Diagrama Sagital **d)** ¿Es aplicación?

Resolución:

a) **Por tabulación:**

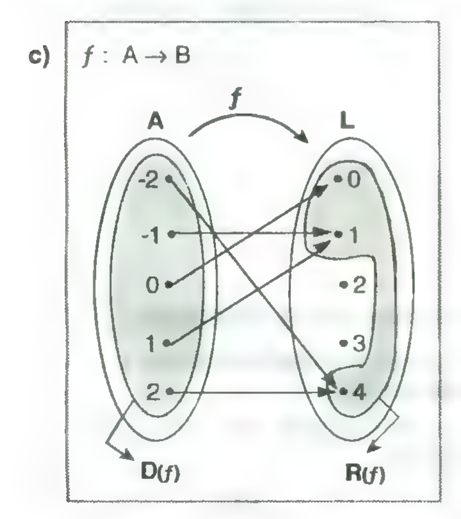
x	$y = f(x) = x^2$	*Pares Ordenados*
–2	$y = f(-2) = (-2)^2 = 4 \in B$	➠ **(–2; 4)**
–1	$y = f(-1) = (-1)^2 = 1 \in B$	➠ **(–1; 1)**
0	$y = f(0) = (0)^2 = 0 \in B$	➠ **(0; 0)**
1	$y = f(1) = (1)^2 = 1 \in B$	➠ **(1; 1)**
2	$y = f(2) = (2)^2 = 4 \in B$	➠ **(2; 4)**

Luego: $f = \{(-2; 4), (-1; 1), (0; 0), (1; 1), (2; 4)\}$

b) **Dominio de la función:** $D(f) = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$

Rango de la función: $R(f) = \{0; 1; 4\}$

c) $f: A \to B$



d) **Sí es una aplicación;** pues el dominio de la función D(f) o sea: $D(f) = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ es igual al conjunto de partida A; o sea:

$$A = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$$

$$\therefore \boxed{D(f) = A}$$

Ejemplo 3 : Dado los conjuntos: $A = \{1; 3; 5; 7\} \wedge B = \{3; 5; 6; 7; 9\}$

Hallar: **a)** $f: A \to B$; **tal que:** $y = 2x + 3$ **b)** D(f) y R(f)

c) Diagrama Sagital **d)** ¿Es aplicación?

Resolución:

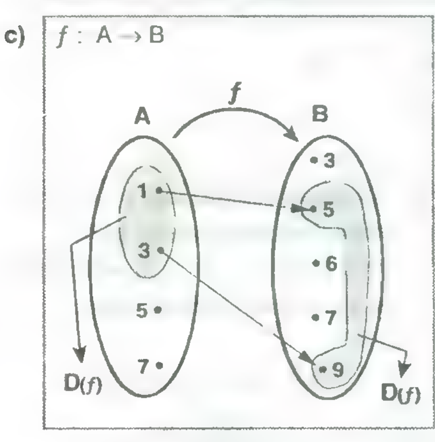
a) **Por tabulación:**

x	$y = f(x) = 2x + 3$	*Pares Ordenados*
1	$y = f(1) = 2(1) + 3 = 5 \in B$	➡ **(1; 5)**
3	$y = f(3) = 2(3) + 3 = 9 \in B$	➡ **(3; 9)**
5	$y = f(5) = 2(5) + 3 = 13 \notin B$	
7	$y = f(7) = 2(7) + 3 = 17 \notin B$	

Luego: $f = \{(1; 5), (3; 9)\}$

b) **Dominio de la función:** $D(f) = \{1; 3\}$ **Rango de la función:** $R(f) = \{5; 9\}$

c) $f: A \rightarrow B$



d) **No es una aplicación;** pues el dominio de la función $D(f)$ osea: $D(f) = \{1;3\}$ es diferente del conjunto A; osea: $A = \{1; 3; 5; 7\}$

$\therefore \ D(f) \neq A$

1.1.2 FUNCIONES DEFINIDAS MEDIANTE DIAGRAMA SAGITALES

Una relación definida mediante un diagrama sagital **es función** si de cada elemento de su dominio sale **una sola flecha.**

* Analicemos cada una de las siguientes relaciones definidas gráficamente mediante diagramas sagitales **(flechas).**

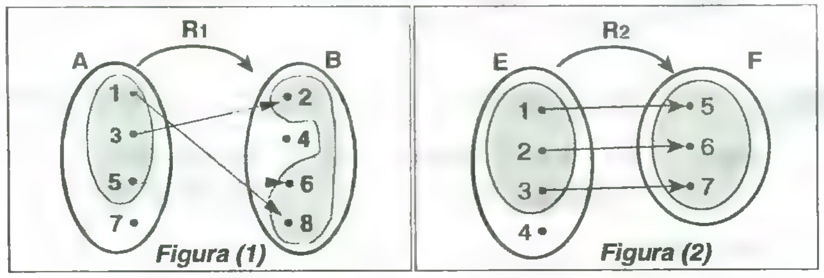


Figura (1) *Figura (2)*

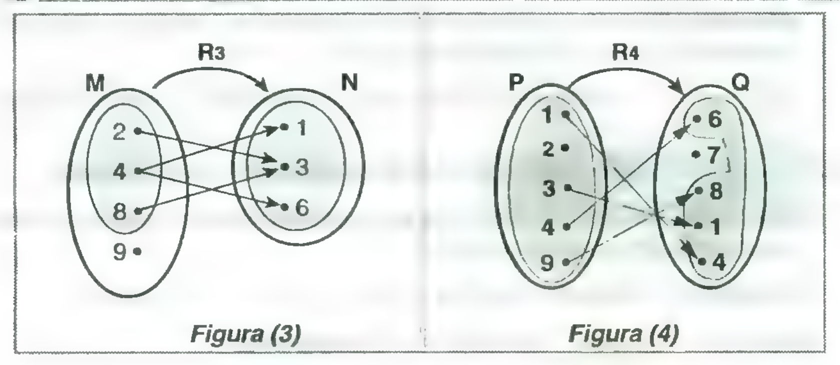


Figura (3) Figura (4)

- En la relación R_1 se observa que el conjunto de partida es:

  A = {1; 3; 5; 7} y el conjunto de llegada es: B = {2; 4; 6; 8}

Siendo: $D_{(R_1)} = \{1; 3; 5\}$; $R_{(R_1)} = \{2; 6; 8\}$

REGLA DE CORRESPONDENCIA:

"a **1** le corresponde **8**", "a **3** le corresponde **2**" y "a **5** le corresponde **6**".

R_1, si es una función; porqué: "cada elemento de su dominio tiene una sola imagen"; tambien podriamos decir que de cada elemento de su dominio sale una sola flecha.

* En la relación **R_2 si es una función**; porque de cada elemento de su dominio, sale una sola flecha.
* En la relación **R_3 no es una función**; porque del elemento 4 de su dominio, salen 2 flechas.
* En la relación **R_4 si es una función**; porque de cada elemento de su dominio, sale una sola flecha.

1.1.3 FUNCIONES DEFINIDAS MEDIANTE PARES ORDENADOS

- Las relaciones R_1, R_2, R_3 y R_4, pueden ser definidas de la manera siguiente:

De la figura **(1)**: $R_1 = \{(1; 8), (3; 2), (5; 6)\}$

De la figura **(2)**: $R_2 = \{(1; 5), (2; 6), (3; 7)\}$

De la figura **(3)**: $R_3 = \{(2; 3), (4; 1), (4; 6); (8; 3)\}$

De la figura **(4)**: $R_4 = \{(1; 4), (3; 1), (4; 6), (9; 8)\}$

* De acuerdo a la definición de función: R_1, R_2 y R_4 **son funciones;** pues observamos que las **primeras componentes** de cada función **son todas**

diferentes. Sin embargo en la relación R_3 observamos dos pares ordenados diferentes con primera componente igual: (4; 1) ˙ (4; 6).

(4; 1) ≠ (4; 6) ; esto es lo que distingue a una relación que **no es función**

1.1.4 FUNCIONES DEFINIDAS MEDIANTE DIAGRAMAS CARTESIANOS

Como bien sabemos, las relaciones en general también son expresadas mediante diagramas cartesianos; así:

Ejemplo 1 : Sean los conjuntos: $A = \{1; 2; 3; 4\} \wedge B = \{5; 6; 7\}$

Encontrar: $R = \{(x; y) \in A \times B / y - x = 3\}$ y diagramar.

Resolución:

- En primer lugar, hallamos el producto cartesiano: $A \times B$.

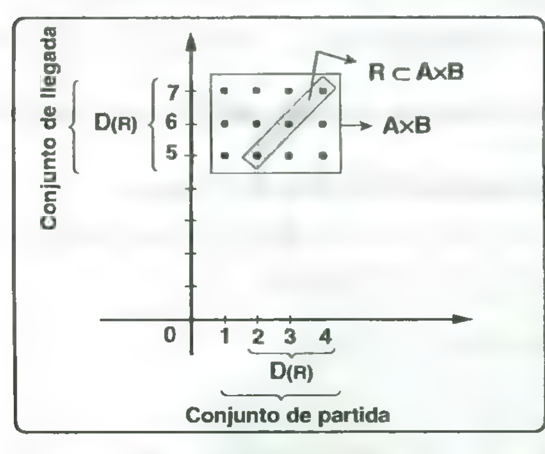
$$A \times B = \{1; 2; 3; 4\} \times \{5; 6; 7\}$$

$$A \times B = \{(1; 5), (1; 6), (1; 7), (2; 5), (2; 6), (2; 7), (3; 5), (3; 6), (3; 7), (4; 5), (4; 6), (4; 7)\}$$

Luego la relación pedida: $R = \{(x; y) \in A \times B / \boxed{y - x = 3}\}$; es :

$$R = \{(2; 5), (3; 6), (4; 7)\}$$

- En segundo lugar , construimos el diagrama:



*** Del diagrama:**

D(R) = {2; 3; 4}

R(R) = {5; 6; 7}

- La imagen de **2** es **5**
- La imagen de **3** es **6**
- La imagen de **4** es **7**

∴ **R** si es función

Ejemplo 2 : Sean los conjuntos: $A = \{1; 2; 3\}$ Ù $B = \{1; 2; 4\}$

Encontrar: $R = \{(x; y) \in A \times B / x > y\}$ y diagramar.

Resolución:

- En primer lugar, hallamos el producto cartesiano:

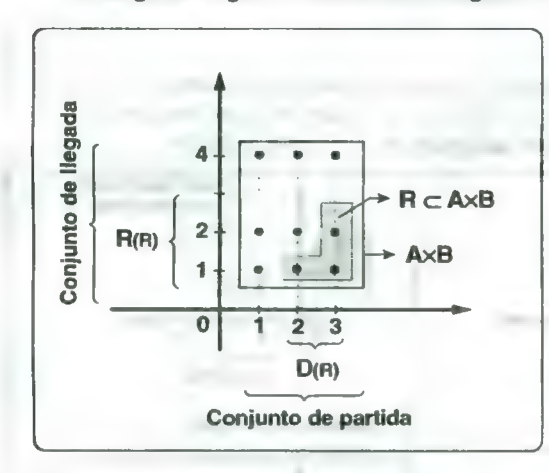
$A \times B = \{1; 2; 3\} \times \{1; 2; 4\}$

$A \times B = \{(1; 1), (1; 2), (1; 4), \underline{(2; 1)}, (2; 2), (2; 4), \underline{(3; 1)}, \underline{(3; 2)}, (3; 4)\}$

Luego la relación pedida: $R = \{(x; y) \in A \times B / x > y\}$; es :

$R = \{(2; 1), (3; 1), (3; 2)\}$

- En segundo lugar, construimos el diagrama:



*** Del diagrama:**

$D_{(R)} = \{2; 3\}$

$R_{(R)} = \{1; 2\}$

- La imagen de **2** es **1**
- La imagen de **3** es **1**
- La imagen de **3** es **2**

* Como se observará **3** tiene doble imagen **1** y **2**; lo que nos indica que R no es función.

∴ **R no es función**

Ejemplo 3 : Sean los conjuntos: $A = \{1; 2; 3\} \wedge B = \{2; 4; 6\}$

Encontrar: $R = \{(x; y) \in A \times B / x = y/2\}$ y diagramar.

Resolución:

- En primer lugar, hallamos el producto cartesiano: $A \times B$

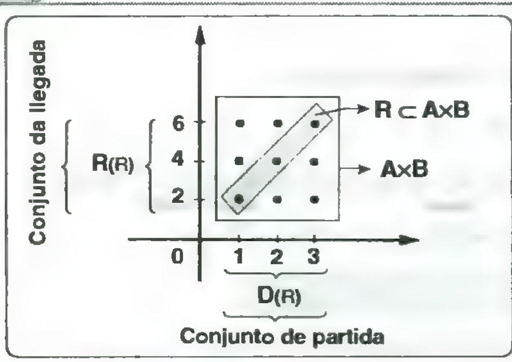
$A \times B = \{1; 2; 3\} \times \{2; 4; 6\}$

$A \times B = \{\underline{(1; 2)}, (1; 4), (1; 6), (2; 2), \underline{(2; 4)}, (2; 6), (3; 2), (3; 4), \underline{(3; 6)}\}$

Luego la relación pedida: $R = \{(x; y) \in A \times B / x = y/2\}$; es :

$R = \{(1; 2), (2; 4), (3; 6)\}$

- En segundo lugar, construimos el diagrama:



*** Del diagrama:**

$D(R) = \{1; 2; 3\}$

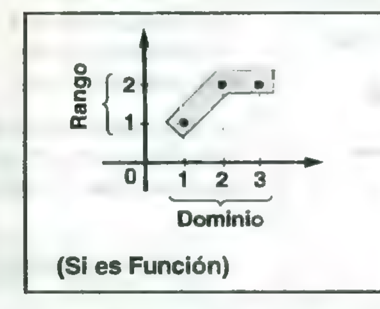
$R(R) = \{2; 4; 6\}$

- La imagen de **1** es **2**
- La imagen de **2** es **4**
- La imagen de **3** es **6**

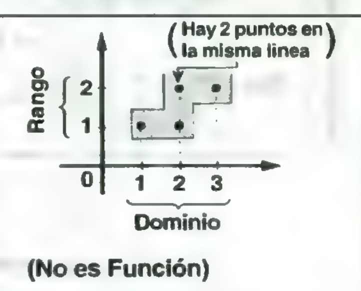
∴ **R** si es función

Recomendaciones:

* *Una relación definida mediante un diagrama cartesiano es* ***función*** *si una recta trazada perpendicularmente al eje de coordenadas en el que está representado el dominio,* ***contiene a lo más un punto*** *de dicha representación.*



(Si es Función)



(No es Función)

* *Si se tiene el* ***grafo*** *o* ***conjunto de pares ordenados*** *una relación es función*

* *Si no hay pares ordenados con primeras componentes iguales, entonces dicha relación es función.*

(Si es Función)

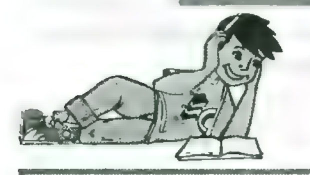
Sean los grafos:

$A = \{(1; 2), (2; 3), (3; 5), (4; 7)\}$ ⇒ (*sí es una función*)

$B = \{(-2; 1), (-3; 2), (1; 3), (2; 4)\}$ ⇒ (*sí es una función*)

$C = \{(3; 1), (4; 2), (3; 4), (5; 6), (6; 8)\}$ ⇒ (*no es una función por repetirse la primera componente 3*)

Recuerda que: *Una función puede ser definida por su diagrama sagital o cartesiano o por un conjunto de pares ordenados o* ***grafo.***



TALLER DE EJERCICIOS Nº 1

Ejercicio 1: Dado los conjuntos:
$A = \{2 ; 3 ; 4\} \wedge B = \{3 ; 5 ; 6\}$; cuáles de las siguientes relaciones no es una función de A en B.

$R_1 = \{(2 ; 3) , (3 ; 5) , (4 ; 6)\}$
$R_2 = \{(2 ; 5) , (3 ; 3) , (4 ; 6)\}$
$R_3 = \{(2 ; 5) , (2 ; 6) , (3 ; 3)\}$

Resolución:

Ejercicio 2: Dado los conjuntos:

$A = \{-1 ; 0 ; 2 ; 4\} \wedge B = \{-2 ; 0; 6 ; 8\}$;
Hallar:
a) $f : A \rightarrow B$; tal que: $y = 2x$
b) Dominio y rango de f.
c) Diagrama sagital
d) ¿Es aplicación?

Resolución:

Ejercicio 3: Sean los conjuntos:
$A = \{1 ; 4 ; 5 ; 7\} \wedge B = \{2 ; 3 ; 5 ; 7\}$; encontrar:
$R = \{(x ; y) \in A \times B / x = y + 1\}$ y diagramar:

Resolución:

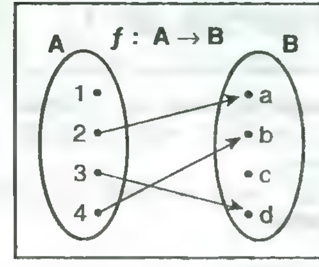
Ejercicio 4: Sean los conjuntos:

$A = \{2 ; 3 ; 4 ; 5\} \wedge B = \{3 ; 8 ; 15 ; 26\}$; encontrar:
$R = \{(x ; y) \in A \times B / y = x^2 - 1\}$ y diagramar.

Resolución:

1.2 CLASES DE FUNCIONES

1.2.1 FUNCIÓN INYECTIVA O "UNO A UNO".- Una función $f : A \to B$, es **inyectiva** cuando a elementos distintos del dominio se hacen corresponder imágenes distintas, es decir a ninguna imagen llegan dos flechas.

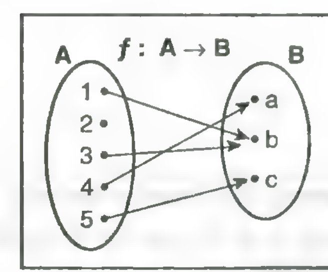


- Una función $f : A \to B$; se llama **inyectiva** (uno a uno) si para todo x_1 y x_2 que pertenecen al dominio de f; siendo: $x_1 \neq x_2$, implica que:

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

1.2.2 FUNCIÓN SURYECTIVA; SOBREYECTIVA O FUNCIÓN SOBRE

Una función $f : A \to B$, es **suryectiva** ; cuando el rango de la función es igual al conjunto B.

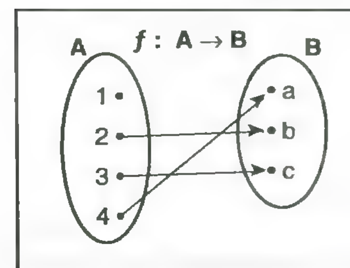


- Una función $f : A \to B$; se llama **suryectiva**, si para todo elemento $y \in B$, existe un elemento $x \in A$; tal que:

$$(x; y) \in f \text{ ó } y = f(x)$$

1.2.3 FUNCIÓN BIYECTIVA:

Sea la siguiente función:



- Se observa que: f : es **inyectiva** y como $R(f) = B$; también es **suryectiva**

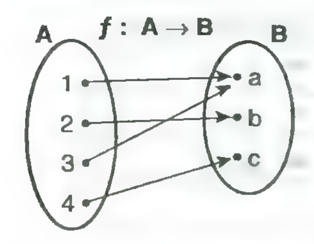
  Luego:

  Una función $f : A \to B$; se llama función **biyectiva** o es una **biyección**, si f es inyectiva y suryectiva.

Ejemplo 1 : Dado los conjuntos: $A = \{1; 2; 3; 4\} \wedge B = \{a; b; c\}$ y la función: $f = \{(2; b), (3; a), (1; a), (4; c)\}$

a) ¿Es inyectiva? **b)** ¿Es suryectiva? **c)** ¿Es biyectiva?

Resolución:



a) f no es inyectiva por: (1; a) y (3; a)

b) f es suryectiva pues: $R(f) = B$

c) f no es biyectiva pues para serlo, debe ser inyectiva y suryectiva a la vez.

Ejemplo 2 : Dado los conjuntos: $A = \{1; 3; 5; 6; 7\} \wedge B = \{2; 4; 6\}$ y la función: $f = \{(x; y) \in A \times B / y = x + 1\}$

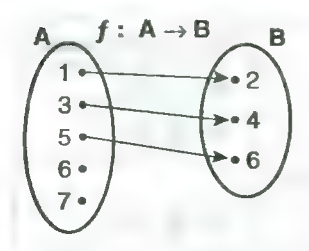
a) ¿Es inyectiva? **b)** ¿Es suryectiva? **c)** ¿Es biyectiva?

Resolución:

- **Por tabulación:**

x	y = x + 1	*Pares Ordenados*
1	y = 1 + 1 = **2**	➠ **(1; 2)**
3	y = 3 + 1 = **4**	➠ **(3; 4)**
5	y = 5 + 1 = **6**	➠ **(5; 6)**
6	y = 6 + 1 = **7 ∉ B**	
7	y = 7 + 1 = **8 ∉ B**	

- ***Graficando, obtenemos:***



Luego:

a) La función f si es inyectiva **(uno a uno)**

b) La función f si es suryectiva pues $R(f) = B$, esto quiere decir que el rango de la función es igual al conjunto B.

c) La función f si es biyectiva por **(a)** y **(b)**.

Ejemplo 3 : Dado los conjuntos: $A = \{1; 2; 3; 4\} \wedge B = \{2; 4; 6; 7\}$ y la función: $f = \{(x; y) \in A \times B / y = 2x\}$

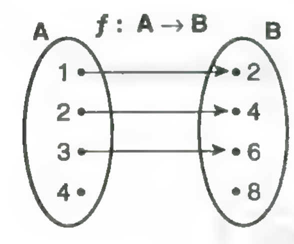
a) ¿Es inyectiva? **b)** ¿Es suryectiva? **c)** ¿Es biyectiva?

Resolución:

- **Por tabulación:**

x	y = 2x	*Pares Ordenados*
1	$y = 2(1) =$ **2**	➡ **(1; 2)**
2	$y = 2(2) =$ **4**	➡ **(2; 4)**
3	$y = 2(3) =$ **6**	➡ **(3; 6)**
4	$y = 2(4) =$ **8** $\notin$ **B**	

- ***Graficando, obtenemos:***



Luego:

a) La función ***f***, es inyectiva **(uno a uno)**

b) La función ***f***, no es suryectiva, pues: $R(f) \neq B$

c) La función ***f***, no es biyectiva

Nota: $R(f) \neq B$, significa que el rango de la función $R(f)$ es diferente del conjunto B. osea: $R(f) \neq B$

* *Para que una función sea* ***biyectiva,*** *tiene que ser inyectiva y suryectiva a la vez.*

Ejemplo 4 : Dado los conjuntos: $A = \{1; 3; 5; 6\} \wedge B = \{5; 9; 11; 15\}$ y la función: $f = \{(x; y) \in A \times B / y = 2x + 3\}$

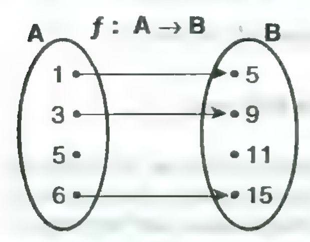
a) ¿Es inyectiva? **b)** ¿Es suryectiva? **c)** ¿Es biyectiva?

Resolución:

- **Por tabulación:**

x	y = 2x + 3	*Pares Ordenados*
1	$y = 2(1) + 3 =$ **5**	➡ **(1; 5)**
3	$y = 2(3) + 3 =$ **9**	➡ **(3; 9)**
5	$y = 2(5) + 3 =$ **13** $\notin$ **B**	
6	$y = 2(6) + 3 =$ **15**	➡ **(6; 15)**

• *Graficando, obtenemos:*



Luego:

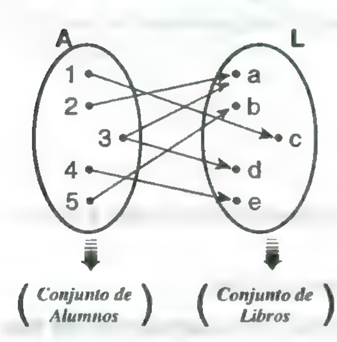
a) La función f, es inyectiva **(uno a uno)**

b) La función f, no es suryectiva, pues: $R(f) \neq B$

c) La función f, no es biyectiva

1.3 INVERSA DE UNA FUNCIÓN:

Has verificado que la inversa de una relación es siempre otra relación. Veamos:



Dada la relación: R : .... **leyó el libro** ....

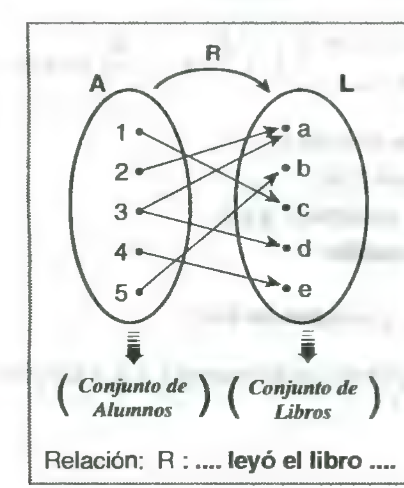
* Si se cambia el orden de los elementos es necesario cambiar la relación para que la proposición obtenida resulte verdadera, o sea:

El libro **"fue leído por"** el alumno .

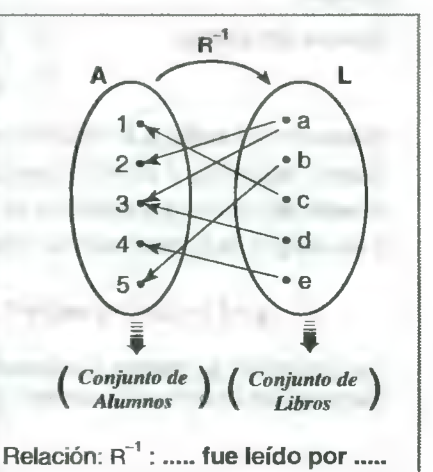
Esta relación se llama inversa de **R** y se designa por $\mathbf{R^{-1}}$.

Luego: Si: R : .... **leyó el libro** ....

Entonces: R^{-1} : .... **fué leído por** ....



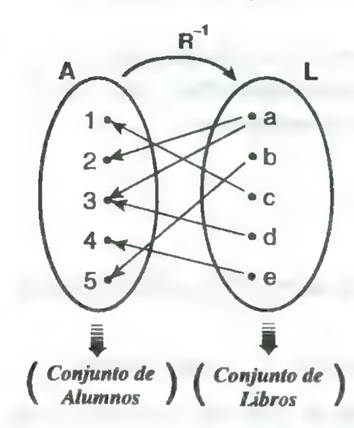
Relación: R : .... **leyó el libro** ....



Relación: R^{-1} : ..... **fue leído por** .....

¿Será la inversa de una función otra función?

Analicemos el diagrama. En los que has representado la relación:



R^{-1}: .... fué leído por ....

* **No es función**, porque de "a" salen dos flechas. Como recordarás del conjunto de partida **(de donde salen las flechas)**, tan sólo debe salir una sola flecha para que dicha relación sea **función**.

Nota: *Como se ha podido observar no siempre la inversa de una función es otra función.*

1.3.1 COMPOSICIÓN DE FUNCIONES:

En el curso anterior has estudiado distintas operaciones referidas a conjuntos, a números ,etc.

Así también podemos realizar operaciones con funciones.

Especialmente vamos a estudiar la operación llamada **composición de funciones.**

Componer dos funciones f y **g** significa aplicar la segunda al resultado de la primera .

Veamos por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si; } f: x \to x\,.\,3 \\ \text{y; } g: x \to x-1 \end{array}\right\} \; x \overset{f}{\to} x\,.\,3 \overset{g}{\to} x\,.\,3-1$$

Aplicamos la función **g** al resultado de la función f.

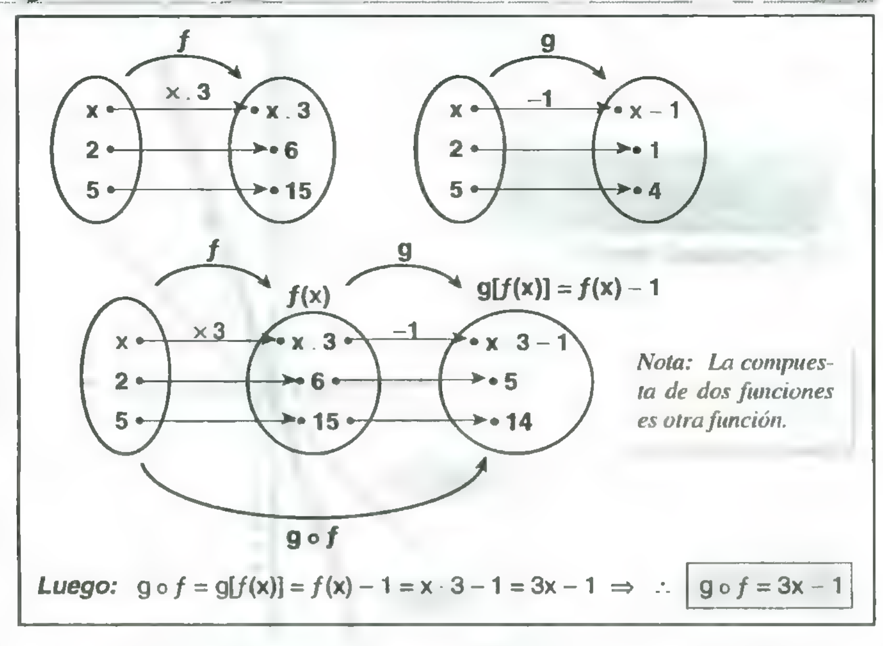
Cuando aplicamos f al valor **x**, anotamos $f(x)$.

Cuando aplicamos **g** al resultado de f, anotamos: $g \circ f$.

o es el signo de la operación de **composición**.

$g \circ f$ se lee: "g **cerito** f" ó "g **compuesta con** f"

Los siguientes diagramas te muestran primero las funciones f y **g**, y luego la composición de ambas funciones: $g \circ f$.



Nota: La compuesta de dos funciones es otra función.

Luego: $g \circ f = g[f(x)] = f(x) - 1 = x \cdot 3 - 1 = 3x - 1 \Rightarrow \therefore$ $\boxed{g \circ f = 3x - 1}$

Confeccionemos las tablas de las funciones f, **g** y $g \circ f$ definidas en **Z** (números enteros).

$f : x \rightarrow x.3$

$\boxed{y = x \cdot 3}$

x	y = x 3
–3	y = –3·3 = –9
–2	y = –2·3 = –6
–1	y = –1·3 = –3
0	y = 0·3 = 0
1	y = 1·3 = 3
2	y = 2·3 = 6
3	y = 3·3 = 9
4	y = 4·3 = 12
5	y = 5·3 = 15

$g : x \rightarrow x - 1$

$\boxed{y = x - 1}$

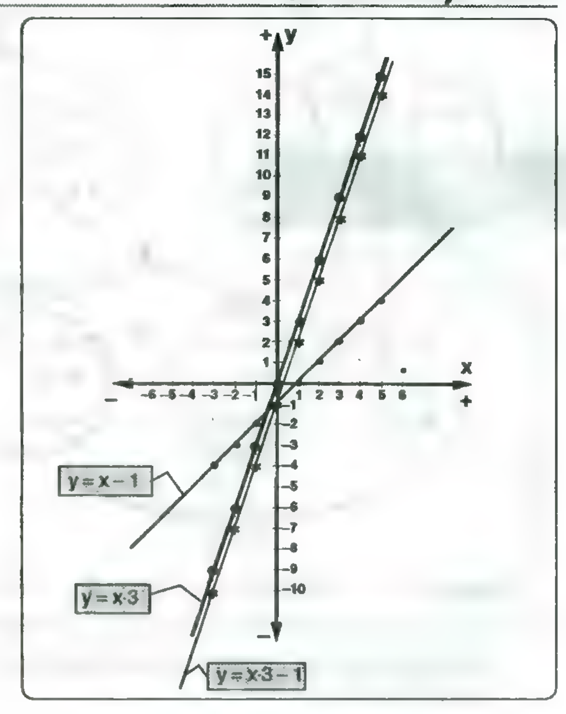
x	y = x – 1
–3	y = –3 – 1 = –4
–2	y = –2 – 1 = –3
–1	y = –1 – 1 = –2
0	y = 0 – 1 = –1
1	y = 1 – 1 = 0
2	y = 2 – 1 = 1
3	y = 3 – 1 = 2
4	y = 4 – 1 = 3
5	y = 5 – 1 = 4

$g \circ f : x \rightarrow x.3 - 1$

$\boxed{y = x \cdot 3 - 1}$

x	y = x·3 – 1
–3	y = –3·3 – 1 = –10
–2	y = –2·3 – 1 = –7
–1	y = –1·3 – 1 = –4
0	y = 0·3 – 1 = –1
1	y = 1·3 – 1 = 2
2	y = 2·3 – 1 = 5
3	y = 3·3 – 1 = 8
4	y = 4·3 – 1 = 11
5	y = 5·3 – 1 = 14

Estas tres funciones las representamos en un gráfico cartesiano, veamos:



Ejemplo 1 : Dada las funciones f y g expresa la función compuesta: $g \circ f$.

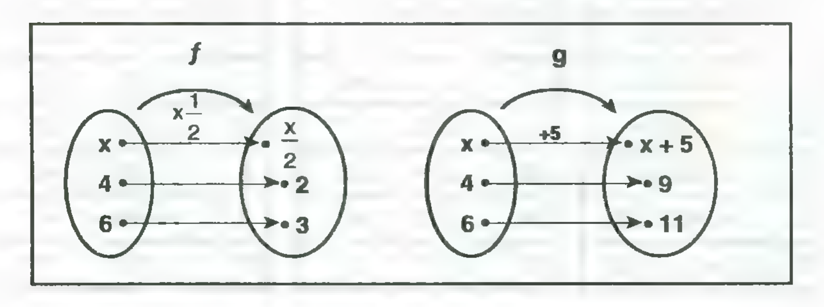
$$f : x \rightarrow \frac{x}{2} \quad \wedge \quad g : x \rightarrow x + 5$$

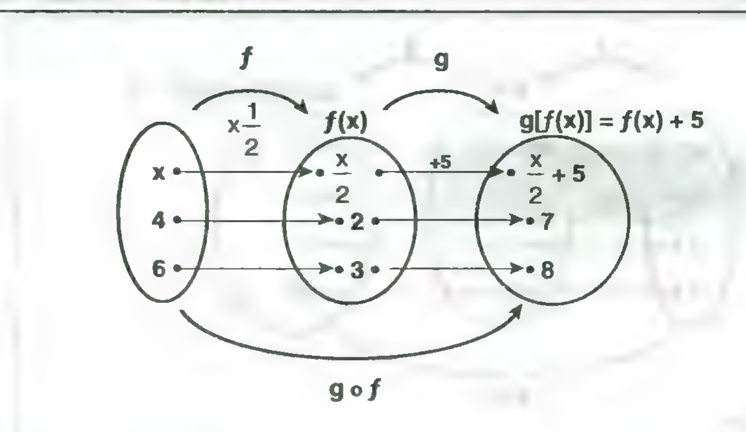
Resolución:

Si: $f : x \rightarrow \dfrac{x}{2}$

y; $g : x \rightarrow x + 5$

$$x \xrightarrow{f} \frac{x}{2} \xrightarrow{g} \frac{x}{2} + 5$$





Luego:

$$g \circ f = g[f(x)] = f(x) + 5 = \frac{x}{2} + 5 \Rightarrow \therefore \quad g \circ f = \frac{x}{2} + 5$$

Ejemplo 2 : Dadas las funciones: $f: x \to x^2$

$g: x \to x - 2$

Define: **a)** $g \circ f$ **b)** $f \circ g$

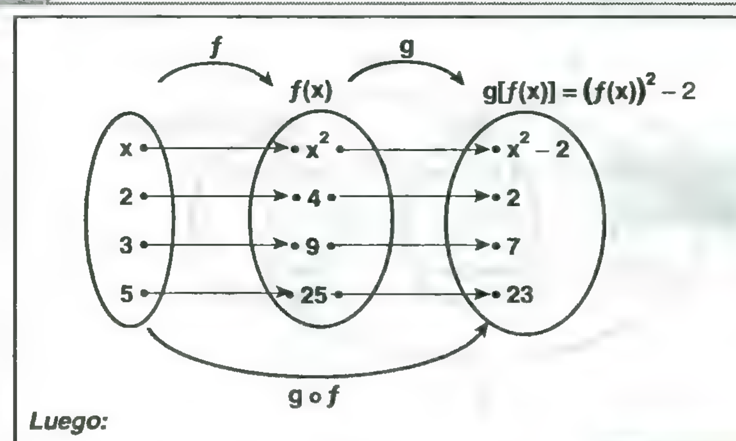
Resolución:

a) Calculamos: $g \circ f$

Si: $f: x \to x^2$

y; $g: x \to x - 2$

$$x \xrightarrow{f} x^2 \xrightarrow{g} x^2 - 2$$



Luego:

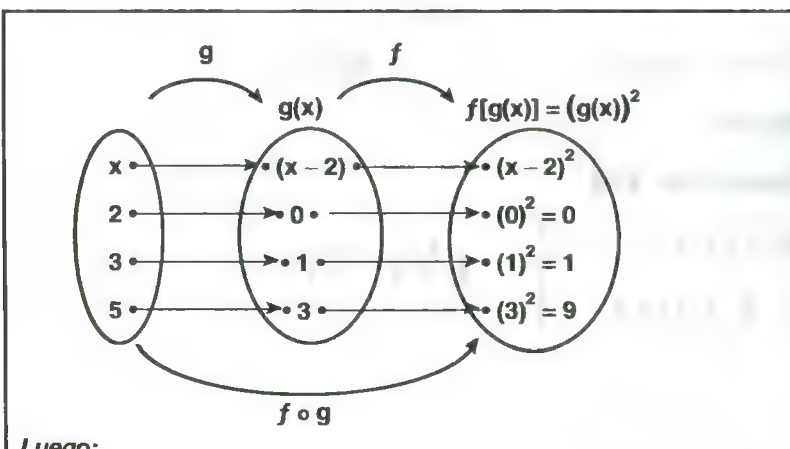
$$g \circ f = g[f(x)] = (f(x))^2 - 2 = x^2 - 2 \;\Rightarrow\; \therefore\; \boxed{g \circ f = x^2 - 2}$$

b) Calculamos: $f \circ g$

Si: $\quad g: x \rightarrow x - 2$

y; $\quad f: x \rightarrow x^2$

$$x \xrightarrow{\;g\;} x - 2 \xrightarrow{\;f\;} (x-2)^2$$

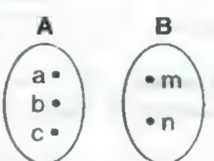


Luego:

$$f \circ g = f[g(x)] = (g(x))^2 = (x-2)^2 \;\Rightarrow\; \therefore\; \boxed{f \circ g = (x-2)^2}$$

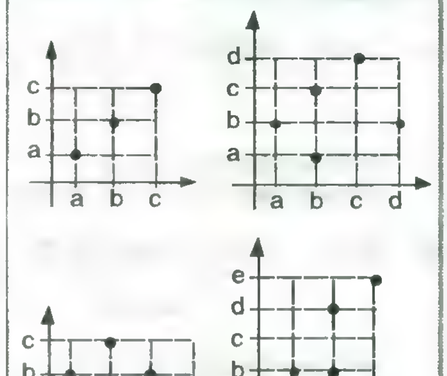
TALLER DE EJERCICIOS Nº 2

Ejercicio 1 : Determina todas las funciones posibles entre A y B, siendo A el dominio.



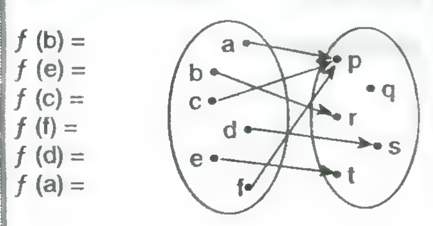
Resolución:

Ejercicio 3 : ¿Decir cuál(es) de los gráficos representa una función?

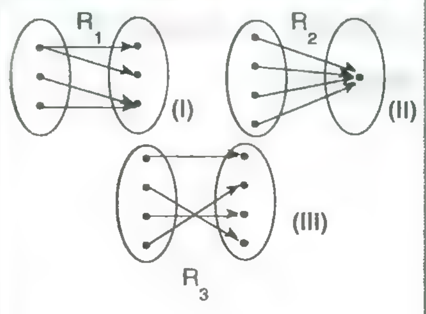


Ejercicio 2 : De acuerdo con el diagrama la imagen de cada uno de los siguientes elementos es:

f (b) =
f (e) =
f (c) =
f (f) =
f (d) =
f (a) =



Ejercicio 4 : Indica cuáles de las siguientes relaciones son funciones:



Ejercicio 5 : Sean f y g funciones reales definidas por:

$f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = 4 - 5x$; Hallar:

a) $(f \circ g)(3)$ **b)** $(g \circ f)(-1)$

Resolución:

a) $(f \circ g)_{(3)} = f(g(3)) = f(4 - 5(3))$

$= f(-11)$

- De la función: $f(x) = 2x - 3$
  Calculamos $f(-11) = 2(-11) - 3 = -25$

b) $(g \circ f)_{(-1)} = g(f(-1)) = g(2(-1) - 3)$

$= g(-5)$

- De la función: $g(x) = 4 - 5x$
  Calculamos $g(-5) = 4 - 5(-5) = 29$

Ejercicio 7 : Sean f y g funciones reales definidas por:

$f(x) = 3x - 2$ y $g(x) = 4 - 5x$. Hallar:

a) $(f \circ g)(x)$ **b)** $(g \circ f)(x)$

Resolución:

a) $(f \circ g) = (x) = f(g(x)) = f(4 - 5x)$ ...(I)

- De la función: $f(x) = 3x - 2$
  Calculamos $f(4 - 5x) = 3(4 - 5x) - 2$

$\therefore \quad f(4 - 5x) = 10 - 15x$

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x - 2)$ ...(I)

- De la función: $g(x) = 4 - 5x$
  Calculamos $g(3x - 2) = 4 - 5(3x - 2)$

$\therefore \quad g(3x - 2) = 14 - 15x$

Ejercicio 6 : Sean f y g funciones reales definidas por:

$f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 2 - 3x$. Hallar:

a) $(f \circ g)(2)$ **b)** $(g \circ f)(-2)$

Resolución:

Rpta. **a)** $(f \circ g)(2) = 15$
b) $(g \circ f)(-2) = -7$

Ejercicio 8 : Sean f y g funciones reales definidas por:

$f(x) = 6 - 3x$ y $g(x) = x^2 + 1$. Hallar:

a) $(f \circ g)(x)$ **b)** $(g \circ f)(x)$

Resolución:

Rpta. **a)** $(f \circ g)(x) = 3(1 - x^2)$
b) $(g \circ f)(x) = 9x^2 - 36x + 37$

1.4 NOTACIÓN FUNCIONAL

Así como utilizamos el símbolo **x** (o alguna otra letra) para representar un **número**, sin especificar cuál necesitamos un símbolo para representar una función sin tener que especificar de qué **función** particular estamos hablando. Esta notación es:

$y = f(x)$; que se lee: "**y** es una función de **x**" o "**y** es igual a f de **x**" (esta última notación no significa f por x).

Obviamente en lugar de **x** e **y** hubiéramos podido emplear cualesquiera dos variables, escritas en la forma.

$$\text{Variable Dependiente} = f(\text{Variable Independiente})$$

1.4.1 VARIABLES DEPENDIENTES E INDEPENDIENTES.

En la ecuación: $y = 2x + 3$

y recibe el nombre de **variable dependiente** porque su valor depende del valor que se le dé a x. Así si asignamos a x el valor 2; $y = 2(2) + 3 = 7$; o si $x = 3$, entonces: $y = 2(3) + 3 = 9$. A la variable **x** se le llama **variable independiente.**

* Si ordenamos la ecuación anterior en la forma siguiente, $x = \dfrac{y - 3}{2}$

  x sería la variable dependiente e **y** la variable independiente

* Si ambas variables de la ecuación: $y = 2x + 3$ están en el mismo miembro de la ecuación (del mismo lado del signo de igualdad) como en: $\mathbf{2x - y + 3 = 0}$;a ninguna de las dos variables, se les considera como variable dependiente o independiente.

  Las funciones normalmente se expresan en forma de ecuaciones.

Ejemplo: La ecuación: $y = 3x^2 - 4x + 2$, es una función. Podemos hallar uno y solo un valor de **y** que corresponda a cada valor que se asigne a **x** . Veamos:

Cuando: $x = 0$ $\Rightarrow$ $y = 3(0)^2 - 4(0) + 2$ $\Rightarrow$ $y = 2$

Cuando: $x = 1$ $\Rightarrow$ $y = 3(1)^2 - 4(1) + 2$ $\Rightarrow$ $y = 1$

Cuando: $x = 2$ $\Rightarrow$ $y = 3(2)^2 - 4(2) + 2$ $\Rightarrow$ $y = 6$

Cuando: $x = -1$ $\Rightarrow$ $y = 3(-1)^2 - 4(-1) + 2$ $\Rightarrow$ $y = 9$

No todas las ecuaciones son funciones. Para que una ecuación sea función debe cumplirse que para cualquier valor que tome **"x"**; *a* **"y"** *le debe corresponder un sólo valor*

Ejemplo: *La ecuación:* $y = \pm\sqrt{x}$ ***no es función,*** *porque para cada valor de de* **x** *obtenemos dos valores para* **y**. *Veamos:*

Cuando: $x = 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{1} \Rightarrow y = \pm 1$

Cuando: $x = 4 \Rightarrow y = \pm\sqrt{4} \Rightarrow y = \pm 2$

Cuando: $x = 9 \Rightarrow y = \pm\sqrt{9} \Rightarrow y = \pm 3$

En este caso decimos que la ecuación: $y = \pm\sqrt{x}$; ***no es función.***

Con frecuencia **la variable dependiente "y"**, en las funciones es sustituida por el símbolo **F(x)**. En consecuencia la ecuación: $y = 3x^2 - 4x + 2$ puede ser simbolizada de esta manera:

i) $F(x) = 3x^2 - 4x + 2$; se lee: F de "x" ó F está en función de "x".

variable

* Nos indica que "x" es la variable y que el polinomio F depende de "x"

ii) $P(x; y) = ax^2 + by + cy^2$; x; y : **son las variables**
a, b,c : **son las constantes**

1.4.2 VALOR NUMÉRICO O DETERMINADO DE UNA RELACIÓN O FUNCIÓN

Es el número **(valor numérico)** o la expresión algebraica **(cambio de variable)** que resulta de reemplazar una o más variables por valores numéricos o algebraicos. En la mayoria de los casos se trabaja con la función polinomio.

Ejemplo 1 : Sea: $F(x) = 2x^2 + x - 3$

Para: $x = 0 \Rightarrow F(0) = 2(0)^2 + (0) - 3 = -3$

Para: $x = 1 \Rightarrow F(1) = 2(1)^2 + (1) - 3 = 0$

para: $x = -1 \Rightarrow F(-1) = 2(-1)^2 + (-1) - 3 = -2$

para: $x = 2 \Rightarrow F(2) = 2(2)^2 + (2) - 3 = 7$

Para: $x = a \Rightarrow F(a) = 2(a)^2 + (a) - 3 = 2a^2 + a - 3$

Para: $x = b - 2 \Rightarrow F(b-2) = 2(b-2)^2 + (b-2) - 3 = 2b^2 - 7b + 3$

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE VALOR NUMÉRICO O DETERMINADO DE UNA RELACIÓN O FUNCIÓN

Ejercicio 1: Siendo: $P(x) = x^2 - 3x$; Hallar el valor de: $E = \dfrac{P(3) + P(2)}{P(-2)}$

Resolución:

De la expresión: $\boxed{P(x) = x^2 - 3x}$

Calculamos: $P(3) = (3)^2 - 3(3) \Rightarrow \boxed{P(3) = 0}$

$P(2) = (2)^2 - 3(2) \Rightarrow \boxed{P(2) = -2}$

$P(-2) = (-2)^2 - 3(-2) \Rightarrow \boxed{P(-2) = 10}$

- Reemplazamos los valores hallados, en la expresión incógnita "E":

$$E = \frac{(0) + (-2)}{(10)} = \frac{-2}{10} \Rightarrow \therefore \boxed{E = -\frac{1}{5}}$$ ***Rpta.***

Ejercicio 2: Si: $f(x) = \dfrac{x + 1}{2x - 1}$; Calcular el valor de: $M = \dfrac{f(3) - f(1)}{f(2)}$

Resolución:

De la expresión: $f(x) = \dfrac{x + 1}{2x - 1}$

Calculamos: $f(3) = \dfrac{3 + 1}{2(3) - 1} = \dfrac{4}{5} \Rightarrow f(3) = \dfrac{4}{5}$

$f(1) = \dfrac{1 + 1}{2(1) - 1} = \dfrac{2}{1} \Rightarrow f(1) = 2$

$f(2) = \dfrac{2 + 1}{2(2) - 1} = \dfrac{3}{3} \Rightarrow f(2) = 1$

- Reemplazamos los valores hallados, en la expresión incógnita "M" :

$$M = \frac{\frac{4}{5} - 2}{1} = \frac{-\frac{6}{5}}{1} \Rightarrow \therefore \boxed{M = -\frac{6}{5}}$$ ***Rpta.***

Ejercicio 3: Siendo: $P(x) = x^2 + 2x$; Hallar el valor de: $R = \dfrac{P(0)^{P(1)} + P(1)^{P(-1)}}{P(2)^{P(0)}}$

Resolución:

De la expresión: $\boxed{P(x) = x^2 + 2x}$

Calculamos:

$P(0) = (0)^2 + 2(0) \Rightarrow P(0) = 0$

$P(1) = (1)^2 + 2(1) \Rightarrow P(1) = 3$

$P(-1) = (-1)^2 + 2(-1) \Rightarrow P(-1) = -1$

$P(2) = (2)^2 + 2(2) \Rightarrow P(2) = 8$

Luego; reemplazamos los valores hallados en la expresión incógnita "R":

$$R = \frac{(0)^{(3)} + (3)^{(-1)}}{(8)^0} = \frac{0 + \frac{1}{3}}{1} \Rightarrow \therefore\ R = \frac{1}{3}$$ ***Rpta.***

Ejercicio 4: Si: $f(x + 2) = x^2 + 5x - 2$; Calcular el valor de: $f(-5)$

Resolución:

De la expresión: $\boxed{f(x + 2)} = x^2 + 5x - 2$

Calculamos: $\boxed{f(-5)} = ?$

$f(x + 2) = f(-5)$

Por comparación:

$x + 2 = -5$

$\therefore\ \boxed{x = -7}$

Luego: $f(-5) = (-7)^2 + 5(-7) - 2$

$f(-5) = 49 - 35 - 2 \quad \therefore\ f(-5) = 12$ ***Rpta.***

Ejercicio 5: Si: $Q\left(x - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$; Calcular el valor de: $Q(a + 1)$

Resolución:

De la expresión: $\boxed{Q\left(x - \dfrac{1}{2}\right)} = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$

Calculamos: $\boxed{Q\ (a + 1)} = ?$

$Q\left(x - \dfrac{1}{2}\right) = Q\ (a + 1)$

Por comparación:

$x - \dfrac{1}{2} = (a + 1)$

$\therefore\ x = a + \dfrac{3}{2}$

Luego: $Q(a+1) = \dfrac{2\left(a+\dfrac{3}{2}\right)+1}{\left(a+\dfrac{3}{2}\right)-1} = \dfrac{\cancel{2}\left(\dfrac{2a+3}{\cancel{2}}\right)+1}{\dfrac{2a+3}{2}-1}$

$$Q(a+1) = \frac{2a+4}{\left(\dfrac{2a+1}{2}\right)} = \frac{2(2a+4)}{2a+1} = \frac{2\cdot 2(a+2)}{2a+1}$$

$\therefore$ $\boxed{Q(a+1) = \dfrac{4(a+2)}{2a+1}}$ ***Rpta.***

Ejercicio 6: Si: $F(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$; Hallar el valor de: $F(F_{(2)})$

Resolución:

De la expresión: $F(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

Calculamos: $F(2) = \dfrac{2(2)+1}{2-1} = 5 \Rightarrow \therefore F(2) = 5$

Expresión incógnita: $\boxed{F(F_{(2)}) = F(5) = ?}$ .... **(I)**

De la expresión: $F(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

Calculamos: $F(5) = \dfrac{2(5)+1}{5-1} = \dfrac{11}{4} \Rightarrow \therefore F(5) = \dfrac{11}{4}$

Luego, reemplazamos el valor de: F(5) en **(I)**:

$F(F(2)) = F(5) = \dfrac{11}{4} \Rightarrow \therefore$ $\boxed{F(F(2) = \dfrac{11}{4}}$ ***Rpta.***

Ejercicio 7: Si: $P\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\dfrac{1}{x}+1}{x-1}$; calcular el valor de: P(3)

Resolución:

De la expresión: $P\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\dfrac{1}{x}+1}{x-1}$

Calculamos: $P(3) = ?$

$P\left(\dfrac{1}{x}\right) = P(3)$

Por comparación:

$\dfrac{1}{x} = 3 \;\therefore\; x = \dfrac{1}{3}$

Luego: $P(3) = \dfrac{\dfrac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)} + 1}{\dfrac{1}{3} - 1} = \dfrac{3 + 1}{-\dfrac{2}{3}} = \dfrac{3\,(4)}{-2} \Rightarrow \therefore \boxed{P(3) = -6}$ ***Rpta.***

Ejercicio 8: Si: $P(x) = x^2 + x - 1$

Simplificar: $R = P(x-1) + P(x+1) - P(2x) + x^2$

Resolución:

De la expresión: $\boxed{P(x) = x^2 + x - 1}$

Calculamos: $P(x-1) = (x-1)^2 + (x-1) - 1 = x^2 - 2x + 1 + x - 2 = x^2 - x - 1$

$\therefore \boxed{P(x-1) = x^2 - x - 1}$

Calculamos: $P(x+1) = (x+1)^2 + (x+1) - 1 = x^2 + 2x + 1 + x = x^2 + 3x + 1$

$\therefore \boxed{P(x+1) = x^2 + 3x + 1}$

Calculamos: $P(2x) = (2x)^2 + 2x - 1 = 4x^2 + 2x - 1$

$\therefore \boxed{P(2x) = 4x^2 + 2x - 1}$

Luego, reemplazamos los valores hallados en la expresión "**R**", obteniendo:

$$R = (x^2 - x - 1) + (x^2 + 3x + 1) - (4x^2 + 2x - 1) + x^2$$

$\therefore \boxed{R = -x^2 + 1}$ ***Rpta.***

Ejercicio 9: Si: $P(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 2}$; Hallar: $P[P_{(x)}]$

Resolución:

- En la expresión incógnita: $P[P_{(x)}]$; hacemos que: $\boxed{P(x) = a}$ ... **(I)**

De donde: $\boxed{P[P(x)] = P(a)}$ .... **(II)**

• De la expresión: $P(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 2}$, calculamos: $P(a)$

$\boxed{P(a) = \dfrac{2a + 1}{a - 2}}$ ... **(III)**

Reemplazamos **(II)** en **(III)**; obteniendo:

$$P[P(x)] = \frac{2[P(x)] + 1}{[P(x)] - 2} \;;\; \text{pero}: P(x) = \frac{2x+1}{x-2}$$

$$\text{Luego: } P[P(x)] = \frac{2\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)+1}{\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)-2} = \frac{\left[\frac{2(2x+1)+(x-2)}{x-2}\right]}{\left[\frac{2x+1-2(x-2)}{x-2}\right]}$$

$$P[P(x)] = \frac{4x+2+x-2}{2x+1-2x+4} = \frac{5x}{5} = x \Rightarrow \therefore \boxed{P[P(x)] = x} \; \textbf{Rpta.}$$

Ejercicio 10: Si: $P(x+2) = 6x+1$; $P[F_{(x)}] = 12x - 17$

Hallar el valor de: $F(10)$

Resolución:

De la expresión: $\boxed{P(x+2)} = 6x + 1$

Calculamos: $\boxed{P[F_{(x)}]} = ?$

$P(x+2) = P[F_{(x)}]$

Por comparación:

$x + 2 = F_{(x)}$

$\therefore \boxed{x = F_{(x)} - 2}$

Luego: $P[F_{(x)}] = 6(F(x) - 2) + 1$

$P[F_{(x)}] = 6F(x) - 11$

$12x - 17 = 6F(x) - 11 \Rightarrow \therefore F(x) = 2x - 1$

De esta última expresión: $F(x) = 2x - 1$

Calculamos: $F(10) = 2(10) - 1 = 19 \Rightarrow \therefore \boxed{F(10) = 19}$ **Rpta.**

Ejercicio 11: Si: $P(x) = 3x + 2$; Además: $P[G_{(x)}] = 3x^2 - x + 2$. Calcular: $G(2)$

Resolución:

De la expresión: $P(x) = 3x + 2$

Calculamos: $P[G_{(x)}] = 3[G(x)] + 2$ .... **(I)**

Reemplazamos: $\boxed{P[G_{(x)}] = 3x^2 - x + 2;}$ en la expresión **(I)**; obteniendo:

$$3x^2 - x + \cancel{2} = 3[G(x)] + \cancel{2} \Rightarrow \therefore \frac{3x^2 - x}{3} = G(x)$$

Luego, de esta última expresión: $G(x) = \dfrac{3x^2 - x}{3}$

Calculamos: $G(2) = \dfrac{3(2)^2 - 2}{3} = \dfrac{10}{3}$

$\therefore \quad \boxed{G(2) = \dfrac{10}{3}}$ ***Rpta.***

Ejercicio 12 : Sabiendo que: $P(x+h) = x^2 + xh + h^2$; Calcular: $P(x)$.

Resolución:

De condición: $P(x+h) = x^2 + xh + h^2$; hacemos: $x + h = a \Rightarrow x = a - h$

Luego: $P(a) = (a-h)^2 + (a-h)h + h^2$

$P(a) = a^2 - 2ah + h^2 + ah - \cancel{h^2} + \cancel{h^2}$

$\therefore \quad P(a) = a^2 - ah + h^2$

De esta última expresión; calculamos P(x).

$P(a) = a^2 - ah + h^2$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$\therefore \quad \boxed{P(x) = x^2 - xh + h^2}$ ***Rpta.***

OTRA FORMA:

$P(x+h) = x^2 + xh + h^2$; a la variable "x" le restamos "h", obteniendo:

$P(x - \cancel{h} + \cancel{h}) = (x-h)^2 + (x-h)h + h^2$

$P(x) = x^2 - 2xh + h^2 + xh - \cancel{h^2} + \cancel{h^2}$

$\therefore \quad \boxed{P(x) = x^2 - xh + h^2}$ ***Rpta.***

TALLER DE EJERCICIOS Nº 3

Ejercicio 1 : En las siguientes ecuaciones. ¿Cuáles son las variables dependientes y cuáles las independientes?

a) $y = 3x + 5$ **b)** $x = y^2 + 3y$
c) $x^3 - 2w^2 = z$ **d)** $y = 8x - 2y$
e) $x - 2y = 0$ **f)** $x - y = 6$

Resolución:

Ejercicio 2 : Si: $f(x) = x - 2x^2$; Halle:

a) f (-1) **b)** f (1) **c)** f (2)
d) f (3) **e)** f (-2) **f)** f (-3)

Resolución:

Rpta.

a) $f(-1) = -3$ **b)** $f(1) = -1$ **c)** $f(2) = -6$
d) $f(3) = -15$ **e)** $f(-2) = -10$ **f)** $f(-3) = -21$

Ejercicio 3 : Si: $f(x) = x^3 - 1$; Calcule el valor de: $E = \dfrac{f(1) - f(3)}{f(2)}$

Rpta. $E = -26/7$

Ejercicio 4 : $F(2x + 1) = x^3 - 2x + 3$. Calcule el valor de: $F(5) + F(3)$

Resolución:

Rpta. $F(5) + F(3) = 9$

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE FUNCIONES

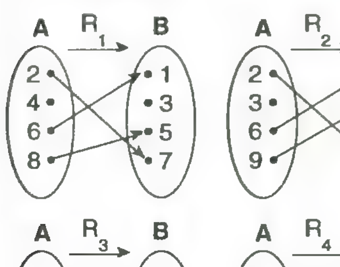
NIVEL I

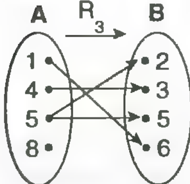
Ejercicio : Dados los conjuntos:
A = {1 ; 3 ; 5 ; 7} ∧ B = {0 ; 2 ; 4}; cuáles de las siguientes relaciones no es una función de A en B.

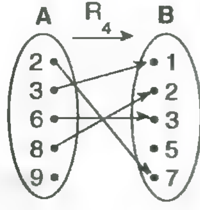
R_1 = {(1 ; 2) ; (3 ; 2) ; (5 ; 2) ; (7 ; 2)}
R_2 = {(1 ; 0) ; (3 ; 2) ; (5 ; 0) ; (3 ; 4) ; (7 ; 4)}
R_3 = {(2 ; 3) ; (4 ; 5) ; (0; 7)}
R_4 = {(3 ; 0) ; (1 ; 2) ; (5 ; 2)}
R_5 = {(0 ; 3) ; (2 ; 3) ; (4 ; 7)}
R_6 = {(0 ; 1) ; (2 ; 5) ; (4 ; 7) ; (2 ; 3)}

Ejercicio : Los siguientes diagramas sagitales definen relaciones binarias. En cada caso escribe:

a) El conjunto de partida
b) El conjunto de llegada
c) El dominio
d) El rango
¿Cuáles de las relaciones son funciones? ¿cuáles no?







Ejercicio : Dado los conjuntos:
E = {2 ; 3 ; 4 ; 5} ∧ F = {3 ; 6 ; 7 ; 10} con la relación:

R = {(x ; y) ∈ E x F /"y" divide a "x"}

Los pares ordenados que satisfacen la relación R son:

Ejercicio : Sea R la relación entre:
A = {1 ; 2 ; 3 ; 4} ∧ B = {1 ; 3 ; 5}; definida por el enunciado:
"x es menor que y". Encontrar el conjunto solución de R, esto es, escribir R como un conjunto de pares ordenados.

Ejercicio : Sean los conjuntos:
A = {3 ; 4 ; 6} ∧ B = {9 ; 12 ; 15}, encontrar:
R = {(x ; y) ∈ A x B/x = y/3} y diagramar.

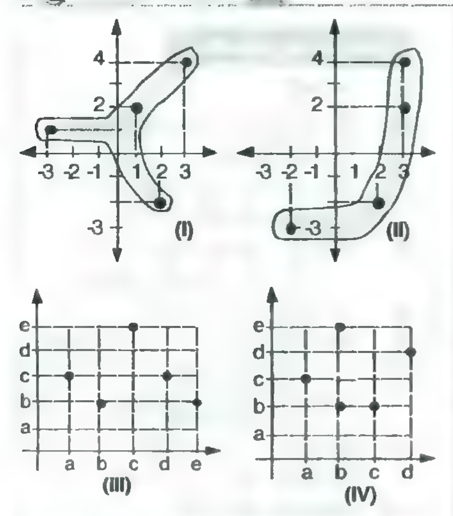
Ejercicio : Sean los conjuntos:
A = {1 ; 3 ; 5 ; 7} ∧ B = {2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10}, encontrar:

R = {(x ; y) ∈ A x B/x + y ≥ 15} y diagramar.

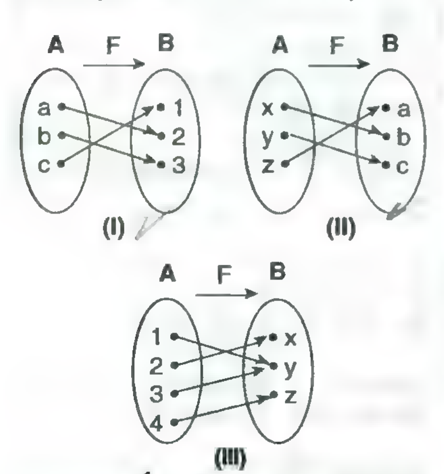
Ejercicio : Los siguientes diagramas cartesianos definen relaciones. En cada caso escribir:

a) El conjunto de partida
b) El conjunto de llegada
c) El dominio
d) El rango

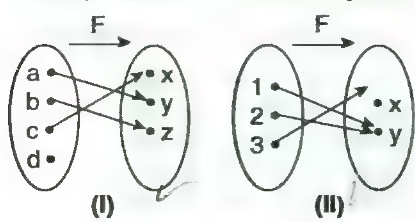
¿Cuáles de las relaciones son funciones? ¿Cuáles no?

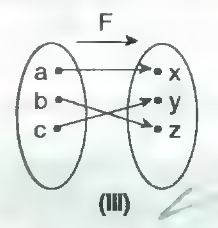


Ejercicio : Decir cuál(es) de los gráficos representa una función inyectiva.

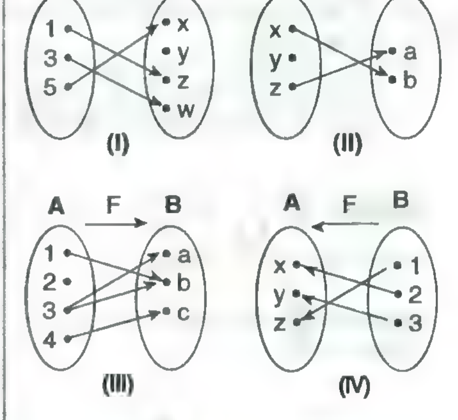


Ejercicio : Decir cuál(es) de los gráficos representa una función suryectiva.





Ejercicio : Decir cuáles son funciones biyectivas.



Ejercicio 11 : Entre los conjuntos: $A = \{a ; b ; c ; d ; e\} \wedge B = \{r ; s ; t\}$, se han definido las siguientes funciones:

a) $F_1 = \{(a; r) ; (b ; s) ; (c ; s) ; (d ; r) ; (e ; t)\}$
b) $F_2 = \{(a ; s) ; (c ; t) ; (d ; r)\}$
¿En alguna de ellas, la inversa es función?

Ejercicio 12 : Dadas las funciones:

$$f : x \rightarrow x + 3 \quad ; \quad g : x \rightarrow 2x$$

Define: **a)** g o f **b)** f o g

Ejercicio 13 : Expresa en cada caso la función compuesta: g o f.

a) $f : x \rightarrow x + 3$
$g : x \rightarrow x - 1/2$

b) $f : x \rightarrow x + 2$
$g : x \rightarrow x^3$

Ejercicio : Si: $F(x + 1) = 3x - 1$

Hallar: $E = \dfrac{F(3) - F(2)}{F(4)}$

Ejercicio : Exprese las siguientes proposiciones en notación funcional.

a) El área **A** de un cuadrado en función de uno de sus lados **x**.
b) El área **A** de un círculo en función de su radio **r**.
c) El volumen **v** de una caja rectángular en función de su longitud **L**, su anchura **w** y su altura **H**.

Ejercicio : Si: $Q\left(\dfrac{x}{2}\right) = 4x + 3$

Hallar: $M = Q(6) + Q(4)$

Ejercicio : Si: $R(x^2 - 3) = 2x + 1$
Hallar: $R(13)$

Clave de Respuestas

1. R_2 y R_6
2. R_1 ; R_2 y R_4 son funciones R_3 no es función
3. $R = \{(2 ; 6) ; (2 ; 10) ; (3 ; 3) ; (3 ; 6) ; (5 ; 10)\}$
4. $R = \{(1 ; 3) ; (1 ; 5) ; (2 ; 3) ; (2 ; 5) ; (3 ; 5) ; (4 ; 5)\}$
5. $R = \{(3 ; 9) ; (4 ; 12)\}$
6. $R = \{(5 , 10) ; (7 ; 8) ; (7 ; 10)\}$
7. I y III son funciones
II y IV no son funciones
12. **a)** $g \circ f = 2(x + 3)$
b) $f \circ g = 2x + 3$
13. **a)** $g \circ f = x + 5/2$
b) $g \circ f = (x + 2)^3$
14. $E = 3/8$
15. **a)** $A = f(x) = x^2$
b) $A = f(r) = \pi r^2$
c) $V = f(L, W, H) = L . W . H$
16. $M = 86$
17. $R(13) = 9$

NIVEL II

Ejercicio : ¿Cuáles de las siguientes relaciones dadas por pares ordenados, son funciones?

$R_1 = \{(a ; x) ; (b ; x) ; (c ; y)\}$
$R_2 = \{(a ; x) ; (a ; y) ; (b ; x)\}$
$R_3 = \{(a ; x) ; (b ; y) ; (c ; z)\}$

A) Sólo I **B)** Sólo II **C)** Sólo III
D) I y II **E)** I y III

Ejercicio : Sean: $A = \{1 ; 2 ; 3\} \wedge B = \{5 ; 6 ; 7\}$ de las siguientes relaciones ¿Cuáles son de A en B?

I. $\{(1 ; 5) , (2 ; 7) , (1 ; 7)\}$
II. $\{(5 ; 1) , (6 ; 1)\}$
III. $\{(3 ; 3) , (3 ; 6) , (3 ; 7)\}$

A) Sólo I **B)** Sólo II **C)** Sólo III
D) Sólo I y II **E)** Sólo I y III

Ejercicio : Sean: $A = \{2 ; 4 ; 6\} \wedge B = \{1 ; 3 ; 5 ; 7\}$ la relación $R : A \rightarrow B$ se define por:

$R = \{(x ; y) / y = x - 1\}$; entonces. R = ?

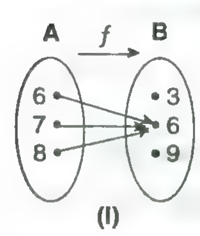
A) $\{(3 ; 2) , (5 ; 4) , (7 ; 6)\}$
B) $\{(2 ; 1) , (4 ; 5) , (6 ; 7)\}$
C) $\{(2 ; 1) , (4 ; 3) , (6 ; 5)\}$
D) $\{(2 ; 3) , (4 ; 5) , (6 ; 7)\}$
E) $\{(1 ; 2) , (3 ; 4) , (5 ; 6)\}$

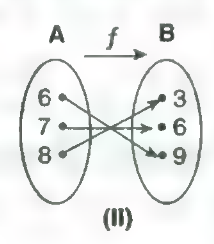
Ejercicio : Sea R la relación en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por $R = \{(x ; y)/x \geq 2y\}$ son pares de esta relación:

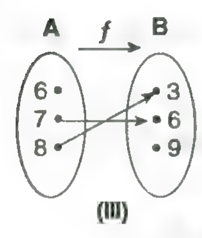
I. (5 ;3) **II.** (5 ; 1) **III.** (5 ; 2)

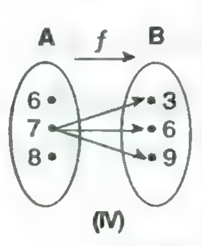
A) Sólo I **B)** Sólo I y II **C)** Sólo I y III
D) Sólo II y III **E)** I, II y III

Ejercicio : Sean: $A = \{6 ; 7 ; 8\} \wedge B = \{3 ; 6 ; 9\}$ sea f una relación de A en B definida en los diagramas dados. Determine en que casos f es función.


(I)


(II)


(III)

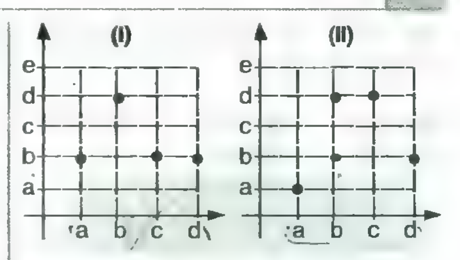

(IV)

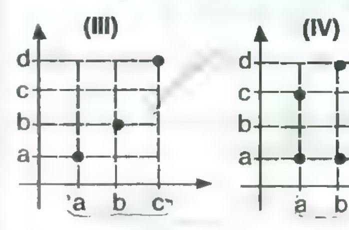
A) Sólo I **B)** Sólo I y II **C)** II y III
D) I, II y III **E)** Los cuatro

Ejercicio : Sean: $f(x) = 2x - 1 \wedge g(x) = x + 2$ dos funciones reales. Halle: (f o g) (2)

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

Ejercicio 7: ¿Cuáles de los siguientes gráficos cartesianos corresponden a funciones?





A) Sólo I **B)** Sólo II **C)** Sólo III
D) I y III **E)** II y IV

Ejercicio : Dado los conjuntos:
$A = \{x \in \mathbb{Z}/-5 < x \leq 2\} \wedge B = \{-6 \leq x \leq 0\}$ y las relaciones:

$R_1 = \{(x ; y) \in A \times B/y = x - 2\}$
$R_2 = \{(x ; y) \in A \times B/y = -x^2\}$
$R_3 = \{(x ; y) \in A \times B/y = \frac{x+1}{2}\}$
$R_4 = \{(x ; y) \in A \times B/y = 1 + 2x\}$

De estas relaciones. ¿Cuáles son funciones?

A) Sólo I **B)** Sólo II **C)** I y II
D) II y III **E)** Los cuatro

Ejercicio 9 : Sean: $f(x) = \frac{1}{x}$; $g(x) = \frac{x+2}{x-2}$ dos funciones reales. Determine: (f o g) (3).

A) 5 **B)** 6 **C)** 1/5 **D)** 1/8 **E)** 10

Ejercicio 10 : Sean: $f(x) = 2x^2 - x + 3 \wedge$

$g(x) = x^2 - 1$ dos funciones reales. Determine: $(f \circ g)(-5)$

A) 1 313 B) 3 111 C) 1 311
D) 1 131 E) N.A.

Ejercicio 11: Sean $f(x) = 2x$; $g(x) = x^2$ $\wedge$ $h(x) = x + 2$ tres funciones reales. Determine: $(f \circ g \circ h)(3)$

A) 60 B) 50 C) 25 D) 30 E) 40

Ejercicio 12: Si: $P(x) = x^2 - 2x + 1$, Calcular el valor de:

$$R = \frac{P(2)^{P(1)} + P(1)^{P(0)}}{P(3)^{P(2)}}$$

A) 1/2 B) 1/4 C) 4 D) 1/8 E) N.A.

Ejercicio 13: Sean $f(x) = 2x$; $g(x) = x^2$ $\wedge$ $h(x) = x + 2$ tres funciones reales. Determine una fórmula para: $(h \circ g \circ f)(x)$

A) $4x^2 + 1$ B) $4x^2 + 2$ C) $4x^2 + 4$
D) $2x^2 + 4$ E) $4x^2 - 2$

Ejercicio 14: Siendo: $P(x) = x^2 + 2x - 4$; Calcular: $M = P(x+2) - P(x-2)$

A) 4 (2x + 1) B) 8 (x - 1) C) 8 (x + 1)
D) 4 (2x - 1) E) 2 (4x + 1)

Ejercicio 15: Si: $Q\left(\frac{2}{a}\right) = \frac{a+2}{\left(\frac{1}{a} + 3\right)}$.

Calcular: Q(6)

A) 5/18 B) 7/18 C) 7/9
D) 6/19 E) N.A.

Ejercicio 16: Siendo: $P(x + 1) = x^2 - 3x + 1$. Hallar: $P(x - 2)$

A) $x^2 - 9x + 19$ B) $x^2 + 19x - 9$
C) $x^2 - 19x + 9$ D) $x^2 + 9x - 19$
E) N.A.

Ejercicio 17: Si: $P\left(\frac{x+1}{4}\right) = 2x - 1$

Hallar: $P\left(\frac{x+5}{2}\right)$

A) 2x +15 B) 4x + 17 C) 2x + 17
D) 4x - 17 E) N.A.

Ejercicio 18: Se sabe que: $F(3x - 1) = 9x - 7$. Hallar: $F(x + 2)$

A) 6x - 2 B) 3x - 2 C) 3x + 2
D) 2x + 3 E) 2x - 3

Ejercicio 19: Sabiendo que:

$F(x) = \frac{x+3}{x-2}$. Hallar: F [F [F(3)]]

A) 23 B) 25 C) 18 D) 21 E) 16

Ejercicio 20: Si:

$F(x) = \frac{3x+1}{x-1}$. Hallar: F (F(x))

A) $\frac{5x+1}{x-1}$ B) $\frac{5x+1}{2x}$

C) $\frac{5x-1}{4x}$ D) $\frac{5x+1}{x+1}$

E) $\frac{10x+4}{4x}$

Clave de Respuestas

1. E	2. E	3. C	4. D	5. D
6. C	7. D	8. E	9. C	10. D
11. B	12. B	13. B	14. C	15. B
16. A	17. B	18. C	19. D	20. D

1.5. SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES

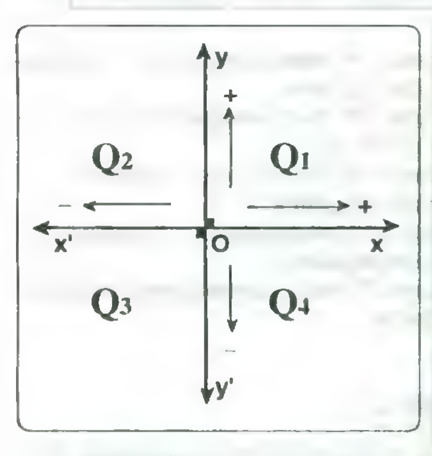
Es un plano que se forma al cortarse perpendicularmente dos rectas, una de las rectas se designa como eje "x" y la otra como "y", veamos la figura:

Ejes coordenados

$\overleftrightarrow{x'x}$: Es el eje de las abscisas o eje de las "x"

$\overleftrightarrow{yy'}$: Es el eje de las ordenadas o eje de las "y"

o : Es el origen de coordenadas



Semi ejes

$\overrightarrow{ox}$: Es el semi eje (+) de las abscisas

$\overrightarrow{ox'}$: Es el semi eje (–) de las abscisas

$\overrightarrow{oy}$: Es el semi eje (+) de las ordenadas

$\overrightarrow{oy'}$: Es el semi eje (–) de las ordenadas

Cuadrantes

El primer cuadrante es xoy : (Q_1)

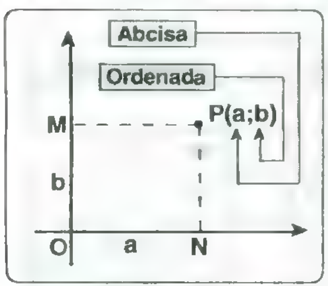
El segundo cuadrante es yox' : (Q_2)

El tercer cuadrante es x'oy' : (Q_3)

El cuarto cuadrante es xoy' : (Q_4)

1.5.1 POSICIÓN DE UN PUNTO O COORDENADAS DE UN PUNTO

Se llama así, a la localización de un punto en el plano cartesiano, así:



ABSCISA DE UN PUNTO: Es la distancia de un punto al eje de las ordenadas de la figura.

$\overline{MP} = \overline{ON}$ ➠ **Abscisa**

ORDENADA DE UN PUNTO: Es la distancia de un punto al eje de las abscisas de la figura.

$\overline{OM} = \overline{NP}$ ➠ **Ordenada**

Analíticamente un punto se representa así: P(a; b); donde "a" es la abscisa y "b" la ordenada del punto.

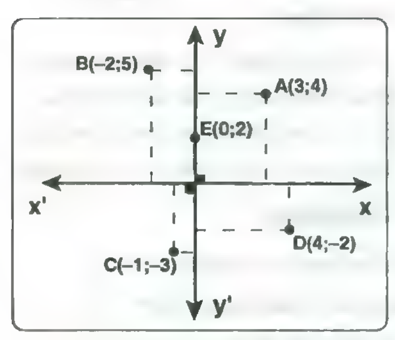
*Observación: Al punto P(a; b), también se llama "Par ordenado" de números. Es un par en el cual el orden es importante. Así el par ordenado (-2; 5) no es igual que el par ordenado (5; -2). Además **a**, **b** pertenecen al campo de los números reales.*

Cuando decimos **número real**, estamos afirmando que puede pertenecer a ℕ(números natuales), o a ℤ (números enteros) o aℚ (números racionales), o a 𝕀 (números irracionales)

1.5.2 DETERMINACIÓN DE UN PUNTO POR SUS COORDENADAS

Localice los puntos: A(3; 4), B(–2; 5), C(–1; –3), D (4; –2), E(0; 2)

- En primer lugar; se trazan dos rectas dirigidas, perpendiculares entre si.
- En segundo lugar, marcamos sobre ellas; unidades de tamaño adecuado (vea la figura).



- El punto "A", tiene abscisa 3 positiva y ordenada 4 positiva
- El punto "B", tiene abscisa 2 negativa y ordenada 5 positiva
- El punto "C"; tiene abscisa 1 negativa y ordenada negativa 3.
- El punto "D"; tiene abscisa 4 positiva y ordenada negativa 2.
- El punto "E" tiene abscisa cero y ordenada 2 positiva.

1.6 FUNCIÓN LINEAL O DE PRIMER GRADO

Una función es lineal o de primer grado, si su regla de correspondencia es: $y = ax + b$; donde: **a** y **b** son constantes, con $a \neq 0$

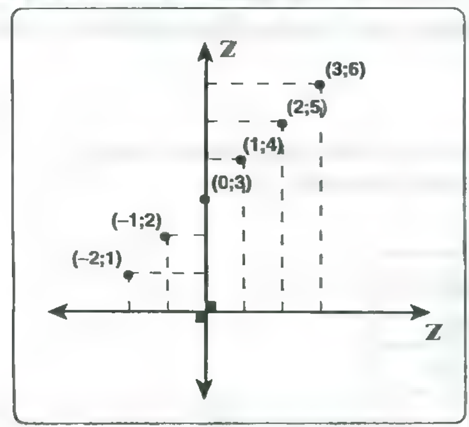
Ejemplo 1 : Graficar y hallar el dominio y rango de la función f en ℤ definida por: $y = f(x) = x + 3$

Resolución:

Para graficar cualquier función y en particular las de primer grado, hacemos la tabulación tomando algunos valores para "**x**" y hallando los respectivos valores para **y**, como sigue:

x	$y = f(x) = x + 3$	*Pares Ordenados*
⋮	⋮ ⋮	⋮
–2	$y = -2 + 3 = 1$	➡ (–2; 1)
–1	$y = -1 + 3 = 2$	➡ (–1; 2)
0	$y = 0 + 3 = 3$	➡ (0; 3)
1	$y = 1 + 3 = 4$	➡ (1; 4)
2	$y = 2 + 3 = 5$	➡ (2; 5)
3	$y = 3 + 3 = 6$	➡ (3; 6)
⋮	⋮ ⋮	⋮

Pares Ordenados



Los puntos suspensivos que se muestran en la tabla indican que hay infinito pares ordenados; en la figura sólo se han indicado los puntos dados en la tabla, siendo estos también infinito, puesto que son puntos correspondientes a los pares ordenados.

*** En este caso:**

$D(f) = \{...., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
$R(f) = \{...., 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$

o también: $D(f) = \mathbb{Z}$
$R(f) = \mathbb{Z}$

Recuerda que:

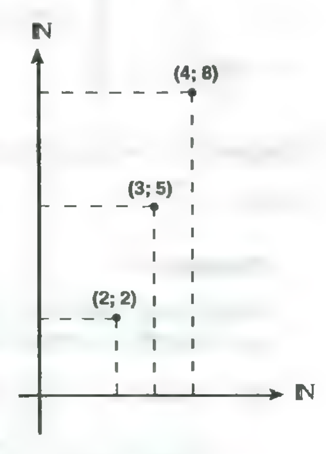
El conjunto de los números enteros es :

$\mathbb{Z} = \{......... ,-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

Ejemplo 2 : Graficar y hallar el dominio y rango de la función P definida en $\mathbb{N}$ por $y = P(x) = 3x - 4$

Resolución:

x	y = P(x) = 3x – 4	*Pares Ordenadoa*
1	y = 3(1) – 4 = –1	➡ **(–1 ∉ P(x))**
2	y = 3(2) – 4 = **2**	➡ **(2; 2)**
3	y = 3(3) – 4 = **5**	➡ **(3; 5)**
4	y = 3(4) – 4 = **8**	➡ **(4; 8)**
⋮	⋮ ⋮	



* En este caso: $D(P) = \{2, 3, 4,........\}$
$R(P) = \{2, 5, 8.........\}$

Recuerda que:

El conjunto de los números naturales es:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

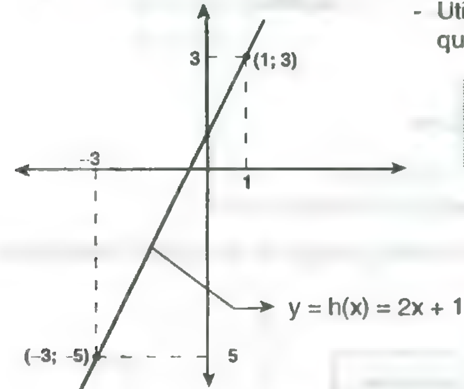
Ejemplo 3 : Graficar y hallar el dominio y rango de la función h definida en $\mathbb{R}$ por: $y = h(x) = 2x + 1$

Resolución:

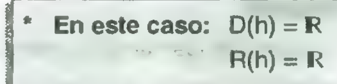
Para graficar una función de primer grado en $\mathbb{R}$ basta conocer dos puntos por donde; a través de los cuales se hace pasar una recta.

- Ubicamos los dos puntos

x	y = h(x) = 2x + 1	*Pares Ordenados*
1	y = 2(1) + 1 = **3**	➡ **(1; 3)**
–3	y = 2(–3) + 1 = **–5**	➡ **(–3; –5)**



- Utilizando una regla, trazamos la recta que pasa por los puntos (1; 3) y (–3; –5)



* **En este caso:** $D(h) = \mathbb{R}$

$R(h) = \mathbb{R}$

*Para graficar una función real, es importante conocer en que puntos la gráfica de la función corta al eje **x** y al eje **y**. A dichos puntos se les denomina interceptos.*

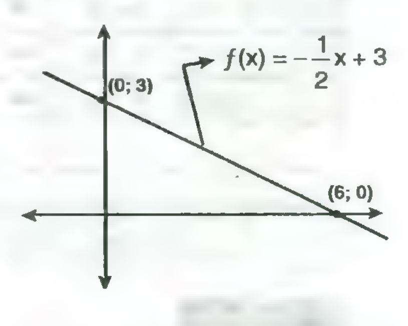
Ejemplo 4 : Graficar y hallar el dominio y rango de la función f definida en $\mathbb{R}$ por:

$y = f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

Resolución:

- Hallo el intercepto con **y**; haciendo que en la función, **x** tome el valor de cero.

Si: $\mathbf{x = 0} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}(0) + 3$



$\therefore$ $\boxed{\mathbf{x = 0} \ ; \ \mathbf{y = 3} \Rightarrow (0; 3)}$

- Hallo el intercepto con **x**; haciendo que en la función; **y** tome el valor de cero.

Si: $\mathbf{y = 0} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 3 \Rightarrow 0 = -\frac{1}{2}x + 3 \Rightarrow \frac{1}{2}x = 3 \Rightarrow \therefore \ x = 6$

$\therefore$ $x = 6 \ ; \ y = 0 \Rightarrow (6 ; 0)$

- Utilizando una regla trazo la recta que pasa por los puntos (0; 3) y (6; 0)

* En este caso: $D(f) = \mathbb{R}$ y $R(f) = \mathbb{R}$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 4

1. Graficar y hallar el dominio y el rango de la función f definida por: $y = f(x) = x + 5$ en el conjunto:

   a) $\mathbb{N}$ b) $\mathbb{Z}$ c) $\mathbb{R}$

2. Graficar y hallar el dominio y el rango de la función g definida por: $y = g(x) = 4x - 3$ en el conjunto:

   a) $\mathbb{N}$ b) $\mathbb{Z}$ c) $\mathbb{R}$

3. Graficar y hallar el dominio y el rango de la función h definida por: $y = h(x) = 3x - 1$en el conjunto:

   a) $\mathbb{N}$ b) $\mathbb{Z}$ c) $\mathbb{R}$

4. Graficar y hallar el dominio y rango de la función K definida por:

   $y = k(x) = \frac{1}{2}x + 1$ en el conjunto:

   a) $\mathbb{N}$ b) $\mathbb{Z}$ c) $\mathbb{R}$

* **En cada función lineal siguiente (real):**

  a) Halla los interceptos

  b) Con una regla traza la recta correspondiente

5. $f(x) = 4x + 3$	**6.** $f(x) = \frac{1}{3}x - 2$	**7.** $P(x) = 2x + 6$
8. $K(x) = -6x - 3$	**9.** $h(x) = -2x - 6$	**10.** $K(x) = -x + 4$
11. $g(x) = -5x + 10$	**12.** $m(x) = -\frac{3}{5}x + 1$	**13.** $t(x) = -\frac{1}{5}x + 5$
14. $q(x) = -2x + 4$	**15.** $h(x) = \frac{1}{3}x - 5$	**16.** $r(x) = \frac{1}{2}x - 1$

RESPUESTAS TALLER 4

1.	**a)** $\begin{cases} D(f) = \{0, 1, 2, 3, ...\} \\ D(f) = \{5, 6, 7, ...\} \end{cases}$	**b)** $\begin{cases} D(f) = \mathbb{Z} \\ R(f) = \mathbb{Z} \end{cases}$	**c)** $\begin{cases} D(f) = \mathbb{R} \\ R(f) = \mathbb{R} \end{cases}$
2.	**a)** $\begin{cases} D(g) = \{1, 2, 3, ...\} \\ R(g) = \{1, 5, 9, ...\} \end{cases}$	**b)** $\begin{cases} D(g) = \mathbb{Z} \\ R(f) = \{........ -7, -3, 1, 5, ...\} \end{cases}$	
	c) $\begin{cases} D(g) = \mathbb{R} \\ R(g) = \mathbb{R} \end{cases}$		
3.	**a)** $\begin{cases} D(h) = \{1, 2, 3, ...\} \\ R(h) = \{2, 5, 8, ...\} \end{cases}$	**b)** $\begin{cases} D(h) = Z \\ R(h) = \{.... -7, -4, -1, 2, 5, ...\} \end{cases}$	
	c) $\begin{cases} D(h) = \mathbb{R} \\ R(h) = \mathbb{R} \end{cases}$		
4.	**a)** $\begin{cases} D(k) = \{0, 2, 4, 6, ...\} \\ R(k) = \{1, 2, 3, 4, ...\} \end{cases}$	**b)** $\begin{cases} D(k) = \{...... -4, -2, 0, 2, 4 ......\} \\ R(k) = \mathbb{Z} \end{cases}$	
	c) $\begin{cases} D(k) = R \\ R(k) = R \end{cases}$		

- Los interceptos de cada función lineal son los puntos:

5. (0; 3) y (– 3/4; 0)	**6.** (0; –2) , (6; 0)	**7.** (0; 6) y (–3; 0)
8. (0; –3) y (– 1/2; 0)	**9.** (0; –6) y (–3; 0)	**10.** (0; 4) y (4; 0)
11. (0; 10) y (2; 0)	**12.** (0; 1) y (5/3; 0)	**13.** (0; 2) y (10; 0)
14. (0; 4) y (2; 0)	**15.** (0; –5) y (15; 0)	**16.** (0; –1) y (2; 0)

1.7 FUNCIONES ESPECIALES

Las funciones que a continuación se presentan; son de uso frecuente, por ello es necesario recordar sus características. Entre estas funciones especiales se consideran las siguientes:

1.7.1 FUNCIÓN CONSTANTE

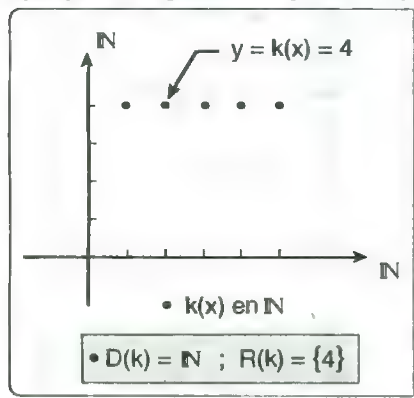
- Si en la función: $y = ax + b$; $\mathbf{a = 0}$; entonces la función resultante es:

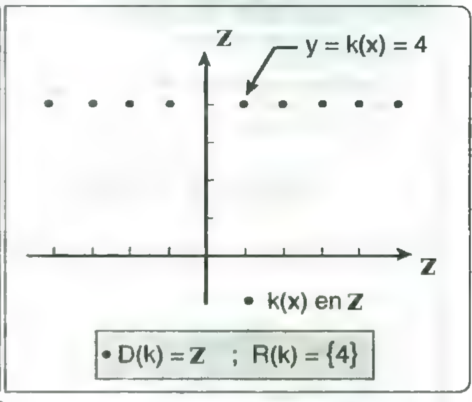
$\boxed{y = b}$; a esta función se le denomina **función constante.**

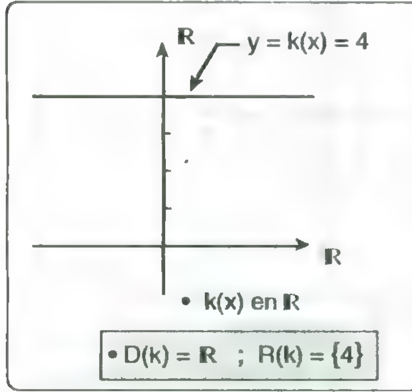
Son funciones constantes: $y = 3$; $y = -5$; $y = \frac{2}{3}$; $k(x) = 4$; $h(x) = -3$; etc.

La función constante **y = b** nos dice que todos sus pares ordenados tienen como segunda componente al número **b**.

Ejemplo : La gráfica de: $y = 4$ ó $k(x) = 4$, es.







Importante:

a) El dominio de una función constante es: $\mathbb{R}$ (conjunto de los números reales)

b) El rango de una función constante es: $\{b\}$

c) Su gráfica es una recta horizontal

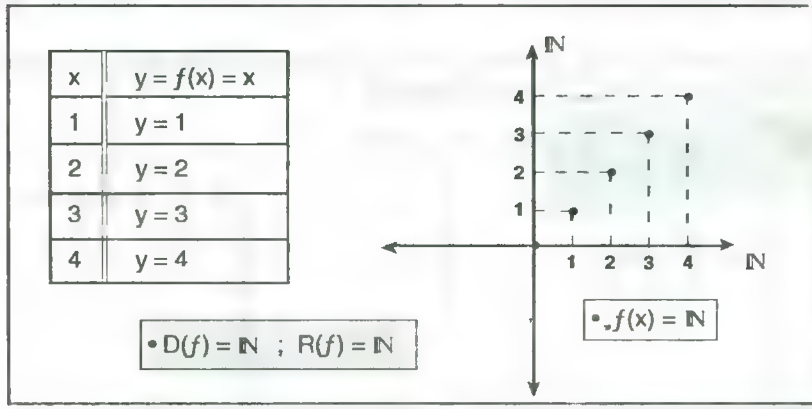
1.7.2 FUNCIÓN IDENTIDAD

Si en la función: $y = ax + b$; $a = 1$ y $b = 0$; entonces la función resultante es **y = x**. A esta función se le denomina **función identidad.**

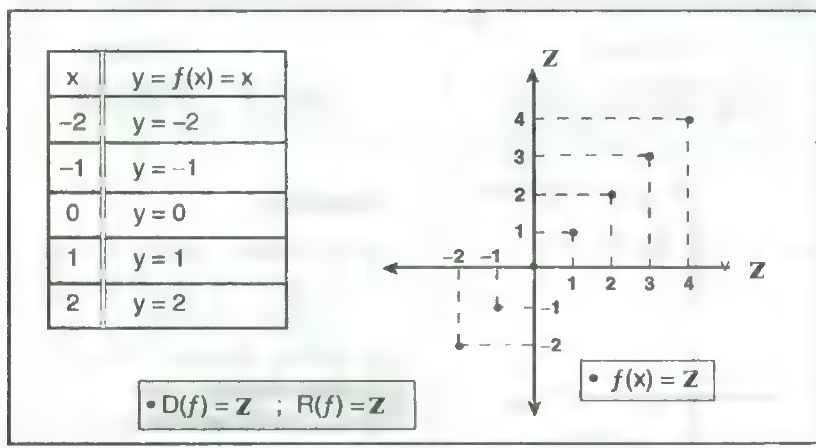
La **función identidad, y = x**, nos dice que todos sus pares ordenados gozan de la característica siguiente:

"Su segunda componente, es igual a su primera componente"

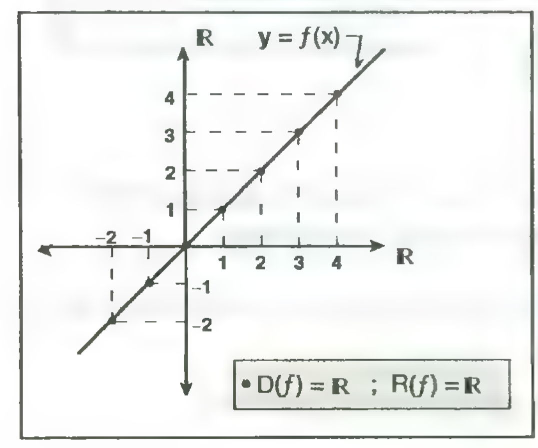
La gráfica de: **y = x** ó **f(x) = x** ; es:



x	y = f(x) = x
1	y = 1
2	y = 2
3	y = 3
4	y = 4



x	y = f(x) = x
–2	y = –2
–1	y = –1
0	y = 0
1	y = 1
2	y = 2



Importante:

a) El dominio de una función identidad es: ℝ (conjunto de los números reales)

b) El rango de una función identidad es: ℝ (conjunto de los números reales)

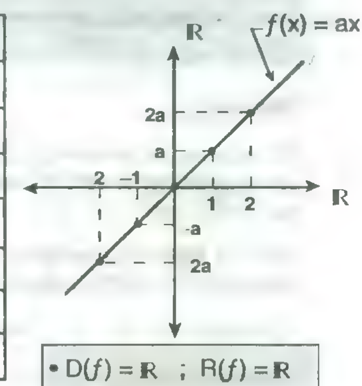
c) Su gráfico es la bisectriz del primer y tercer cuadrante

1.7.3 FUNCIÓN LINEAL

Si en la función: $y = ax + b$; $b = 0$; "a" es una constante diferente de cero entonces la función resultante es: $y = ax$, a esta función se le denomina función lineal.

- La gráfica de: $\mathbf{y = ax}$ ó $\mathbf{f(x) = ax}$; es:

x	$y = f(x) = ax$	*Pares Ordenados*
⋮	⋮ ⋮	⋮
–2	$y = a(-2) = \mathbf{-2a}$	➡ **(–2; –2a)**
–1	$y = a(-1) = \mathbf{-a}$	➡ **(–1; –a)**
0	$y = a(0) = \mathbf{0}$	➡ **(0; 0)**
1	$y = a(1) = \mathbf{a}$	➡ **(1; a)**
2	$y = a(2) = \mathbf{2a}$	➡ **(2; 2a)**
⋮	⋮ ⋮	⋮



• $D(f) = \mathbb{R}$; $R(f) = \mathbb{R}$

Importante:

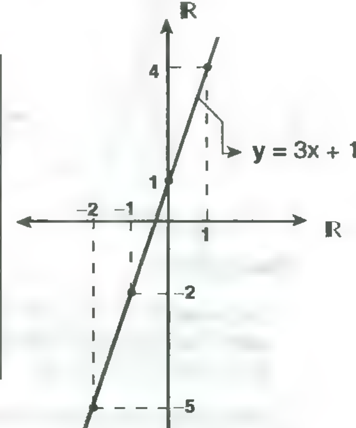
a) El dominio de la función lineal es: ℝ (conjunto de los números reales)
b) El rango de la función lineal es: ℝ (conjunto de los números reales)
c) Su gráfico es una **recta oblicua** que pasa por el origen.

1.7.4 FUNCIÓN AFÍN

Es la función de la forma: $y = ax + b$ ó $f(x) = ax + b$; donde: $a \neq o$ y $b \neq o$

- La gráfica de: $\mathbf{y = 3x + 1}$; es:

x	$y = f(x) = 3x + 1$	*Pares Ordenados*
⋮	⋮ ⋮	⋮
–2	$y = 3(-2) + 1 = -5$	➡ **(–2; –5)**
–1	$y = 3(-1) + 1 = -2$	➡ **(–1; –2)**
0	$y = 3(0) + 1 = 1$	➡ **(0; 1)**
1	$y = 3(1) + 1 = 4$	➡ **(1; 4)**
⋮	⋮ ⋮	⋮



Importante:

*a) El dominio de la función **Afín** es: $\mathbb{R}$(conjunto de los números reales)*

*b) El rango de la función **Afín** es: $\mathbb{R}$ (conjunto de los números reales)*

*c) Su gráfico es una **recta oblicua** que no pasa por el origen cuya ordenada en el origen es b.*

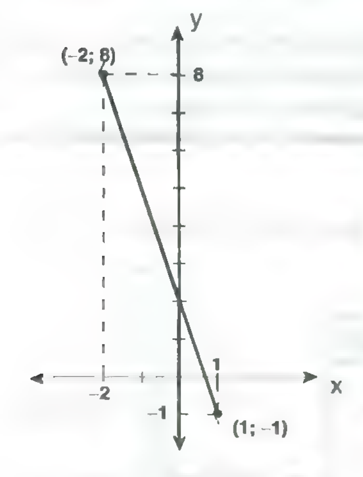
* **Graficar**, hallar el dominio y el rango de la función: $y = -3x + 2$; $x \in [-2; 1]$

Resolución:

- De acuerdo al intervalo: $[-2; 1]$, nos indica que la variable independiente x sólo puede tomar valores reales mayores o igual que -2 pero menores o igual que 1. Es decir: $-2 \leq x \leq 1$
- Si a **x** le damos sus valores extremos -2 y 1, obtenemos los puntos extremos del segmento (gráfica de la función); veamos:

$$\left.\begin{array}{lllll}\text{Cuando: } \mathbf{x = -2} & \Rightarrow & y = -3(-2) + 2 = 8 & \Rightarrow & (-2; 8) \\ \text{Cuando: } \mathbf{x = 1} & \Rightarrow & y = -3(1) + 2 = -1 & \Rightarrow & (1; -1)\end{array}\right\} \left(\textit{Puntos extremos del segmento}\right)$$

- Los puntos hallados los ubicamos en el sistema de coordenadas.



Luego: $\begin{cases} \text{Dominio} = [-2; 1] \\ \text{rango} = [-1; 8] \end{cases}$

* $[-2; 1]$ y $[-1; 8]$, son intervalos cerrados
* Los puntos $[-2; 1]$ y $[-1; 8]$ aparecen en la gráfica con bolitas llenas (negritas)

* **Graficar**, hallar el dominio y el rango de la función:

$$y = \frac{1}{3}x - 4 \ ; \quad x \in \langle -3; 6]$$

Resolución:

- De acuerdo al intervalo: $\langle -3; 6]$, nos indica que la variable independiente **x** sólo puede tomar valores reales mayores que -3 pero menores o igual que 6. Es decir; $-3 < x \leq 6$.
- Como sabemos que; x es mayor que -3; para hallar la otra componente de uno de los pares ordenados; hacemos que: $\mathbf{x = -3}$

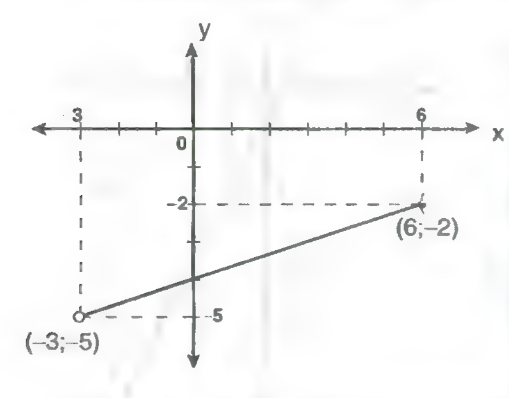
Donde: $y = \frac{1}{3}(-3) - 4 = -5$

* Siendo dicho par ordenado: (–3; –5); este punto aparecerá en la gráfica con una **bolita vacía** por ser: $x > -3$

  Luego, hallamos el otro par ordenado.

* Cuando: $x = 6$; $y = \frac{1}{3}(6) - 4 = -2$; (6; –2), este punto aparecerá en la gráfica con una **bolita llena (negrita)**

- Los puntos: (–3; –5) y (6; –2) ; los ubicamos en el sistema de coordenadas



Luego: $\begin{cases} \text{Dominio} = \langle -3; 6] \\ \text{Rango} = \langle -5; -2] \end{cases}$

* ⟨–3; 6] y ⟨–5; –2], son intervalos abiertos por la izquierda y cerrada por la derecha.
* El punto (–3; 5) aparece en la gráfica con una bolita vacía y el punto (6; –2) aparece con una bolita llena (negrita)

* **Graficar**, hallar el dominio y el rango de la función: $y = 3{,}4$; $x \in \langle -\infty ; 5{,}2 \rangle$

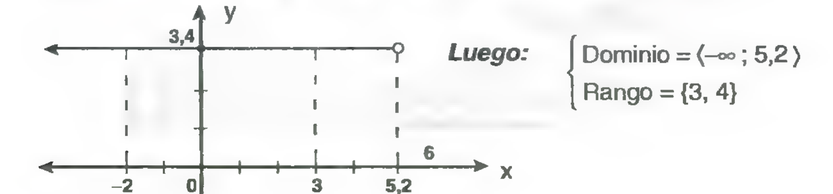
Resolución:

- De acuerdo al intervalo: $\langle -\infty; 5{,}2 \rangle$; **x sólo puede tomar los valores reales menores** que 5,2.

  Cuando: **x = 5,2** ⇒ y = 3,4 ⇒ ⟨5,2 ; 3,4⟩ ⇒ **(abierto)**

  Cuando: **x = 3** ⇒ y = 3,4 ⇒ [3 ; 3,4] ⇒ **(cerrado)**

  Cuando: **x = –2** ⇒ y = 3,4 ⇒ [–2 ; 3,4] ⇒ **(cerrado)**



Luego: $\begin{cases} \text{Dominio} = \langle -\infty ; 5{,}2 \rangle \\ \text{Rango} = \{3,\ 4\} \end{cases}$

- **Graficar**, hallar el dominio y el rango de la función: $y = -2x - 1$; $x \in [-3{,}6 ; \infty\rangle$

Resolución:

- De acuerdo al intervalo: $[-3{,}6 ; \infty\rangle$; **x** sólo puede tomar los valores reales mayores o igual que $-3{,}6$.

Cuando: $\mathbf{x = -3{,}6}$

$y = -2(-3{,}6) - 1 = 6{,}2$

$\Rightarrow$ $[-3{,}6 ; 6{,}2]$ **(cerrado)**

Cuando: $\mathbf{x = 1}$

$y = -2(1) - 1 = -3$

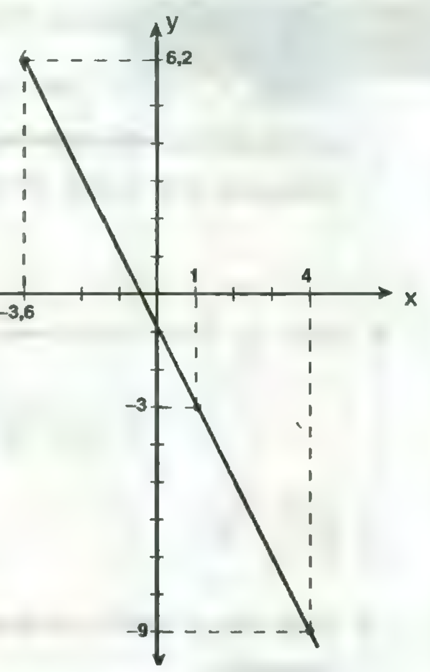
$\Rightarrow$ $[1 ; -3]$ **(cerrado)**

Cuando: $\mathbf{x = 4}$

$y = -2(4) - 1 = -9$

$\Rightarrow$ $[4 ; -9]$ **(cerrado)**

Luego: $\begin{cases} \text{Dominio} = [-3{,}6 ; \infty\rangle \\ \text{Rango} = \langle -\infty ; 6{,}2] \end{cases}$



1.7.5 FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

La función valor absoluto es una función real, definida por $f(x) = |x|$ ó $y = |x|$, esta función puede expresarse de la siguiente manera:

$$y = \begin{cases} \mathbf{x ; Si: \ x \geq 0} \\ \mathbf{-x ; Si: \ x < 0} \end{cases}$$

; está notación se interpreta como la unión de dos funciones, veamos:

$y = x$; **Si:** $x \geq 0$ $\cup$ $y = -x$; **Si:** $x < 0$

Tabulando:

x	y = x	Si: $x \geq 0$	
0	y = 0	(0; 0)	→ (cerrado)
1	y = 1	(1; 1)	→ (cerrado)
2	y = 2	(2; 2)	→ (cerrado)
⋮	⋮	⋮	

x	y = –x	Si: $x < 0$	
0	y = 0	(0; 0)	→ (abierto)
–1	y = –(–1)	(–1; 1)	→ (cerrado)
–2	y = –(–2)	(–2; 2)	→ (cerrado)
⋮	⋮	⋮	

Luego: $\begin{cases} \text{Dominio} = \mathbb{R} \\ \text{Rango} = [0\,;+\infty\rangle \end{cases}$

* **Graficar**, hallar el dominio y el rango de la función: $y = |x-2| + 1$

Resolución:

De la definición de valor absoluto: $|a| = \begin{cases} a\,;\ \text{si: } a \geq 0 \\ -a\,;\ \text{si: } a < 0 \end{cases}$

Obtenemos: $|x-2| = \begin{cases} (x-2)\,;\ \text{si: } (x-2) \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \\ -(x-2)\,;\ \text{si: } (x-2) < 0 \Rightarrow x < 2 \end{cases}$

Luego: $y = |x-2| + 1 = \begin{cases} (x-2)+1\,;\ \text{si: } x \geq 2 \\ -(x-2)+1\,;\ \text{si: } x < 2 \end{cases}$

ó $y = |x-2| + 1 = \begin{cases} x-1\,;\ \text{si: } x \geq 2 \\ -x+3\,;\ \text{si: } x < 2 \end{cases}$

La última notación se puede interpretar como la unión de dos funciones veamos:

$y = x - 1\ ;\ \textbf{Si: } x \geq 2 \ \cup\ y = -x + 3\ ;\ \textbf{Si: } x < 2$

x	y = x – 1	Si: $x \geq 2$	
2	y = 2 – 1 = 1	(2; 1)	→ (cerrado)
3	y = 3 – 1 = 2	(3; 2)	→ (cerrado)
4	y = 4 – 1 = 3	(4; 3)	→ (cerrado)
5	y = 5 – 1 = 4	(5; 4)	→ (cerrado)
⋮	⋮	⋮	

x	$y = -x + 3$	Si: $x < 2$
2	$y = -2 + 3 = 1$	(2; 1) → (abierto)
1	$y = -1 + 3 = 2$	(1; 2) → (cerrado)
0	$y = -0 + 3 = 3$	(0; 3) → (cerrado)
−1	$y = -(-1) + 3 = 4$	(−1; 4) → (cerrado)
⋮	⋮	⋮

Luego:

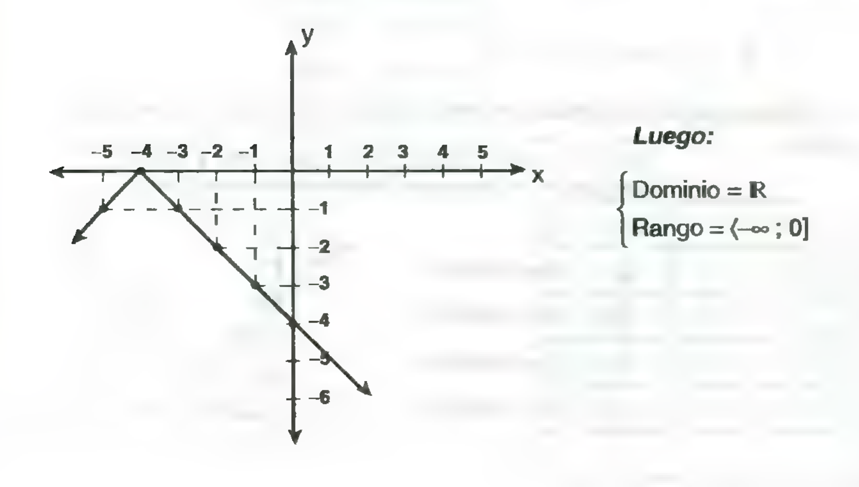
Dominio = $\mathbb{R}$ (conjunto de los números reales)
Rango = $[1 ; \infty\rangle$

* **Graficar**, hallar el dominio y el rango de la función: $y = -|x + 4|$

Resolución:

Este tipo de ejercicio se puede resolver, haciendo uso de la tabulación veamos:

x	$y = -\|x + 4\|$	*Pares Ordenados*
−5	$y = -\|-5 + 4\| = -\|-1\| = -1$	(−5; −1)
−4	$y = -\|-4 + 4\| = -\|0\| = 0$	(−4; 0)
−3	$y = -\|-3 + 4\| = -\|1\| = -1$	(−3; −1)
−2	$y = -\|-2 + 4\| = -\|2\| = -2$	(−2; −2)
−1	$y = -\|-1 + 4\| = -\|3\| = -3$	(−1; −3)
0	$y = -\|0 + 4\| = -\|4\| = -4$	(0; −4)
1	$y = -\|1 + 4\| = -\|5\| = -5$	(1; −5)
2	$y = -\|2 + 4\| = -\|6\| = -6$	(2; −6)



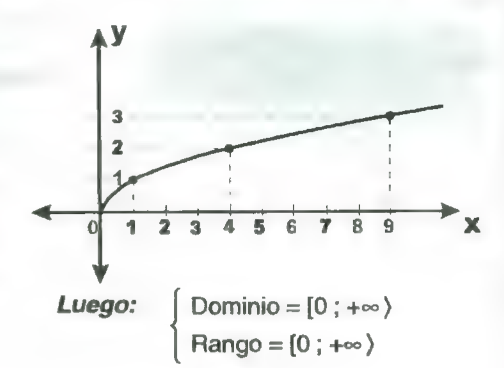
Luego:

Dominio = $\mathbb{R}$
Rango = $\langle -\infty ; 0]$

1.8.6 FUNCIÓN RAÍZ CUADRADA

Es la función definida por: $f(x) = \sqrt{x}$ ó $y = \sqrt{x}$; si: $x \geq 0$

x	$y = \sqrt{x}$	Si: $x \geq 0$
0	$y = \sqrt{0} = 0$	(0; 0)
1	$y = \sqrt{1} = 1$	(1; 1)
4	$y = \sqrt{4} = 2$	(4; 2)
9	$y = \sqrt{9} = 3$	(9; 3)
⋮	⋮	⋮



Luego: Dominio = $[0 ; +\infty\rangle$
Rango = $[0 ; +\infty\rangle$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 5

Ejercicio 1 : Grafica la función:

y = 3x - 1. Halla su dominio y su rango.

Resolución:

Ejercicio 2 : Grafica el par de rectas en un solo sistema de coordenadas.

$y = 2x + 3$ $y = x - 2$

Resolución:

Ejercicio 3 : Grafica la función:	**Ejercicio 4** : Grafica la función:
$y = \|x + 6\|$; Halla su dominio y su rango. ***Resolución:***	$y = 2\sqrt{x}$. Halla su dominio y su rango. ***Resolución:***

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE FUNCIONES ESPECIALES

I. Grafica las siguientes funciones

II. Halla el dominio y el rango de cada una de dichas funciones

a) $y = 6$	**b)** $y = 9$	**c)** $y = -4$
d) $y = -7$	**e)** $f(x) = 5$	**f)** $g(x) = -2$
g) $h(x) = 8$	**h)** $p(x) = -9$	

I. Grafica las siguientes funciones

II. Halla el dominio y el rango de cada una de dichas funciones

a) $y = 2x$	b) $y = -x$	c) $y = \dfrac{x}{2}$
d) $y = 3x$	e) $f(x) = -4x$	f) $g(x) = 5x$
g) $h(x) = -3x$	h) $q(x) = \dfrac{3x}{4}$	

Grafica cada función siguiente, halla su dominio y su rango

a) $y = 2x + 3$	b) $y = -x + 4$
c) $f(x) = 3x + 1$	d) $g(x) = -4x + 5$
e) $y = x - 2 \; ; x \in [-2; 2]$	f) $y = 2x + 1 \; ; x \in \langle 0; 3]$
g) $y = -x + 3 \; ; x \in \langle -3; 2]$	h) $y = x \; ; x \in \langle -6; 4 \rangle$
i) $y = \dfrac{1}{2}x - 4 \; ; x \in \langle -\infty ; 3]$	j) $y = \dfrac{3}{5}x \; ; x \in \langle -\infty ; 5 \rangle$
k) $f(x) = -3x + 2 \; ; x \in \langle -2; \infty \rangle$	l) $g(x) = \dfrac{2}{3}x - 1; x \in [-1; \infty \rangle$
m) $y = 3{,}6 \; ; x \in \langle -4; 5{,}2 \rangle$	

Grafica cada par de rectas en un solo sistema de coordenadas:

a) $\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = x + 3 \end{cases}$	b) $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$
c) $\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = -x + 2 \end{cases}$	d) $\begin{cases} y = 5x + 2 \\ y = 5x + 1 \end{cases}$
e) { y = —x − 2 ; $y = -4x - 2$ }	f) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x + 1 \\ y = -2x - 1 \end{cases}$
g) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{3}x - 1 \\ y = -3x + 4 \end{cases}$	h) $\begin{cases} y = \dfrac{2}{3}x + 2 \\ y = -\dfrac{3}{2}x + 1 \end{cases}$

Grafica cada función siguiente; hallar su dominio y su rango

a) $y = \lvert x + 1 \rvert$	b) $y = \lvert x - 3 \rvert$	c) $y = \lvert x + 4 \rvert$
d) $y = \lvert x - 5 \rvert$	e) $y = -\lvert x + 2 \rvert$	f) $y = -\lvert 3 - x \rvert$

g) $y = \lvert x + 3 \rvert + 2$	h) $y = \lvert x - 2 \rvert + 5$	i) $y = \lvert 3x - 1 \rvert + 2$
j) $y = 3 - \lvert x - 2 \rvert$	k) $y = 4 + \lvert x - 1 \rvert$	l) $y = \lvert x + 4 \rvert - 1$
m) $y = \lvert \frac{1}{2}x - 4 \rvert$	n) $y = \lvert \frac{1}{3}x + 1 \rvert - 2$	o) $y = -\lvert x + 1 \rvert - 4$
p) $y = 5 - \lvert x + 2 \rvert$		

Grafica cada función siguiente, hallar su dominio y su rango.

a) $y = \sqrt{2x}$	b) $y = \sqrt{3x}$	c) $y = \sqrt{4x}$
d) $y = 3\sqrt{x}$	e) $f(x) = -\sqrt{x}$	f) $g(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}$
g) $h(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x}$	h) $q(x) = -2\sqrt{x}$	

Clave de Respuestas

1.

a) $\begin{cases} D(y) = \mathbb{R} \\ R(y) = \{6\} \end{cases}$ a) $\begin{cases} D(y) = \mathbb{R} \\ R(y) = \{-4\} \end{cases}$

e) $\begin{cases} D(f) = \mathbb{R} \\ R(f) = \{5\} \end{cases}$ e) $\begin{cases} D(h) = \mathbb{R} \\ R(h) = \{8\} \end{cases}$

2.

a) $\begin{cases} \begin{cases} D(y) = \mathbb{N} \\ R(y) = \{0, 2, 4, 6, ...\} \end{cases} \\ \begin{cases} D(y) = \mathbb{Z} \\ R(y) = \{... -4, -2, 0, 2, 4, ...\} \end{cases} \\ \begin{cases} D(y) = \mathbb{R} \\ R(y) = \mathbb{R} \end{cases} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \begin{cases} R(y) = \{0, -1, -2, -3, ...\} \\ R(y) = \mathbb{N} \end{cases} \\ \begin{cases} D(y) = \mathbb{Z} \\ R(y) = \mathbb{Z} \end{cases} \\ \begin{cases} D(y) = \mathbb{R} \\ R(y) = \mathbb{R} \end{cases} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \begin{cases} D(y) = \{0, 2, 4, 6, ...\} \\ R(y) = \mathbb{N} \end{cases} \\ \begin{cases} D(y) = \{... -4, -2, 0, 2, 4, ...\} \\ R(y) = \mathbb{Z} \end{cases} \\ \begin{cases} D(y) = \mathbb{R} \\ R(y) = \mathbb{R} \end{cases} \end{cases}$ c) $\begin{cases} \begin{cases} D(y) = \mathbb{N} \\ R(y) = \{0, 3, 6, 9, ...\} \end{cases} \\ \begin{cases} D(y) = \mathbb{Z} \\ R(y) = \{... -6, -3, 0, 3, 6, ...\} \end{cases} \\ \begin{cases} D(y) = \mathbb{R} \\ R(y) = \mathbb{R} \end{cases} \end{cases}$

e) $\begin{cases} \begin{cases} D(f) = \{0, -1, -2, -3, ...\} \\ R(f) = \{0, 4, 8, ...\} \end{cases} \\ \begin{cases} D(f) = \mathbb{Z} \\ R(f) = \{... -8, -4, 0, 4, 8, ...\} \end{cases} \\ \begin{cases} D(f) = \mathbb{R} \\ R(f) = \mathbb{R} \end{cases} \end{cases}$

f) $\begin{cases} \begin{cases} D(g) = \mathbb{N} \\ R(g) = \{0, 5, 10, ...\} \end{cases} \\ \begin{cases} D(g) = \mathbb{Z} \\ R(g) = \{... -10, -5, 0, 5, 10, ...\} \end{cases} \\ \begin{cases} D(g) = \mathbb{R} \\ R(g) = \mathbb{R} \end{cases} \end{cases}$

g) $\begin{cases} \begin{cases} D(h) = \{0, -1, -2, ...\} \\ R(h) = \{0, 3, 6, ...\} \end{cases} \\ \begin{cases} D(h) = \mathbb{N} \\ R(h) = \{.... -3, 0, 3, ...\} \end{cases} \\ \begin{cases} D(h) = \mathbb{R} \\ R(h) = \mathbb{R} \end{cases} \end{cases}$

e) $\begin{cases} \begin{cases} D(q) = \{0, 4, 8, ...\} \\ R(q) = \{0, 3, 6, ...\} \end{cases} \\ \begin{cases} D(q) = \{... -8, -4, 0, 4, 8, ...\} \\ R(q) = \{... -6, -3, 0, 3, 6, ...\} \end{cases} \\ \begin{cases} D(q) = \mathbb{R} \\ R(q) = \mathbb{R} \end{cases} \end{cases}$

5. (a), (b), (c) y (d); tiene por dominio: $\mathbb{R}$ y por rango: $[0; +\infty\rangle$

e) $\begin{cases} D(y) = \mathbb{R} \\ R(y) = \langle -\infty ; 0] \end{cases}$ f) $\begin{cases} D(y) = \mathbb{R} \\ R(y) = \langle -\infty ; 0] \end{cases}$ g) $\begin{cases} D(y) = \mathbb{R} \\ R(y) = [2; \infty\rangle \end{cases}$

h) $\begin{cases} D(y) = \mathbb{R} \\ R(y) = [5; \infty\rangle \end{cases}$ i) $\begin{cases} D(y) = \mathbb{R} \\ R(y) = [3; \infty\rangle \end{cases}$ j) $\begin{cases} D(y) = \mathbb{R} \\ R(y) = \langle -\infty ; 3] \end{cases}$

k) $\begin{cases} D(y) = \mathbb{R} \\ R(y) = [4; \infty\rangle \end{cases}$ l) $\begin{cases} D(y) = \mathbb{R} \\ R(y) = [-1; \infty\rangle \end{cases}$ m) $\begin{cases} D(y) = \mathbb{R} \\ R(y) = [0; \infty\rangle \end{cases}$

n) $\begin{cases} D(y) = \mathbb{R} \\ R(y) = \langle -\infty ; 4] \end{cases}$ o) $\begin{cases} D(y) = \mathbb{R} \\ R(y) = \langle -\infty ; -4] \end{cases}$ p) $\begin{cases} D(y) = \mathbb{R} \\ R(y) = \langle -\infty ; 5] \end{cases}$

1.7.7 FUNCIÓN CUADRÁTICA

Una función cuadrática o de segundo grado, es una función real definida por: $f(x) = ax^2 + bx + c$; donde a, **b** y **c** son números reales con $a \neq o$. Son funciones cuadraticas; por ejemplo, las siguientes:

$y = 2x^2 + x + 3;$	$y = -\frac{1}{3}x^2 + 9$
$f(x) = 2x^2 - 1;$	$y = 4x^2$; etc.

Toda función cuadrática: $y = ax^2 + bx + c$; puede ser escrita de la forma: $(y - k) = E(x - h)^2$, con tan sólo **"completar cuadrados"**.

Ejemplo 1 : La función: $y = 2x^2 + 4x - 1$ puede ser escrita de la forma: $(y - k) = E(x - h)^2$ con tan sólo "completar cuadrados" para eso se siguen los siguientes pasos.

1. Procuramos que el coeficiente de x^2 sea **1** (uno positivo)

En nuestro ejemplo:

$$y = 2x^2 + 4x - 1$$

factorizamos sacando factor común 2 en los dos primeros términos que contienen a "x" así:

$$\boxed{y = 2(x^2 + 2x) - 1} \text{....... (I)}$$

2. Al coeficiente de "x" le sacamos su mitad y al resultado lo elevamos al cuadrado de la expresión **(I)**; obtenemos:

$$\boxed{y = 2(x^2 + \underline{2}x) - 1} \text{....... (II)}$$

mitad de 2 es 1

* **El cuadrado de 1 = 1^2 = 1**

3. Luego, sumamos y restamos el cuadrado hallado a los términos que contienen "x". Veamos:

$$y = 2(x^2 + 2x + \boxed{1} - 1) - \boxed{1}$$

$$y = 2[(x + 1)^2 - 1] - 1$$

$$y = 2(x + 1)^2 - 3$$

Toda expresión de la forma:

$$(y - k) = E(x - h)^2$$

Da origen a una **parábola** con las siguientes características:

Vértice **V**(h; **k**)

Si: **E > 0**, a parábola se abre hacia arriba

Si: **E < 0**, la parábola se abre hacia abajo

A medida que la parábola "avanza" hacia arriba o hacia abajo, va abriendose.

transponiendo términos, obtenemos:

$(y + 3) = 2(x + 1)^2$, esta expresión a tomado la forma:

$$(y - k) = E(x - h)^2$$

Donde: $\boxed{h = -1}$; $\boxed{k = -3}$ y $\boxed{E = 2} \Rightarrow \boxed{V(h; k) = V(-1; -3)}$

* Como: **E > 0** ; la parábola se abre hacia arriba

- Ahora tabulamos para saber por donde pasa la parábola veamos:

x	$y = 2x^2 + 4x - 1$	*Pares Ordenados*
0	$y = 2(0)^2 + 4(0) - 1 = -1$	**(0; –1)**
–1	$y = 2(-1)^2 + 4(-1) - 1 = -3$	**(–1; –3)**
–2	$y = 2(-2)^2 + 4(-2) - 1 = -1$	**(–2; –1)**
–3	$y = 2(-3)^2 + 4(-3) - 1 = 5$	**(–3; 5)**
1	$y = 2(1)^2 + 4(1) - 1 = 5$	**(1; 5)**
⋮	⋮ ⋮	⋮

Ejemplo 2 : Graficar, hallar su dominio y el rango de la función:

$$y = 3x^2 - 12x + 20$$

Resolución:

- En primer lugar completamos cuadrados para que la función dada tome la forma: $(y - k) = E(x - h)^2$; para lograrlo se siguen los siguientes pasos:

1. Procuramos que el coeficiente de x^2 sea +1, para lograrlo sacamos factor común 3, en los dos primeros términos que contienen a "x".

Así: $\boxed{y = 3(x^2 - 4x) + 20}$ .... **(I)**

2. Al coeficiente de "x" le sacamos la mitad y al resultado lo elevamos al cuadrado.

De la expresión **(I)**; obtenemos:

$$\boxed{y = 3(x^2 - 4x) + 20}$$

mitad de 4 es 2   * **El cuadrado de $2 = 2^2 = 4$**

3. Luego, sumamos y restamos el cuadrado hallado a los términos que contienen a "x", veamos:

$$y = 3[x^2 - 4x + \boxed{4} - \boxed{4}] + 20$$

$$y = 3[(x - 2)^2 - 4] + 20 \quad \rightarrow \quad y = 3(x - 2)^2 + 8$$

transponiendo términos, obtenemos:

$(y - 8) = 3(x - 2)^2$; esta expresión a tomado la forma:

$$(y - k) = E(x - h)^2$$

Donde: $h = 2$; $k = 8$ y $E = 3$ $\Rightarrow$ $V(h; k) = V(2; 8)$

* Como: **E > 0** ; la parábola se abre hacia arriba

- Ahora tabulamos para saber por donde pasa la parábola veamos:

x	$y = 3x^2 - 12x + 20$	*Pares Ordenados*
0	$y = 3(0)^2 - 12(0) + 20 = 20$	**(0; 20)**
–1	$y = 3(-1)^2 - 12(-1) + 20 = 35$	**(–1; 35)**
1	$y = 3(1)^2 - 12(1) + 20 = 11$	**(1; 11)**
–2	$y = 3(-2)^2 - 12(-2) + 20 = 56$	**(–2; 56)**
2	$y = 3(2)^2 - 12(2) + 20 = 8$	**(2; 8)**
3	$y = 3(3)^2 - 12(3) + 20 = 11$	**(3; 11)**
⋮	⋮ ⋮	⋮

y
11
8
V(2; 8)
1 2 3
x

Luego: $\begin{cases} \text{Dominio} = \mathbb{R} = \langle -\infty ; +\infty \rangle \\ \text{Rango} = [8 ; +\infty \rangle \end{cases}$

Ejemplo 3 : Graficar, hallar el dominio y el rango de la función:

$$y = -2x^2 - 6x + 11$$

Resolución:

- Completamos cuadrados:

1. Sacamos factor común –2, en los dos primeros términos que contienen a "x" así:

$$\boxed{y = -2(x^2 + 3x) + 11} \text{ .... (I)}$$

2. Al coeficiente de "x" le sacamos su mitad y al resultado lo elevamos al cuadrado.

De la expresión (I), obtenemos:

$$\boxed{y = -2(x^2 + 3x) + 11} \text{ .... (II)}$$

mitad de 3 es 3/2

* **El cuadrado de** $\frac{3}{2}$ es $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

3. Luego, sumamos y restamos el cuadrado hallado a los términos que contienen a "x", veamos:

$$y = -2\left(x^2 + 3x + \boxed{\frac{9}{4}} - \boxed{\frac{9}{4}}\right) + 11$$

$$y = -2\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right] + 11 \Rightarrow y = -2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{18}{4} + 11$$

transponiendo términos obtenemos:

$$y - \frac{18}{4} - 11 = -2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow y - \frac{62}{4} = -2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2$$

$$y - \frac{31}{2} = -2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2$$; esta última expresión ha tomado la forma:

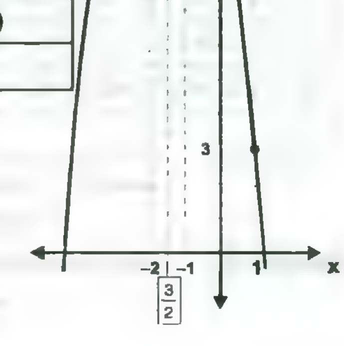
$$(y-k) = E\,(x-h)^2$$

Donde: $\boxed{h = -\frac{3}{2}}$; $\boxed{k = \frac{31}{2}}$ y $\boxed{E = -2}$ $\Rightarrow V(h;k) = V\left(-\frac{3}{2};\frac{31}{2}\right)$

* Como: **E** < **0** ; la parábola se abre hacia abajo

- Ahora tabulamos para saber por donde pasa la parábola, veamos:

x	$y = -2x^2 - 6x + 11$	***Pares Ordenados***
0	$y = -2(0)^2 - 6(0) + 11 = 11$	**(0; 11)**
–1	$y = -2(-1)^2 - 6(-1) + 11 = 15$	**(–1; 15)**
–2	$y = -2(-2)^2 - 6(-2) + 11 = 15$	**(–2; 15)**
1	$y = -2(1)^2 - 6(1) + 11 = 3$	**(1; 3)**
2	$y = -2(2)^2 - 6(2) + 11 = -9$	**(2; –9)**
⋮	⋮ ⋮	



Luego:
$$\begin{cases} \text{Dominio} = \mathbb{R} = \langle -\infty ; +\infty \rangle \\ \text{Rango} = \langle -\infty ; 31/2] \end{cases}$$

Ejemplo 4 : Graficar, hallar el dominio y el rango de la función:

$$y = -4x^2 - 8x - 9$$

Resolución:

* Completamos cuadrados de la siguiente manera:

1. $y = -4x^2 - 8x - 9 \;\rightarrow\; y = -4(x^2 + 2x) - 9$

2. $y = -4(x^2 + 2x) - 9$

mitad de 2 es 1

* **El cuadrado 1 = 1^2 = 1**

3. $y = -4[x^2 + 2x + \boxed{1} - \boxed{1}] - 9$

$y = -4[(x+1)^2 - 1] - 9 \;\Rightarrow\; y = -4(x+1)^2 - 5$

transponiendo términos, obtenemos:

$(y + 5) = -4(x + 1)^2$; esta expresión tiene la forma:

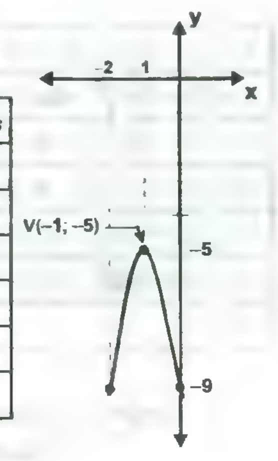
$(y - k) = E(x - h)^2$

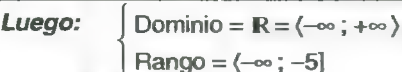
Donde: h = -1 ; k = -5 y E = –4 ⇒ V(h; k) = V (–1; –5)

* Como: **E < 0** ; la parábola se abre hacia abajo

- Ahora tabulamos para saber por donde pasa la parábola, veamos:

x	$y = -4x^2 - 8x - 9$	***Pares Ordenados***
0	$y = -4(0)^2 - 8(0) - 9 = -9$	**(0; –9)**
–1	$y = -4(-1)^2 - 8(-1) - 9 = -5$	**(–1; –5)**
–2	$y = -4(-2)^2 - 8(-2) - 9 = -9$	**(–2; –9)**
1	$y = -4(1)^2 - 8(1) - 9 = -21$	**(1; –21)**
2	$y = -4(2)^2 - 8(2) - 9 = -41$	**(2; –41)**
⋮	⋮ ⋮	⋮





Luego: Dominio = ℝ = ⟨–∞ ; +∞⟩
Rango = ⟨–∞ ; –5]

Ejemplo 5 : Graficar, hallar el dominio y el rango de la función:

$$y = -3x^2 - 2x + 5 \; ; \; x \in [-2; 3\rangle$$

Resolución:

La función: $y = -3x^2 - 2x + 5$, sólo está definida para: $\underbrace{-2 \leq x}_{\text{cerrado}} \overbrace{< 3}^{\text{abierto}}$

- Ahora, hallamos los puntos extremos para cuando: **x = –2 (cerrado)** y para cuando: **x = 3 (abierto)**

Cuando: $\mathbf{x = -2}$ $\Rightarrow$ $y = -3(-2)^2 - 2(-2) + 5 = -3$ $\Rightarrow$ $(-2; -3)$ $\Rightarrow$ **(cerrado)**

Cuando: $\mathbf{x = 3}$ $\Rightarrow$ $y = -3(3)^2 - 2(3) + 5 = -28$ $\Rightarrow$ $(3; -28)$ $\Rightarrow$ **(abierto)**

- En la función: $y = -3x^2 - 2x + 5$, completamos cuadrados para asi hallar el vértice de la parábola.

$$y = -3x^2 - 2x + 5 \;\div\; y = -3\left[x^2 + \frac{2}{3}x\right] + 5$$

Su mitad de $= \dfrac{2}{3} = \dfrac{\frac{2}{3}}{2} = \dfrac{1}{3}$

* **El cuadrado de** $\dfrac{1}{3} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9}$

- Sumamos y restamos $\dfrac{1}{9}$ a la expresión encerrada entre llaves

$$y = -3\left[x^2 + \frac{2}{3}x + \boxed{\frac{1}{9}} - \boxed{\frac{1}{9}}\right] + 5$$

$$y = -3\left[\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right] + 5 \Rightarrow y = -3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{3}{9} + 5$$

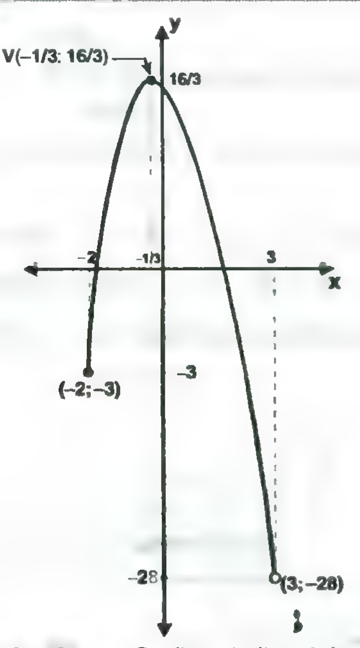
Transponiendo términos, obtenemos:

$$y - \frac{3}{9} - 5 = -3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow y - \frac{16}{3} = -3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2$$; esta última expresión tiene la forma :

$$(y - k) = E(x - h)^2$$

Donde: $h = -\dfrac{1}{3}$; $k = \dfrac{16}{3}$ y $E = -3$ $\Rightarrow$ $\boxed{V\,(h;\,k) = V\left(-\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{16}{3}\right)}$

* **Luego, graficamos:**



Luego:

$$\begin{cases} \text{Dominio} = [-2\ ;\ 3\rangle \\ \text{Rango} = \langle -28\ ;\ 16/3] \end{cases}$$

Ejemplo 6 : Graficar, hallar el dominio y el rango de la función:

$$y = 3x^2\ ;\ x \in [-2; \infty\rangle$$

Resolución:

La función: $y = 3x^2$, sólo está definida para: $\underbrace{-2 \le x}_{\text{cerrado}}$ $\overbrace{x < \infty}^{\text{abierto}}$

- Ahora, hallamos los puntos extremos para cuando: **x = –2 (cerrado)** y para cuando **x** tiende a ∞ **(abierto)**

Cuando: $x = -2 \Rightarrow y = 3(-2)^2 = 12 \Rightarrow (-2; 12) \Rightarrow$ **(cerrado)**

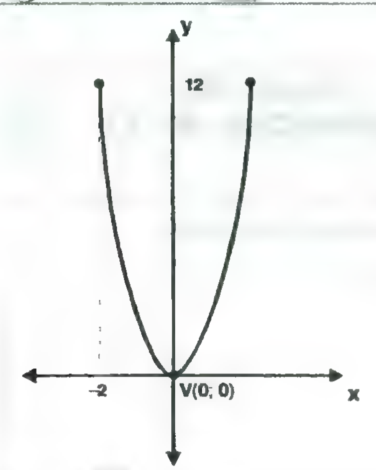
Cuando: $x \to \infty \Rightarrow y = 3(\infty)^2 = \infty \Rightarrow \langle\infty; \infty\rangle \Rightarrow$ **(abierto)**

- En la función:

$y = 3x^2$, le damos la forma: $(y - k) = E(x - h)^2$, veamos: $(y - 0) = 3(x - 0)^2$

Donde: $h = 0$; $k = 0$ y $E = 3 \Rightarrow$ $\boxed{V(h; k) = V(0; 0)}$

*** Luego, graficamos:**



Luego:

$$\begin{cases} \text{Dominio} = [-2\,;\,\infty\rangle \\ \text{Rango} = [0\,;\,\infty\rangle \end{cases}$$

Ejemplo 7 : Graficar, hallar el dominio y el rango de la función:

$$y = -2x^2\,;\; x \in \langle -\infty; 4\rangle$$

Resolución:

La función: $y = -2x^2$, sólo está definida para: $\underbrace{-\infty <}_{\text{abierto}} \overbrace{x < 4}^{\text{abierto}}$

- Ahora, hallamos los puntos extremos para cuando:

Cuando: $x \to -\infty \;\Rightarrow\; y = -2(-\infty)^2 = -\infty \;\Rightarrow\; (-\infty; -\infty) \;\Rightarrow$ **(abierto)**

Cuando: $x = 4 \;\Rightarrow\; y = -2(4)^2 = -32 \;\Rightarrow\; (4; -32) \;\Rightarrow$ **(abierto)**

- A la función: $y = -2x^2$, le damos la forma:

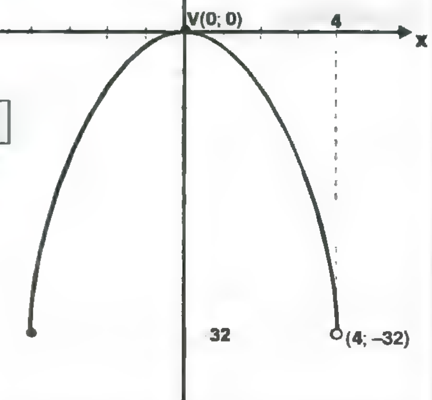
$(y - k) = E(x - h)^2$, veamos:

$(y - 0) = -2(x - 0)^2$

Donde: $\boxed{h = 0}$; $\boxed{k = 0}$ y $\boxed{E = -2}$

$\therefore\; \boxed{V(h; k) = V(0; 0)}$

*** Luego, graficamos:**



$$\begin{cases} \text{Dominio} = \langle -\infty; 4\rangle \\ \text{Rango} = \langle -\infty; 0] \end{cases}$$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 6

Ejercicio 1 : Graficar. Hallar su dominio y el rango de la función:

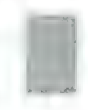
$$y = 2x^2 - 4x + 5$$

Resolución:

Ejercicio 2 : Graficar. Hallar su dominio y el rango de la función:

$$y = -3x^2 - 6x - 8$$

Resolución:



EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE FUNCIONES CUADRÁTICAS

En cada ejercicio

I) Hallar el vértice de la parábola y ubícalo en el sistema e coordenadas

II) Halla el valor de "y" en cada una de las ecuaciones dadas sustituyendo "x" por el 0, ubica este nuevo punto en el sistema de coordenadas y realiza la gráfica de la parábola.

- **a)** $(y-2)=3(x+4)^2$
- **b)** $(y-3)=2(x+1)^2$
- **c)** $(y+6)=5(x-3)^2$
- **d)** $(y+4)=\frac{1}{3}(x-1)^2$
- **e)** $(y+1)=-2(x-3)^2$
- **f)** $(y-6)=-4(x+2)^2$
- **g)** $(y-0)=\frac{1}{2}(x-7)^2$
- **h)** $(y+4)=-\frac{1}{5}(x-1)^2$
- **i)** $(y+8)=-\frac{1}{4}(x+6)^2$
- **j)** $(y-0)=2(x+5)^2$
- **k)** $(y+9)=(x-6)^2$
- **l)** $(y-1)=-4(x+1)^2$

Grafica cada función siguiente, hallar su dominio y rango:

- **a)** $y=5x^2$
- **b)** $y=-4x^2$
- **c)** $y=\frac{1}{3}x^2$
- **d)** $y=-\frac{1}{2}x^2$
- **e)** $y=x^2+5$
- **f)** $y=x^2-4x+3$
- **g)** $y=x^2+6x+8$
- **h)** $y=x^2-4x$
- **i)** $y=-x^2-2x+5$
- **j)** $y=-x^2+2x+4$
- **k)** $y=2x^2-4x+13$
- **l)** $y=-2x^2-6x-5$
- **m)** $y=3x^2+6x-10$
- **n)** $y=-4x^2-2x+9$
- **o)** $y=6x^2+3x-2$

Grafica cada función siguiente, hallar su dominio y rango:

- **a)** $y=x^2+8x-10\ ;\ x\in[0;5\rangle$
- **b)** $y=x^2+12x+4\ ;\ x\in[-4;-2\rangle$
- **c)** $y=-x^2-20x-6\ ;\ x\in\langle-3;1\rangle$
- **g)** $y=\frac{1}{3}x^2-4x-2\ ;\ x\in\langle-4;2]$
- **h)** $y=-x^2+6x-4\ ;\ x\in\langle-3;-3\rangle$
- **i)** $y=-x^2+1\ ;\ x\in[-3;2]$

d) $y = 2x^2 - 12x - 5$; $x \in \langle 2 ; 4 \rangle$	j) $y = -x^2 + 6$; $x \in \langle -4; 1]$
e) $y = -3x^2 + 2x - 1$; $x \in \langle -3 ; \infty \rangle$	k) $y = 5x^2$; $x \in [-5; \infty \rangle$
f) $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$; $x \in \langle -\infty ; 0]$	l) $y = -4x^2$; $x \in \langle -\infty; 2 \rangle$

Clave de Respuestas

1.
- **a)** V(–4;2) ; Punto(0;50)
- **b)** V(–1;3) ; Punto (0,5)
- **c)** V(3;–6); Punto (0,39)
- **d)** V(1;–4); Punto (0,–11/3)
- **e)** V(3;–1) ; Punto (0;–19)
- **f)** V(–2;6); Punto (0;–10)
- **g)** V(7;0); Punto (0; 49/2)
- **h)** V((1;–4) ;Punto (0; – 21/5)
- **i)** V(–6;–8) ;Punto (0;–17)
- **j)** V(–5;0); Punto (0;50)
- **k)** V(6;–9); Punto(0;27)
- **l)** B(–1;1); Punto(0;–3)

2.
- **a)** Dominio = $\mathbb{R}$; Rango = $[0 ; \infty \rangle$
- **b)** Dominio = $\mathbb{R}$; Rango = $\langle -\infty ; 0]$
- **c)** Dominio = $\mathbb{R}$; Rango = $[0; \infty \rangle$
- **d)** Dominio = $\mathbb{R}$; Rango = $\langle -\infty; 0]$
- **e)** Dominio = $\mathbb{R}$; Rango = $[5; \infty \rangle$
- **f)** Dominio = $\mathbb{R}$; Rango = $[-1; \infty \rangle$
- **g)** Dominio = $\mathbb{R}$; Rango = $[-1; \infty \rangle$
- **h)** Dominio = $\mathbb{R}$; Rango = $[2; \infty \rangle$
- **i)** Dominio = $\mathbb{R}$; Rango = $\langle -\infty ; 6]$
- **j)** Dominio = $\mathbb{R}$; Rango = $\langle -\infty; 5]$
- **k)** Dominio = $\mathbb{R}$; Rango = $[11; \infty \rangle$
- **l)** Dominio = $\mathbb{R}$; Rango = $\langle -\infty ; -1/2]$
- **m)** Dominio = $\mathbb{R}$; Rango = $[-13; \infty \rangle$
- **n)** Dominio = $\mathbb{R}$; Rango = $\langle -\infty ; 37/4]$
- **o)** Dominio = $\mathbb{R}$; Rango = $[-19/8; \infty \rangle$

3.
- **a)** Dominio = $[0 ; 5 \rangle$; Rango = $[-10 ; 55 \rangle$
- **b)** Dominio = $[-4; -2]$; Rango = $[-28; -16]$
- **c)** Dominio = $\langle -3; 1 \rangle$; Rango = $\langle -27; 45 \rangle$
- **d)** Dominio = $\langle 2; 4 \rangle$; Rango = $[-23 ; -21 \rangle$
- **e)** Dominio = $\langle -3; \infty \rangle$; Rango = $\langle -\infty; -2/3 \rangle$
- **f)** Dominio = $\langle -\infty; 0]$; Rango = $[2; \infty \rangle$
- **g)** Dominio = $[-4; 2]$; Rango = $[58/3; -26/3]$
- **h)** Dominio = $\langle -3; 3 \rangle$; Rango = $\langle -31; 5 \rangle$
- **i)** Dominio = $[-3; 2]$; Rango = $[-8; 1]$
- **j)** Dominio = $\langle -4; 1]$; Rango = $\langle -10; 6 \rangle$
- **k)** Dominio = $[-5; \infty \rangle$; Rango = $[0; \infty \rangle$
- **l)** Dominio = $\langle -\infty; 2 \rangle$; Rango = $\langle -\infty ; 0]$

EJERCICIOS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA

Organizados por las Academias:
César Vallejo, Trilce, Pitágoras, Sigma, Alfa.

1. Si: $F(x) = 6x - 5$; calcular: $E = \dfrac{F(1) + F(2)}{F(0)}$

A) $\frac{5}{8}$ **B)** 5 **C)** $\frac{8}{5}$ **D)** $-\frac{5}{8}$ **E)** $-\frac{8}{5}$

Resolución:

De la condición: $F(x) = 6x - 5$

Calculamos: $F(1) = 6(1) - 5 \Rightarrow F(1) = 1$

$F(2) = 6(2) - 5 \Rightarrow F(2) = 7$

$F(0) = 6(0) - 5 \Rightarrow F(0) = -5$

Luego: $E = \dfrac{F(1) + F(2)}{F(0)} = \dfrac{1 + 7}{-5} = -\dfrac{8}{5} \Rightarrow \therefore\ E = -\dfrac{8}{5}$ ***Rpta. E***

2. Si: $F(x) = 2x + 1$ y $F(3x + 1) = 9$; hallar el valor de "x"

A) 2 **B)** 1 **C)** 0 **D)** 3 **E)** –2

Resolución:

De la condición: $F(\boxed{x}) = 2\boxed{x} + 1$

Calculamos: $F(\boxed{3x + 1}) = 2(\boxed{3x + 1}) + 1$

$9 = 6x + 2 + 1 \Rightarrow 6 = 6x \Rightarrow \therefore\ x = 1$ ***Rpta. B***

3. Si: $F(x) = 3x^2 - 1$; Hallar el valor de: $\dfrac{F(5) + F(2)}{F(\sqrt{6})}$

A) 25 **B)** 10 **C)** 8 **D)** 5 **E)** 1

Resolución:

De la condición: $F(x) = 3x^2 - 1$

Calculamos: $F(5) = 3(5)^2 - 1 \Rightarrow F(5) = 74$

$$F(2)=3(2)^2-1 \Rightarrow \boxed{F(2)=11}$$

$$F(\sqrt{6})=3(\sqrt{6})^2-1 \Rightarrow \boxed{F(\sqrt{6})=17}$$

Luego: $\dfrac{F(5)+F(2)}{F(\sqrt{6})}=\dfrac{74+11}{17}=\dfrac{85}{17}=5 \Rightarrow \therefore \boxed{\dfrac{F(5)+F(2)}{F(\sqrt{6})}=5}$ ***Rpta. D***

4 Si: $F(x)=2x+1$; Hallar: $F(F(F(2)))$

A) 23 B) 11 C) 5 D) 47 E) 13

Resolución:

De la condición: $F(x)=2x+1$

Calculamos: $F(1)=2(2)+1 \Rightarrow \boxed{F(2)=5}$

Incógnita: $\boxed{F(F(F(2)))=F(F(5))}$ .... **(I)**

De la condición: $F(x)=2x+1$

Calculamos: $F(5)=2(5)+1 \Rightarrow \boxed{F(5)=11}$

El valor hallado, lo reemplazamos en **(I)**:

Incógnita: $\boxed{F(F(F(2)))=F(F(5))=F(11)}$ .... **(II)**

De la condición: $F(x)=2x+1$

Calculamos: $F(11)=2(11)+1 \Rightarrow \boxed{F(11)=23}$

El valor hallado, lo reemplazamos en **(II)**:

Incógnita: $F(F(F(2)))=F(F(5))=F(11)=23$

$\therefore \boxed{F(F(F(2)))=23}$ ***Rpta. A***

5 Si: $F(x)=5x-3$; $G(x)=3x-4$; hallar: $F(G(2))$

A) -7 B) -3 C) 3 D) 2 E) 7

Resolución:

De la condición: $G(x) = 3x - 4$

Calculamos: $G(2) = 3(2) - 4 \Rightarrow \boxed{G(2) = 2}$

Incógnita: $\boxed{F(G(2)) = F(2)}$ .... **(I)**

De la condición: $F(x) = 5x - 3$

Calculamos: $F(2) = 5(2) - 3 \Rightarrow \boxed{F(2) = 7}$

El valor hallado lo reemplazamos en **(I)**:

$$F(G(2)) = F(2) = 7$$

$\therefore$ $\boxed{F(G(2)) = 7}$ ***Rpta. E***

6 Dado los conjuntos: $A = \{x / x \in \mathbb{N} \wedge 1 < x < 6\}$

$B = \{x / x \in \mathbb{N} \wedge 2 < x < 5\}$

Cuál de los siguientes relaciones representa una función de "Á" en "B"

A) $F = \{(2;3), (2;4), (3;4), (4;4)\}$ **B)** $F = \{(2;3), (3;4), (4;4), (4;3)\}$
C) $F = \{(2;4), (3;4), (4;3), (5;3)\}$ **D)** $F = \{(2;4), (3;3), (5;3), (5;4)\}$
E) $F = \{(2;3), (2;4), (3;3), (3;4)\}$

Resolución:

- Hallamos los elementos del conjunto **A**.

$A = \{x / x \in \mathbb{N} \wedge 1 < x < 6\}$ — "x" toma los valores de: 2, 3, 4 y 5

$\therefore$ $\boxed{A = \{2, 3, 4, 5\}}$

- Hallamos los elementos del conjunto **B**.

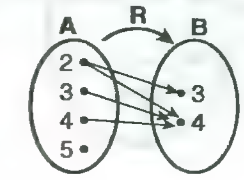
$B = \{x / x \in \mathbb{N} \wedge 2 < x < 5\}$ — "x" toma los valores de: 3 y 4

$\therefore$ $\boxed{B = \{3, 4\}}$

Luego, analizamos cada una de las alternativas, veamos:

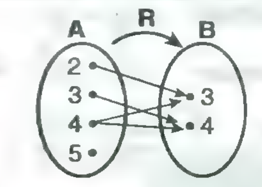
a) $F = \{(2;3), (2;4), (3;4), (4;4)\}$

(No es una Función) *Porque del elemento 2 salen dos flechas*



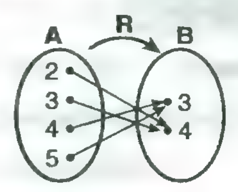
b) F = {(2;3), (3;4), (4;4), (4;3)}

(No es una Función)
Porque del elemento 4 salen dos flechas



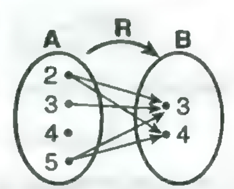
c) F = {(2;4), (3;4), (4;3), (5;3)}

(Sí es una Función)
Porque de cada elemento del dominio sale una sola flecha



d) F = {(2;4), (3;3), (5;3), (5;4)}

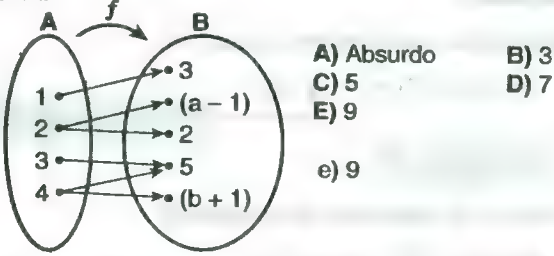
(No es una Función)
Porque del elemento 5 salen dos flechas



∴ De las relaciones dadas, la que representa una función de "A" en "B" es la alternativa c

Rpta. C

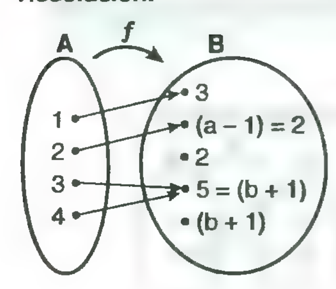
7 Si el siguiente diagrama sagital, representa a una función de "A" en "B", calcular: E = a + b



A) Absurdo **B)** 3
C) 5 **D)** 7
E) 9

e) 9

Resolución:



Como se ha dicho anteriormente, para saber si un diagrama sagital representa una función, de cada elemento del dominio tan solo debe salir una flecha.

Luego, para que cumpla esto:

$$(a-1)=2 \Rightarrow \therefore \boxed{a=3}$$

De igual manera:

$$5=b+1 \Rightarrow \therefore \boxed{b=4}$$

* Ahora hallamos el valor de: $E = a + b = 3 + 4 \Rightarrow \therefore$ $E = 7$ *Rpta. D*

8 Cuál es el rango de la función:

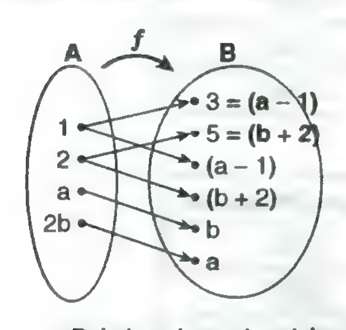
$$F = \{(1;3), (2;5), (1; a-1), (2; b+2), (a;b), (2b;a)\}$$

Señale la suma de sus elementos.

A) 15 B) 12 C) 10 D) 9 E) 16

Resolución:

Los pares ordenados , dados lo llevamos a un diagrama sagital.



Para que sea una función, debe cumplirse que:

i) $3 = a - 1 \Rightarrow \therefore$ $a = 4$

ii) $5 = b + 2 \Rightarrow \therefore$ $b = 3$

⊙ Los elementos del rango son:

Rango = {3; 5; a} = {3; 5; 4}

$\therefore$ Σ de los elementos del rango es: $3 + 5 + 4 = 12$ *Rpta. B*

9 Dada la función: $y = f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

Cuál es el valor de: $k = f(0) + f(1) + f(2)$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Resolución:

De la expresión: $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

Calculamos: $f(0) = 2(0)^2 - 3(0) + 1 \Rightarrow$ $f(0) = 1$

$f(1) = 2(1)^2 - 3(1) + 1 \Rightarrow$ $f(1) = 0$

$f(2) = 2(2)^2 - 3(2) + 1 \Rightarrow$ $f(2) = 3$

Luego: $k = f(0) + f(1) + f(2) = 1 + 0 + 3 = 4$

$\therefore$ $k = 4$ *Rpta. D*

10 Los gráficos de las funciones: $f(x) = 3x - 2$ y $g(x) = 3 - 2x$; se intersectan en el punto:

A) (1;1) B) (2;3) C) (1;2) D) (2;1) E) (-1;2)

Resolución:

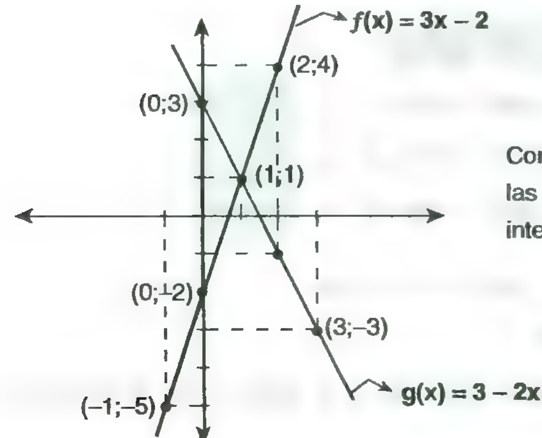
Por tabulación:

x	$f(x) = 3x - 2$	***Pares Ordenados***
0	$f(0) = 3(0) - 2 = -2$	**(0;–2)**
1	$f(1) = 3(1) - 2 = 1$	**(1;1)**
2	$f(2) = 3(2) - 2 = 4$	**(2;4)**
3	$f(3) = 3(3) - 2 = 7$	**(3;7)**
–1	$f(-1) = 3(-1) - 2 = -5$	**(–1;–5)**
–2	$f(-2) = 3(-2) - 2 = -8$	**(–2;–8)**

Por tabulación:

x	$g(x) = 3 - 2x$	***Pares Ordenados***
0	$g(0) = 3 - 2(0) = 3$	**(0;3)**
1	$g(1) = 3 - 2(1) = 1$	**(1;1)**
2	$g(2) = 3 - 2(2) = -1$	**(2;–1)**
3	$g(3) = 3 - 2(3) = -3$	**(3;–3)**
–1	$g(-1) = 3 - 2(-1) = 5$	**(–1;5)**
–2	$g(-2) = 3 - 2(-2) = 7$	**(–2;7)**

Construyendo los gráficos, obtenemos:



Como se podrá observar los dos gráficos las funciones: $f(x) = 3x - 2$ y $g(x) = 3 - 2x$ intersectan en el punto **(1;1)**

Otro Método:

Para este metodo igualamos las expresiones; veamos:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 3x - 2 \\ g(x) = 3 - 2x \end{array}\right\} \Rightarrow 3x - 2 = 3 - 2x \Rightarrow 5x = 5 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 1}$$

Este valor de **x = 1**; lo reemplazamos en cualquiera de las dos expresiones.

Para: $\boxed{x = 1} \Rightarrow f(x) = 3x - 2 \Rightarrow f(1) = 3(1) - 2 = \boxed{1}$

Para: $\boxed{x = 1} \Rightarrow g(x) = 3 - 2x \Rightarrow g(1) = 3 - 2(1) = \boxed{1}$

$\therefore$ Los gráficos de las funciones: $f(x) = 3x - 2$; y $g(x) = 3 - 2x$; se intersectan en el punto (1;1) ***Rpta. A***

11 Siendo **g** una función lineal que cumple: $g(2) = 14$ y $g(-2) = 8$. Calcular el g(9)

A) 24,5 **B)** 24 **C)** 23 **D)** 22 **E)** 0

Resolución:

Una función lineal es de la forma: $\boxed{g(x) = ax + b}$

Luego; calculamos: $g(2) = a \cdot 2 + b$

$$\boxed{14 = 2a + b} \quad \text{........... (I)}$$

También calculamos: $g(-2) = a \cdot (-2) + b$

$$\boxed{8 = -2a + b} \quad \text{........... (II)}$$

Sumamos miembro a miembro, las ecuaciones **(I)** y **(II)**:

$$\begin{cases} 14 = 2a + b \\ 8 = -2a + b \end{cases}$$

Σ M.A.M: $22 = b \Rightarrow \therefore \boxed{b = 11}$

El valor de **b = 11**, lo reemplazamos en **(I)**:

$$14 = 2a + 11 \Rightarrow 3 = 2a \Rightarrow \therefore \boxed{a = 3/2}$$

De la expresión: $g(x) = ax + b$

Calculamos: $g(9) = \frac{3}{2}(9) + 11 = \frac{49}{2} = 24{,}5 \Rightarrow \therefore \; g(9) = 24{,}5$

Rpta. A

12 Si: $F(x) = 3x^2 - 2$; calcular el valor de: $E = F(2)^{F(0)^{F(-1)}}$

A) 1 B) 10 C) 100 D) 1/10 E) 1/100

Resolución:

De la condición: $F(x) = 3x^2 - 2$

Calculamos:

$$F(2) = 3(2)^2 - 2 \Rightarrow \boxed{F(2) = 10}$$

$$F(0) = 3(0)^2 - 2 \Rightarrow \boxed{F(0) = -2}$$

$$F(-1) = 3(-1)^2 - 2 \Rightarrow \boxed{F(-1) = 1}$$

Luego, reemplazamos los valores hallados en la expresión "E":

$$E = 10^{-2^{1}} = 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} \Rightarrow \therefore \boxed{E = \frac{1}{100}}$$ ***Rpta. E***

13 En los siguientes conjuntos existe uno que es función, proporcione su dominio.

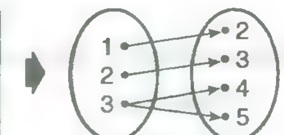
f = {(1;2), (2;3), (3;4), (3;5)} g = {(2;3), (3;5), (4;5), (2;2)}
h = {(3;1), (4;1), (5;1), (6;1)}

A) {1, 2, 3} B) {2, 3, 4} C) {1}
D) {2, 3, 4, 5} E) {3, 4, 5, 6}

Resolución:

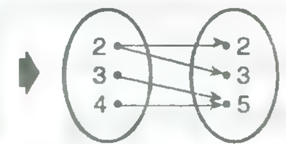
f = {(1;2), (2;3), (3;4), (3;5)}

(No es una Función)
Porque del elemento 3 del conjunto de partida salen dos flechas



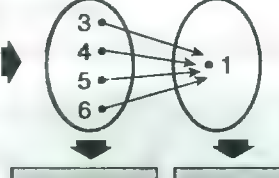
g = {(2;3), (3;5), (4;5), (2;2)}

(No es una Función)
Porque del elemento 2 del conjunto de partida salen dos flechas



$h = \{(3;1), (4;1), (5;1), (6;1)\}$

(Si es una Función)
Porque de cada elemento de partida sale una sola flecha



∴ Dominio de la función h = {3, 4 , 5, 6}

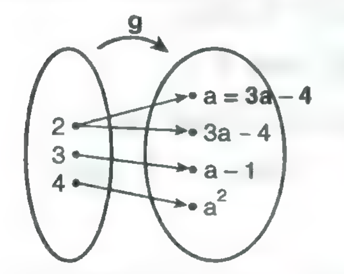
Rpta. E

14 Reconocer el rango de la función: $g = \{(2;a), (2; 3a - 4), (3; a - 1), (4;a^2)\}$

A) {2, 3, 4} **B)** {2, 3} **C)** {1, 2, 4} **D)** {1, 2} **E)** {3, 4}

Resolución:

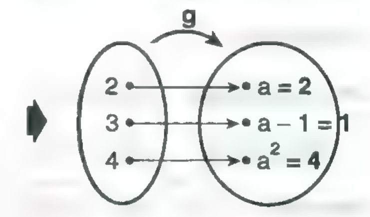
Los pares ordenados de la función **g** los llevamos a un diagrama sagital



Por definición de función:

$a = 3a - 4 \Rightarrow 4 = 2a \Rightarrow \therefore \boxed{a = 2}$

Luego, hallamos los elementos del rango, reemplazando el valor de **a = 2** ; veamos:



∴ El rango de la función g = {1, 2, 4}

Rpta. C

15 Calcule el rango de la función:

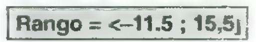
$f(x) = 1,5x - 1$; $\forall$ x ∈ < –7; 11]

A) Rf = <-11 ; 5]
B) Rf = <-2 ; 8]
C) Rf = [-23/5 ; -5]
D) Rf = <-11.5 ; 15,5]
E) Rf = φ

Resolución:

Por tabulación:

x ∈ < –7; 11]	$f(x) = y = 1,5x - 1$	
–7	y = 1,5(–7) – 1 =	–11,5
–6	y = 1,5(–6) – 1 =	–10
–5	y = 1,5(–5) – 1 =	–8,5
⋮	⋮	⋮
11	y = 1,5(11) – 1 =	15,5



∴ Rf = <-11.5 ; 15,5]

Rpta. D

16 Si se tienen los conjuntos A y B de números tales que:

$$A = \{2, 3, 5\} \wedge B = \{9, 10, 27, 30\}$$

y se establece entre A y B las relación: **".... divisor de ....."** se tendrá

$\mathbb{R} = \{(2;10), (2;30), (3;9), (3;27), ...\}$, señale un par ordernado

A) {2, 6} **B)** {30} **C)** {0, -30} **D)** {4, 27} **E)** {5, 30}

Resolución:

$A \times B = \{2, 3, 5\} \times \{9, 10, 27, 30\}$

$A \times B = \{(2;9), (2;10), (2;27), (2;30), (3;9), (3;10), (3;27), (3;30), (5;9), (5;10), (5;27), (5;30)\}$

En segundo lugar hallamos la relación: **"......... divisor ......"**

$\mathbb{R} = \{(2;10), (2;30), (3;9), (3;27), (3;30), (5;10), (5;30)\}$

$\therefore$ El par ordenado pedido es: (5 ; 30) ***Rpta. E***

17 Si: $f(a) = a - 2$; $f(a;b) = b^2 + a$; entonces: $f(3; f(4))$; es:

A) a^2-4a + 7 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 11 **E)** 28

Resolución:

De la condición: $f(a) = a - 2$

Calculamos: $f(4) = 4 - 2 \Rightarrow \boxed{f(4) = 2}$

Incognita: $\boxed{f(3; f(4)) = f(3;2)}$ .... **(I)**

De la condición: $f(a;b) = b^2 + a$

Calculamos: $f(3;2) = 2^2 + 3 \Rightarrow \boxed{f(3;2) = 7}$ .... **(II)**

Reemplazamos **(II)** en **(I)**:

$f(3; f(4)) = f(3;2) = 7 \Rightarrow \therefore$ $f(3; f(4)) = 7$ ***Rpta. B***

18 Sea la función "f" definida en $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x \ ; \ x \geq 2 \\ x + 2 \ ; \ x < 2 \end{cases} \quad ; \text{ hallar: } \quad S = \frac{f(5) + f(0)}{f(3) - f(-5)}$$

A) 7 B) 6 C) 4 D) 3 E) 1

Resolución:

De la condición: $f(x) = x^2 - 3x \; ; \; x \geq 2$

Calculamos: $f(5) = 5^2 - 3(5) \Rightarrow f(5) = 10$

$f(3) = 3^2 - 3(3) \Rightarrow f(3) = 0$

De la condición: $f(x) = x + 2 \; ; \; x < 2$

Calculamos: $f(0) = 0 + 2 \Rightarrow f(0) = 2$

$f(-5) = -5 + 2 \Rightarrow f(-5) = -3$

Luego:

$$S = \frac{f(5) + f(0)}{f(3) - f(-5)} = \frac{10 + 2}{0 - (-3)} = \frac{12}{3} = 4 \Rightarrow \therefore S = 4$$

Rpta. C

19 Si: $f(x+1) = f(x) + 2x + 4$; $f(0) = 2$; halle: $f(1) + f(-1)$

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

De la condición: $f(x+1) = f(x) + 2x + 4$ $\quad (x + 1) = 1 \Rightarrow \therefore x = 0$

Calculamos: $f(1) = f(0) + 2(0) + 4$

$f(1) = 2 + 0 + 4 \Rightarrow f(1) = 6$

De la condición: $f(x+1) = f(x) + 2x + 4$ $\quad (x + 1) = 0 \Rightarrow \therefore x = -1$

Calculamos: $f(0) = f(-1) + 2(-1) + 4$

$2 = f(-1) - 2 + 4 \Rightarrow \therefore f(-1) = 0$

Luego: $f(1) + f(-1) = 6 + 0 = 6$ ***Rpta. C***

20 Sabiendo que: $P((G(x)) = F(g(x))$; donde: $G(x) = g^2(x) + 1$

Además: $P(x) = \dfrac{x}{1+x}$; Hallar: $1 - F(\sqrt{x})$

A) $(x+1)^{-1}$ B) $(x+2)^{-1}$ C) $\sqrt{x} + 1$ D) $(\sqrt{x}+1)^{-1}$ E) x

Resolución:

$$\boxed{P(G(x)) = F(g(x))} \quad \text{..........} \ (I)$$

De la condición: $\quad P(x) = \dfrac{x}{1+x}$

Calculamos: $\quad P(G(x)) = \dfrac{G(x)}{1+G(x)}$; ***Pero:*** $\boxed{G(x) = g^2(x) + 1}$

Luego: $\quad \boxed{P(G(x)) = \dfrac{g^2(x)+1}{1+g^2(x)+1} = \dfrac{g^2(x)+1}{g^2(x)+2}} \quad \text{..........} \ (II)$

Reemplazamos **(II)** en **(I)**:

$$\frac{g^2(x)+1}{g^2(x)+2} = F(g(x)) \ \Rightarrow \ F(g(x)) = \frac{g^2(x)+1}{g^2(x)+2}$$

; de esta condición calculamos:

$$F(\sqrt{x}) = \frac{\sqrt{x}^{2}+1}{\sqrt{x}^{2}+2} = \frac{x+1}{x+2}$$

$$\therefore \ \boxed{F(\sqrt{x}) = \frac{x+1}{x+2}} \quad \text{..........} \ (III)$$

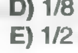
Ahora Calculamos: $\quad 1 - F(\sqrt{x}) = 1 - \dfrac{x+1}{x+2}$

$$1 - F(\sqrt{x}) = \frac{(x+2)-(x+1)}{x+2} = \frac{1}{(x+2)}$$

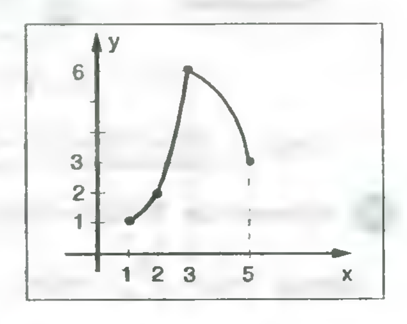
$$\therefore \ \boxed{1 - F(\sqrt{x}) = (x+2)^{-1}}$$ ***Rpta. B***

21 De la figura mostrada. Halle el valor de:

$$E = \frac{f(5) + f(1)}{f(2) + f(3)}$$



A) 1
B) 2
C) 4
D) 1/8
E) 1/2



Resolución:

De acuerdo a la figura:

Para: $\boxed{x = 1} \ \Rightarrow \ \boxed{f(1) = 1}$

Para: x = 2 ⇒ $f(2) = 2$

Para: x = 3 ⇒ $f(3) = 6$

Para: x = 5 ⇒ $f(5) = 3$

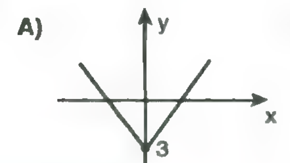
Luego: $E = \dfrac{f(5) + f(1)}{f(2) + f(3)}$

$E = \dfrac{3+1}{2+6} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

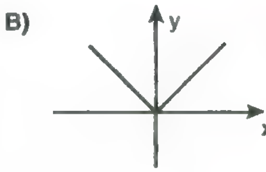
$\therefore \; E = \dfrac{1}{2}$ ***Rpta. E***

22 La gráfica de: $f(x) = \big|\,|x| - 3\,\big|$; es:

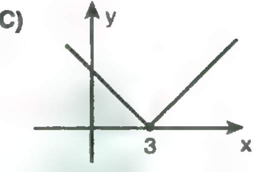
A)



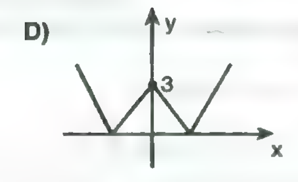
B)



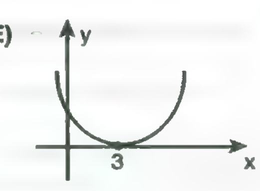
C)



D)



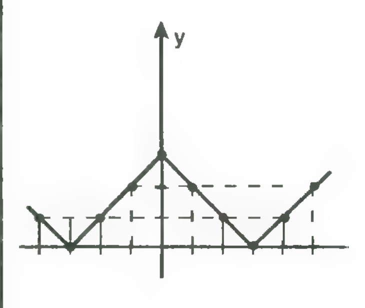
E)



Resolución:

Por tabulación:

x	$f(x) = \big\|\,\|x\| - 3\,\big\|$	***Pares Ordenados***
0	$f(x) = \big\|\,\|0\| - 3\,\big\| = 3$	**(0;3)**
1	$f(x) = \big\|\,\|1\| - 3\,\big\| = 2$	**(1;2)**
2	$f(x) = \big\|\,\|2\| - 3\,\big\| = 1$	**(2;1)**
3	$f(x) = \big\|\,\|3\| - 3\,\big\| = 0$	**(3;0)**
4	$f(x) = \big\|\,\|4\| - 3\,\big\| = 1$	**(4;1)**
5	$f(x) = \big\|\,\|5\| - 3\,\big\| = 2$	**(5;2)**
–1	$f(x) = \big\|\,\|-1\| - 3\,\big\| = 2$	**(–1;2)**
–2	$f(x) = \big\|\,\|-2\| - 3\,\big\| = 1$	**(–2;1)**
–3	$f(x) = \big\|\,\|-3\| - 3\,\big\| = 0$	**(–3;0)**
–4	$f(x) = \big\|\,\|-4\| - 3\,\big\| = 1$	**(–4;1)**
⋮	⋮	⋮



Rpta. D

¿SABÍAS QUE...

... el número 2 519 tiene la siguiente peculiaridad?

Si se divide por 10 deja un residuo de 9; por 9 deja uno de 8; por 8 uno de 7; por 7 uno de 6; por 6, uno de 5; por 5, uno de 4; por 4, uno de 3; por 3, uno de 2; por 2, uno de 1; por 1 deja cero.

Capítulo 2 POLINOMIOS

2.1 POLINOMIO EN IR

Un polinomio de una sola variable, y de n-ésimo grado, es una expresión de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots\dots\dots + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

Donde: **x :** es la variable, cuyo mayor exponente es n.
$a_n; a_{n-1}; a_{n-2}; \dots\dots ; a_1; a_0$: son los coeficientes del polinomio P(x).

En los que los **coeficientes** de **"x"** son números reales ($\mathbb{R}$) diferentes de cero y los exponentes de **x** son números enteros positivos.

Ejemplos:

a) $2x^5 + 6x^4 - x^3 + x^2 - x + 8$; es un polinomio de **quinto grado.**

b) $\sqrt{7}x^4 + 3x^3 - 12x^2 + 6x - 9$; es un polinomio de **cuarto grado.**

c) $15x^2 - 27$; es un polinomio de **segundo grado.**

d) $4x + 1$; es un polinomio de **primer grado.**

Para designar polinomios, se acostumbran utilizar **letras mayusculas.**

Así: **a).** $P = 4x^5 - 7x^2 + 5$ **b).** $Q = 9x - 13$ **c).** $R = 6x^3 - x^2 + 3$

A los polinomios de dos términos se les denomina **binomio,** a los de tres términos **trinomios**; a los de cuatro términos **cuatrino-mios**, en general se les llamará **polinomios. Ejemplos:**

a) $5x - 3y$ .... **Binomio**
b) $2x^2 - 5y$ .... **Binomio**
c) $3xy + 2y + 6$ .... **Trinomio**
d) $8x^3 - 5x^2 + 9$ .... **Trinomio**
e) $7x^4 - 3x^2 + 6x - 2$ .... **Cuatrinomio**

} Polinomios

2.2 GRADOS DE UN POLINOMIO

A) Grado Relativo (G.R.) .- El grado relativo de un polinomio esta representado por el **mayor exponente** de dicha letra o variable.

Ejemplo 1: Dado el polinomio: $P = 6x^{⑤}y^2 - 9x^4y^3 + 7x^3y^{\boxed{4}}$

- **Grado Relativo** con respecto a la variable "x" es: ⑤
- **Grado Relativo** con respecto a la variable "y" es: $\boxed{4}$

Ejemplo 2: Dado el polinomio: $F(x, y, z) = 6x^2y^3z - 9x^{③}y^4z^{⑥} + 15xy^{\boxed{5}}z^3$

- **Grado Relativo** con respecto a la variable "x" es: ③
- **Grado Relativo** con respecto a la variable "y" es: ⑤
- **Grado Relativo** con respecto a la variable "z" es: $\boxed{6}$

B) Grado Absoluto (G.A).- El grado absoluto de un polinomio esta representado por el monomio de mayor grado.

Ejemplo 1: Dado el polinomio:

$$P(x,y) = 5x^3y^4 - 7x^2y^4 + 2x^6y^2 - 13x^4y$$

- $5x^3y^4$: **Monomio de gardo: 3 + 4 = 7**
- $7x^2y^4$: **Monomio de grado: 2 + 4 = 6**
- $2x^6y^2$: **Monomio de grado: 6 + 2 = 8**
- $13x^4y$: **Monomio de grado: 4 + 1 = 5**

Luego: El grado absoluto del polinomio es: 8

Ejemplo 2: Dado el polinomio:

$$F(x,y,z) = 6x^2y^3z - 9x^3y^4z^5 + 15xy^5z^3$$

- $6x^2y^3z$: **Monomio de grado: 2 + 3 + 1 = 6**
- $9x^3y^4z^5$: **Monomio de grado: 3 + 4 + 5 = 12**
- $15xy^5z^3$: **Monomio de grado: 1 + 5 + 3 = 9**

Luego: El grado absoluto del polinomio es: 12

Recomendación: ***Estimado alumno, no vayas a cometer el error de decir:***

$$\left(\textit{Grado absoluto del Polinomio}\right) = \left(\textit{Suma de grados relativos con respecto a sus variables del polinomio}\right)$$

Porque esto **FALSO.**

TALLER DE EJERCICIOS Nº 7

1. Escribir **Si** o **No**, según corresponda en cada casillero.

Expresión Algebraica	¿Es un polinomio	Expresión Algebraica	¿Es un polinomio
$4x^3-2x^2+6x+1$		$3x^2+\sqrt{x^2}-5x^3-9$	
x^2-6xy^2-y		$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+2x-3y$	
$x^{-3}+x^{-2}+x^{-1}-7$	NO	$x^{2/3}-6x^{1/3}-6$	NO
$9x^5-3x^4+2x+3$		$5x^3+\sqrt{5}x+7xy+y^2$	
$\frac{x^3+5x^2-x}{x^3}$	NO	$\sqrt{7}x^4-\sqrt{2}x^3-6x+4$	SI
ax^3-bx^2+cx+d		$\frac{x^6+x^3}{x^2}+9x+3$	
$\sqrt{3}x^3-8x^2-3x$		$6xy^2-5x^2y+x^4$	
$0{,}8x^3-0{,}3x+9$	SI	$\sqrt[4]{x^8}-\sqrt{x^6}+9x^3-7x+3$	
$\frac{x^4}{x^{-2}}+\frac{x^3}{x^{-1}}+8x-12$		$0{,}04x^4-0{,}2x^3+3x+6$	
x^2+x^2y-x-y		$4\sqrt{x}-6\sqrt{x^3}-16x+11$	

2. Halla: **i)** El Grado Relativo de cada polinomio; respecto a la variable "x".
ii) Halla el Grado Absoluto de cada polinomio.

Polinomio:	GR(x)	G.A.	Polinomio	GR(x)	G.A.
$5x^6-7x^4-3x^2+6$			$-6ax^2y+9axy^3-5x^3y^2$		
$11x^3-6x^4+5x^6-8$			$8x^3yz-5x^4yz^6+x^2y^3z^5$		
$2xy^5-8x^2y^4-5x^3y^6-7$			$3bx^3y^4-7b^3x^2y^3-4x^4y^3$		
$\sqrt{3}x^3y^2z-x^4y^3z^2-16$			$\frac{3}{5}x^5y^3z^2+\frac{1}{3}x^3y^2z-x^4y^2z^6$		

Polinomio:	GR(x)	G.A.
$-\sqrt{3}x^{a}y^{b+3}+\sqrt{2}x^{a+3}y^{b-1}+6x^{a+1}y^{b}$		
$2x^{a}y^{b}-5x^{2a+1}y^{b-2}+6x^{2a+1}y^{b+1}$		
$0{,}4x^{a+3}y^{b+2}-0{,}6x^{a}y^{b+8}+x^{a+1}y^{b}$		
$\frac{\sqrt{2}}{3}x^{a-1}y^{a+2}+6x^{a+2}y^{2a-1}\,4x^{a-3}y^{a-4}$		
$8xyz^{a}-9x^{a}yz^{3}-6xy^{a}z^{a}-11$		
$mx^{m}y^{n}-2nx^{m-1}y^{n+2}+6x^{m-3}y^{n+4}$		

3. Ordena, respecto a la variable "x" cada polinomio siguiente:

En forma Decreciente:

a)	$6x^{5}-2x^{2}+4x^{3}-5x^{4}+x-1$	➧
b)	$10x^{2}y^{3}-x^{4}y^{4}-3x^{5}y^{6}+2xy^{2}+6$	➧
C)	$9x-2x^{6}-18x^{4}+5x^{2}-11$	➧
d)	$5ax^{3}-4x^{2}-2ab+7ax^{5}+9$	➧
e)	$\frac{2}{7}xy^{3}z^{6}+x^{5}yz^{3}-\frac{1}{5}xy^{3}z^{8}+x^{2}$	➧
f)	$\sqrt{3}x^{3}yz^{3}-\sqrt{2}x^{2}y^{2}z-x^{5}yz^{4}-12$	➧
g)	$0{,}3xy^{2}-6x^{3}y-0{,}8x^{6}y+8x^{4}y^{3}-6$	➧
h)	$\frac{1}{5}x+\frac{2}{3}x^{6}-7x^{5}-x^{2}+4x^{3}-2$	➧

4. Ordena ; respecto a la variable "y" cada polinomio siguiente:

En forma Creciente:

a)	$2y^{8}-5y^{6}+7y^{4}-3y+8$	➧
b)	$5x^{7}-5x^{2}y^{4}+6x^{3}y^{6}-6x^{4}+9$	➧
c)	$3xy^{4}-5x^{2}y^{5}+6y^{3}-2y+3$	➧

d) $\frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{3}x^2y^4 - y^5 + y^7 - 1$ ➧	
e) $\sqrt{2}xy + \sqrt{3}x^2y^4 - 5x^4y^6 + 5$ ➧	
f) $-6xyz^4 + 9xy^2z^2 - y^3z + 6$ ➧	
g) $0,2xy^3 + 0,6x^2y^4 - y^6 + 5y - 8$ ➧	
h) $xy + 3x^3y^6 - x^2y^4 - y^5 + 6$ ➧	

5. Dado los siguientes polinomios: **ordenalos y completalos** respecto a la variable "x".

En forma Creciente:

a) $3x^4 - 5x^2 + 6x^3 + x^5 - 2$ ➧	
b) $-x^2 + 8ax^5 - 5x^6 - 4x^3 + 6$ ➧	
c) $3x^6 - \frac{1}{3}x^2y + 2xy^4 + x^5$ ➧	
d) $7x^4 - x + 8 + 5x^3$ ➧	
e) $5x^4y + 6x^2y^3 - 2x + 8$ ➧	
f) $0,6xy^2 - 0,8x^4y + 13$ ➧	

6. Dado los siguientes polinomios: **ordenalos** y **completalos** respecto a la variable "y" .

En forma Decreciente:

a) $-3y^2 + 5y^4 + 6y^6 - 2y + 5$ ➧	
b) $2xy - 3x^2y^4 + xy^2 - 6x^3 + 3$ ➧	
c) $4xy^3 - 5y^6 + 7x^3y^2 - 9y + 2$ ➧	
d) $\sqrt{3}xy^4 - 5x^2y^2 - 6x^4y^6 - x^3y + 10$ ➧	
e) $0,2xy^3z + \frac{1}{3}x^2y^5z^2 - y^2z^3 + 6$ ➧	
f) $-6xy^4 - 5x^2y^6 + 3x^4y^3 + 6y^3 - 8$ ➧	

7. Halla el valor numérico de los polinomios siguientes:

Ejemplo 1: Si: $P(x) = x^2 - 3x + 6$

Hallar: P(3).

Resolución:

De la condición: $P(x) = x^2 - 3x + 6$

Calculamos: $P(3) = (3)^2 - 3(3) + 6$

$P(3) = \not{9} - \not{9} + 6$

$\therefore$ $\boxed{P(3) = 6}$

Ejemplo 2: Si: $Q(x,y) = 3x + 4y^2$

Hallar: Q(3,2)

Resolución:

De la condición: $Q(x,y) = 3x + 4y^2$

Calculamos: $Q(3,2) = 3(3) - 4(2)^2$

$Q(3,2) = 9 + 4(4)$

$\therefore$ $\boxed{Q(3,2) = 25}$

a) Si: $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3$

Hallar: P(2)

b) Si: $P(x) = 3x^2 - 5x + 6$

Hallar: P(–1)

c) Si: $Q(x) = 2x^4 - 3x^2 + 9$

Hallar: $Q(\sqrt{3})$

d) Si: $Q(x) = \dfrac{x^3 - 4}{x^2 + 2}$

Hallar: Q(4)

e) Si: $M(x) = (x - 2)(x^2 + 1)$

Hallar: M(4)

f) Si: $P(x) = x + \dfrac{1}{x}$

Hallar: P(1/3)

g) Si: $R(x) = \dfrac{1}{2}x^4 - x^2 + 2x + 6$

Hallar: R(–2)

h) Si: $P(x,y) = x^2y - x + 2y$

Hallar: P(3,–2)

i) Si: $Q(x, y) = \dfrac{x^2 + 2x^4y}{x^4}$

Hallar: $Q(\sqrt{2},3)$

j) $M(x,y,z) = \dfrac{x + y + z}{xyz}$

Hallar: M (3,–2,6)

8. Completa la siguiente tabla:

Polinomio ➧	$P(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 8$
Σ de coeficientes = P(1) ➧	$P(1) = 1^3 - 2(1)^2 + 5(1) + 8 = 12$
Término Independiente = P(0) ➧	

Polinomio	$P(x) = 6x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 5x^2 + x$
Σ de coeficientes = P(1)	
Término Independiente = P(0)	

Polinomio	$Q(x) = 2x^6 - 5x^3 + x + 2$
Σ de coeficientes = P(1)	
Término Independiente = P(0)	$Q(0) = 2(0)^6 - 5(0)^3 + 0 + 2 = 2$

Polinomio	$R(y) = \frac{1}{3}y^4 + \frac{1}{6}y - \frac{1}{2}$
Σ de coeficientes = P(1)	
Término Independiente = P(0)	

Polinomio	$M(x) = 0{,}3x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}6x + 3$
Σ de coeficientes = P(1)	
Término Independiente = P(0)	

Polinomio	$F(x) = \sqrt{3}\,y^3 - 2\sqrt{3}\,y^2 + 6\sqrt{3}\,y$
Σ de coeficientes = P(1)	
Término Independiente = P(0)	

Polinomio	$P(x) = 2x^n - 5x^{n-1} + 6x^{n-3} + 4$
Σ de coeficientes = P(1)	
Término Independiente = P(0)	

9. Hallar el grado de cada una de las expresiones algebraicas:

Expresión Algebraica	Grado:
a) $(x^3 + 2)(x^4 - 1)(x + 6)$	

b) $(x^{4n}-3)(x^{2n}-5)(x^{n}+6)(x^{3n}-2)$	
c) $\dfrac{x^5y^3z^6}{y^2z^4x^2}$	
d) $(x^3-2x^4+6)^2$	
e) $[(x^4-1)(x^3-6)]^2$	
f) $\dfrac{x^8-2x^3+6}{x^4-5x^2-6}$	
g) $\left(\dfrac{x^3+6x+1}{x^2+2x+6}\right)\left(\dfrac{x^5-5x^2+2}{x^3-4x+1}\right)$	
h) $\sqrt[6]{x^{24}-x^{18}+6x^2-36}$	
i) $\left(\sqrt[3]{x^{12}+x^6-1}\right)\left(\sqrt{x^6-3x^2+2}\right)$	

RESPUESTAS TALLER 7

7. a) $P(2)=3$	b) $P(-1)=14$	c) $Q(\sqrt{3})=21$	d) $Q(4)=10/3$
e) $M(4)=34$	f) $P(1/3)=10/3$	g) $R(-2)=6$	h) $P(3,-2)=-25$
i) $Q(x,y)=-35/9$		j) $M(x,y,z)=-7/36$	

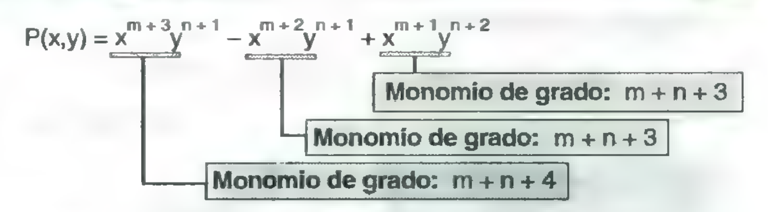
9. a) 8	b) 10n	c) 6	d) 8	e) 14
f) 4	g) 3	h) 4	i) 7	

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE POLINOMIOS

Ejercicio 1: En el polinomio: $P(x,y)=x^{m+3}y^{n+1}-x^{m+2}y^{n+1}+x^{m+1}y^{n+2}$

Calcular: "m" y "n"; sí grado con respecto a "y" es 4 y el grado absoluto del polinomio es 12.

Resolución:



Del enunciado:

- G.R(y) : $n + 2 = 4 \Rightarrow \boxed{n + 2}$
- G.A : $m + n + 4 = 12 \Rightarrow m + 2 + 4 = 12 \Rightarrow \boxed{m = 6}$

Ejercicio 2: Calcular: "m" y "n" para que el monomio: $x^{4(m+n)}y^{3m-2n}$, sea de grado absoluto 80 y el gardo relativo respecto a "y" es 20.

Resolución:

De acuerdo al enunciado, planteamos las ecuaciones:

G.R(y) : $\boxed{3m - 2n = 20}$ .... **(1)**

G.A : $4(m + n) + 3m - 2n = 80 \Rightarrow \boxed{7m + 2n = 80}$ .... **(2)**

Sumamos miembro a miembro las ecuaciones **(1)** y **(2)** :

$$\begin{cases} 3m - \cancel{2n} = 20 \\ 7m + \cancel{2n} = 80 \end{cases}$$

Σ MAM : $10m = 100 \Rightarrow \therefore \boxed{m = 10}$

Remplazamos el valor de "m" en **(1)**:

$$3m - 2n = 20 \Rightarrow 3(10) - 2n = 20$$

$$30 - 2n = 20 \Rightarrow \therefore \boxed{n = 5}$$

Ejercicio 3: Hallar el coeficiente del monomio: $9^m\left(-\frac{1}{3}\right)^n x^{3m+2n}y^{5m-n}$; si su grado absoluto es 10 y el grado relativo a "x" es 7.

Resolución:

De acuerdo al enunciado, planteamos las ecuaciones:

G.R(x) : $\boxed{3m + 2n = 7}$ .... **(1)**

G.A : $3m + 2n + 5m - n = 10 \Rightarrow \boxed{8m + n = 10}$ .... **(2)**

De la ecuación **(2)**; despejamos "n": $\boxed{n = 10 - 8m}$ .... **(3)**

Reemplazamos **(3)** en **(1)** :

$$3m + 2(10 - 8m) = 7 \Rightarrow 3m + 20 - 16m = 7$$

$$13 = 13m \Rightarrow \therefore \boxed{1 = m}$$

Reemplazamos el valor de: **m = 1**; en **(3)**.

$$n = 10 - 8(1) \Rightarrow \therefore \boxed{n = 2}$$

Luego, hallamos el coefeciente del monomio:

Coeficiente del monomio = $9^m\left(-\frac{1}{3}\right)^n$; reemplazando el valor de "m" y "n"; obtenemos:

Coeficiente del monomio = $9^1\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 9\left(\frac{1}{9}\right) = 1$

$\therefore$ $\boxed{\text{Coeficiente del monomio} = 1}$ ***Rpta***

Ejercicio 4: En el polinomio:

$$P(x,y) = 4x^{m+n-2}y^{m-3} + 7x^{m+n+5}y^{m-4} + 13x^{m+n-6}y^{m+2}$$

Se verifica que la diferencia entre los grados relativos a "x" e "y" es 5 y además que el menor exponente de "y" es 3. Hallar el grado absoluto del polinomio.

A) 10 B) 17 C) 12 D) 21 E) 15

Resolución:

- G.R(x) : $m + n + 5$
- G.R (y) : $m + 2$

Del enunciado; planteamos la ecuación :

$$(m + n + 5) - (m + 2) = 5 \Rightarrow n + 3 = 5$$

$$\therefore \boxed{n = 2}$$

- El menor exponente de "y" es 3; osea:

$$m - 4 = 3 \Rightarrow \therefore \boxed{m = 7}$$

Luego; calculamos el grado absoluto del polinomio , veamos:

Grado absoluto: $(n + m + 5) + (m - 4) = 2m + n + 1$

$$= 2(7) + 2 + 1 = 17$$

$\therefore$ $\boxed{\text{G.A del polinomio} = 17}$ ***Rpta. B***

Ejercicio 5: Determinar el valor de "m" , de modo que el monomio:

$$E=\sqrt{\frac{x^{m-2}\cdot\sqrt[3]{x^{2m}}}{\sqrt[3]{x^{m}}}}\ ;\ \text{sea de tercer grado.}$$

Resolución:

Aplicando la propiedad: $\dfrac{\sqrt[n]{a^p}}{\sqrt[n]{a^q}}=\sqrt[n]{\dfrac{a^p}{a^q}}=\sqrt[n]{a^{p-q}}$

Obtenemos:

$$E=\sqrt{x^{m-2}\cdot\sqrt[3]{\frac{x^{2m}}{x^{m}}}}=\sqrt{x^{m-2}\cdot\sqrt[3]{x^{2m-m}}}$$

$$E=\sqrt{x^{m-2}\cdot\sqrt[3]{x^{m}}}$$; Aplicando la propiedad: $\sqrt[n]{a^p}=a^{p/n}$

Obtenemos:

$$E=\sqrt{x^{m-2}\cdot x^{\frac{m}{3}}}$$; Aplicando la propiedad: $a^p\cdot a^q=a^{p+q}$

$$E=\sqrt{x^{m-2+\frac{m}{3}}}=\sqrt{x^{\frac{4m-6}{3}}}$$; Aplicando la propiedad: $\sqrt[n]{a^{\frac{p}{q}}}=a^{\frac{p}{n\cdot q}}$

$$E=x^{\frac{4m-6}{3\cdot 2}}$$; como el monomio es de tercer grado; el exponente de está última expresión lo igualamos a 3.

$$\frac{4m-6}{3\cdot 2}=3\ \Rightarrow\ 4m-6=18\ \Rightarrow\ 4m=24$$

$\therefore$ $\boxed{m=6}$ ***Rpta***

Ejercicio 6: Calcular el valor de : (a + b); si el polinomio:

$$Q(x;y)=x^{3a-b-3}y^{a+2b+4}+x^{3a-b-2}y^{a+2b-2}+x^{3a-b-1}y^{a+2b}$$

Es de grado absoluto 29 y la diferencia de sus grados relativos a "x" e "y" vale –5.

Resolución:

$$Q(x;y)=x^{3a-b-3}y^{a+2b+4}+x^{3a-b-2}y^{a+2b-2}+x^{3a-b-1}y^{a+2b}$$

Monomio de grado: $4a+b-1$

Monomio de grado: $4a+b-4$

Monomio de grado: $4a+b+1$

- G.R $(x) = 3a - b - 1$
- G.R $(y) = a + 2b + 4$

Del enunciado; planteamos la ecuación :

$$(3a - b - 1) - (a + 2b + 4) = -5$$

$$2a - 3b - 5 = -5$$

$$\boxed{2a = 3b} \quad \ldots\ldots (1)$$

- G.A de polinomio: $4a + b + 1 = 29 \Rightarrow \boxed{b = 28 - 4a}$ .... **(2)**

Reemplazamos **(2)** en **(1)** :

$$2a = 3(28 - 4a) \Rightarrow 2a = 3(28) - 12a \Rightarrow 14a = 3(28) \Rightarrow \therefore \boxed{a = 6}$$

Reemplazamos el valor de **a = 6**; en **(2)**:

$$b = 28 - 4(6) \Rightarrow \therefore \boxed{b = 4}$$

Luego: $a + b = 6 + 4 \Rightarrow \therefore \boxed{a + b = 10}$ **Rpta**

2.2.1 GRADO DE LAS OPERACIONES ALGEBRAICAS

El grado de una expresión algebraica se determina después de realizar operaciones indicadas, las reglas que debemos aplicar son las siguientes:

I. Grado de un Producto: Se suman los grados de los factores.

Ejemplo 1: El grado de: $(x^{③} + 8)(x^{②} + 1)(x^{①} - 6)$;

$$\boxed{\text{Será: } 3 + 2 + 1 = 6}$$

Ejemplo 2: El grado de: $(3x^{②} + 6x + 2)(x^{③} + 5)$;

$$\boxed{\text{Será: } 2 + 3 = 5}$$

II. Grado de un cociente: Se resta el grado del dividendo menos el grado del divisor.

Ejemplo 1: El grado de : $\dfrac{x^5 y^4}{z^2 y^3}$;

$$\boxed{\text{Será: } (5 + 4) - (2 + 3) = 4}$$

Ejemplo 2: El grado de : $\dfrac{x^9 + x^5 - 3x^2 + 6}{x^4 - 2x + 5}$

$$\boxed{\text{Será: } 9 - 4 = 5}$$

III. Grado de una Potencia: Se multiplica el grado de la base por el exponente.

Ejemplo 1: El Grado de: $(x^{3} + 2x^{2} - 4)^{2}$;

Será: 3°2 = 6

Ejemplo 2: El Grado de: $[(5x^{6} - x^{3} + 2x + 1)^{3}]^{2}$

Será: 6°3°2 = 36

IV. Grado de una raiz: Se divide el grado del dividendo entre el índice del radical.

Ejemplo 1: El grado de: $\sqrt[4]{x^{8} - x^{6} + x^{3} - 5}$

Será: 8 : 4 = 2

Ejemplo 2: El grado de: $\sqrt{x^{3}\sqrt[3]{x^{12} + 3x^{6} + 8}}$

Será: 12 : (2°3) = 2

TALLER DE EJERCICIOS Nº 8

Ejercicio 1: Hallar el grado de:

$$M(x;y) = 3x^{2}\sqrt{x^{4}y^{6}}\cdot\sqrt[3]{y^{6}}$$

Resolución:

Rpta. 9

Ejercicio 2: Hallar el coeficiente del siguiente monimio:

$P(x) = 3n^{2}\cdot\sqrt[5]{x^{2n}}$; si es de grado 2.

Resolución:

Rpta. 75

Ejercicio 3 : El grado absoluto de: $3x^{2n-3}y^{n-4}$; es igual a 5. ¿Cuánto vale el grado relativo a "x"?

Resolución:

Rpta. 5

Ejercicio 4 : Hallar: (m - n) si el polinomio adjunto es de grado 8 respecto a "y" y de tercer grado respecto a "x":

$$P(x;y) = -5x^{m-2}y^{n} + 2x^{m}y^{n-3} - \frac{1}{5}x^{m+1}y^{n-2}$$

Resolución:

Rpta. m - n = 5

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE POLINOMIOS

NIVEL I

Hallar: "m" si el siguiente monomio es de 2° grado.

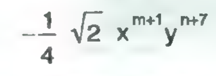
$$-5^{3}\sqrt{3}x^{m-4}$$

A) 6 B) 3 C) 5 D) 4 E) 2

Calcular "a" si el término $0,58x^{3a}y^{2}$ es de grado 11.

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

Obtener mn, si se sabe que el siguiente monomio es de noveno grado respecto a "y", y de sexto grado respecto a "x":



$$-\frac{1}{4}\sqrt{2}\ x^{m+1}y^{n+7}$$

A) 10 B) 3 C) 14 D) 8 E) 21

Calcular el coeficiente del siguiente monomio, sabiendo que es de octavo grado.

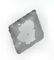
$$M(x;y) = 15a^{2}x^{a+1}y^{2}$$

A) 375 B) 175 C) 215
D) 225 E) 255

Proporcionan "m" si el siguiente polinomio es de grado absoluto igual a 10.

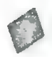
$$P(x) = 5 + 8x^{m+4} - 6x^{m+3}$$

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3



Hallar "p" en: $5x^{p-2}\,y^{2p-1}z^{3p-12}$ de modo que su gardo sea: $G = 5p - 6$

A) 8 **B)** 9 **C)** 7 **D)** 10 **E)** 11



Del siguiente polinomio se conocen: $G(x) = 7 \wedge G(y) = 8$.

$P(x;y) = 2x^{m+1} + 6x^{m}y^{n} - 8y^{n+2}$.
¿Cuál es el grado de P(x;y)?

A) 10 **B)** 12 **C)** 9 **D)** 14 **E)** 11

Calcular: "mn" , si el polinomio:

$P(x;y)=4x^{m+1}y^{n-2}+6x^{m+2}y^{n-}-x^{m+3}y^{n-2}$
es tal que: $G(y) = 8$; $G = 20$.

A) 9 **B)** 19 **C)** 80

D) 81 **E)** 90

Determinar "n" de modo que el monomio:

$$M(x) = \sqrt[3]{\frac{x^{n-1}\sqrt[4]{x^{n}}}{\sqrt[6]{x^{5n-4}}}}$$

sea de primer grado.

A) 1 **B)** 5 **C)** 8 **D)** 6 **E)** 4

Calcular los valores de m y n en:

$$P(x;y) = x^{m+5}y^{n-1} - x^{m+6}y^{n-4}$$

Sabiendo que el grado relativo a "y" es 7; y el grado absoluto es 20. Dar como respuesta: $2m + 3n$.

A) 24 **B)** 48 **C)** 32 **D)** 64 **E)** 40

Clave de Respuestas

1. A	2. C	3. A	4. A	5. A
6. B	7. B	8. E	9. C	10. E

NIVEL II

Hallar el grado de:

$$M(x,y) = 5a \cdot \sqrt[4]{x^{16}} \cdot \sqrt[5]{15}$$

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 7 **E)** 9

Hallar el coeficiente del siguiente monomio:

$$P(x) = 2n^{n} \cdot \sqrt[k]{x^{nk}}$$

si es de grado tres.

A) 2 **B)** k **C)** 9 **D)** 27 **E)** 54

¿En cuánto excede el grado relativo de "x" al grado relativo de "y" en:

$$\left(2x^{2}y^{3}+5x^{6}y^{2}\right)\left(3x^{4}y-4x^{5}y^{4}\right)?$$

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

El grado absoluto de: $2x^{3n-1}y^{2n-9}$; es igual a 15. ¿Cuánto vale el grado relativo a "y"?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

Hallar el grado absoluto de:

$$Q(x;y;z) = 3a^{2}\sqrt{x\sqrt{x^{2}}}\left(y^{16/3}\right)^{3/4}z^{0,5^{-3}}$$

A) 13 B) 6 C) 10 D) 15 E) 8

Hallar el coeficiente del monomio:

$$P(x;y;z) = 3mp\sqrt{x^n \cdot \sqrt{y^3\sqrt{y^m}} \cdot z^b}$$

Si su grado relativo a "x" es 2; grado relativo a "y" es uno y su absoluto es 5.

A) 3 B) 9 C) 36
D) 54 E) Ninguna Anterior

Calcular el valor de "m" para que el monomio:

$$\sqrt[3]{\frac{a^{m-3}\sqrt[4]{a^{3m}}}{\sqrt[4]{a^m}}}$$; sea de sexto grado.

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 11

En el monomio: $P(x;y) = 5(a - b)x^{a+b}y$; el grado absoluto es 6 y el grado relativo "x" es el coeficiente del monomio. Calcular el valor de "b".

a) 2 b) 3 c) 4 d) –2 e) –3

Sabiendo que el polinomio:

$$P(x;y) = x^{3m+n-1}y^{m+n+2} + 3x^{3m+n}y^{m+n-1} + x^{3m+n+1}y^{m+n+1}$$

Es de grado absoluto 36 y la diferencia entre el gardo relativo de "x" y el menor exponente de "y" es 12. Calcular el valor de "m":

A) 5 B) 7 C) 9 D) 8 E) 4

Calcular: $(n - m)^2$; para que el binomio:

$$Q(x;y) = x^{3m+2n-5}y^{m-n+4} + x^{3m+2n-1}y^{m-n+2}$$

Sea de grado absoluto 28 y de grado relativo a "y" 2

A) 6 B) 7 C) 2 D) 4 E) 3

Si el grado absoluto de A es 16 y el menor exponente de "y" en el polinomio B es 4. Calcular el grado del polinomio B.

$$A = x^{m+11}y^{n-3} - x^{m+7}y^{n+2} + x^{n+2}y^{m+1}$$

$$B = x^{2m+6}y^{n+2} - x^{2m+2}y^{n+7} + x^{3m}y^{n+10}$$

A) 24 B) 27 C) 15 D) 18 E) 26

Sea el polinomio:

$$P(x,y) = 3a^2x^5y^4z^3 + 2\sqrt{3}b^4x^6y^2z^5 - 3a^4x^7yz^6$$

Hallar el producto de su grado absoluto con el grado relativo a "x".

A) 126 B) 98 C) 45 D) 36 E) 63

Hallar el coeficiente del monomio:

$$M(x) = 2n \cdot \sqrt[3]{\frac{x^{n-2}\sqrt[7]{x^{3n}}}{\sqrt[4]{x^{n+1}}}}$$; si es de segundo grado.

a) 2 B) 6 C) 10 D) 14 E) 18

Hallar la suma de los coeficientes del polinomio:

$$P(x;y) = (4a-b)x^{a-3}y^{3b} - (5a-2b)x^{a+1}y^{2b} + (a-3b)x^{a}y^{5b+3}$$

Si el grado relativo a "x" es 7; su grado absoluto es 12.

A) 0 B) –1 C) –6/5 D) 2 E) N.A

Dado el polinomio: $Q(x,y,z) = 5x^{a-2}y^{b+5}z^{6} + x^{a-3}y^{b}z^{4} + 7x^{a-1}y^{b+6}z^{3}$

de grado absoluto 17 y grado relativo a "x" es 6. Hallar el valor de "a – b".

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Clave de Respuestas

1. D	4. A	7. C	10. D	13. D
2. E	5. A	8. A	11. B	14. C
3. D	6. D	9. A	12. B	15. E

2.3 POLINOMIOS ESPECIALES

Se denominan así por tener una propiedad específica que les dá el nombre.

2.3.1 POLINOMIOS HOMOGÉNEOS

Son aquellos cuyos términos monomios tienen igual grado.

Ejemplo: $P(x;y) = x^5y^3 + x^2y^6 + xy^7$

- xy^7: Monomio de grado: 8
- x^2y^6: Monomio de grado: 8
- x^5y^3: Monomio de grado: 8

Grado absoluto = 8 = Grado de homogeneidad

(Grado de cada monomio) = (Grado absoluto del polinomio) = (Grado de Homogeneidad)

Polinomio Ordenado:

Un polinomio ordenado respecto a una letra llamada **ordenatriz** es aquel en el cual los exponentes de dicha letra van aumentando o disminuyendo. Si el exponente de la ordenatriz va **aumentando** se dice que el polinomio esta ordenado en forma **ascendente** y si va **disminuyendo** se dice que el polinomio está ordenado en forma **descendente.**

Ejemplos:

a) $7x^4 - 8x^3 + x^2 - 3x$; **es descendente** respecto a "x"

b) $15x^6 - 3x^5y + 6x^4y^2 - 2x^3y^3$: **es descendente** respecto a "x" y **ascendente** respecto a "y"

Ordenar un polinomio:

Es escribir sus términos de manera que los exponentes de una letra escogida como ordenatriz queden en orden ascendente o descendente.

Ejemplo 1: Ordenar el polinomio: $6x - 9x^3 - 8 + 3x^2 + 5x^4$; en forma descendente respecto a "x".

Resolución:

$5x^4 - 9x^3 + 3x^2 + 6x - 8$ ➧ **(Polinomio ordenado en forma descendente)**

Este término que no contiene la variable "x" se sabe llamar **término independiente.**

Ejemplo 2: Ordenar el polinomio: $8x^2y^2 - 3xy + 5y^4 - 7x^3y^3 + 2x^4$, en forma descendente respecto a "x"

Resolución:

$2x^4 - 7x^3y^3 + 8x^2y^2 - 3xy + 5y^4$ ➧ **(Polinomio ordenado en forma descendente respecto a "x")**

2.3.2 POLINOMIO COMPLETO

Es el que tiene los exponentes de su letra ordenatriz en forma consecutiva desde el mayor hasta el cero o viceversa.

Ejemplos:

a) $5x - 6$; **polinomio de grado 1; cuyo número de términos es 2**

b) $8x^2 - 6x + 1$; **polinomio de grado 2; cuyo número de términos es 3.**

c) $3x^3 - 5x^2 + 3x - 6$; **polinomio de grado 3; cuyo número de términos es 4.**

d) $2x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 3x + 1$; **este polinomio se puede escribir así:**

$$2x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 2x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 3x^1 + 1x^0$$

Observaciones:

1) Todo **polinomio completo** tiene un término independiente.

Ejemplo: Dado el polinomio:

$$10x^5 - 6x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 6x + 11$$

11 → **Término independiente**

2) En todo **polinomio completo** se cumple que:

Número de términos = Grado del polinomio + 1

Ejemplo: Dado el polinomio:

$13x^6 - 7x^5 + 2x^4 - 8x^3 + 5x^2 - 3x + 4$ ➧ **(Grado del polinomio = 6)**

$\therefore$ # de términos = 6 + 1 = 7

3) Si un polinomio no es completo puede completarse escribiendo los términos que faltan con coeficiente cero, asi por ejemplo:

El polinomio: $3x^5 - 2x^2 + 7$

Se completa así: $3x^5 + \mathbf{0x^4} + \mathbf{0x^3} + 2x^2 + \mathbf{0x} + 7$

4) En todo polinomio **completo** se cumple que la suma de coeficientes se obtiene reemplazando a la variable o variables con las cuales se esta trabajando por la unidad **(1)**.

Ejemplo: Dado el polinomio:

$$P(x) = 6x^5 - 3x^4 + 7x^3 + 2x^2 - 4x + 5$$

Σ de Coeficientes: $P(1) = 6(1)^5 - 3(1)^4 + 7(1)^3 + 2(1)^2 - 4(1) + 5$

$$P(1) = 6(1) - 3(1) + 7(1) + 2(1) - 4 + 5 = \boxed{13}$$

5) En todo polinomio completo se cumple que el término independiente (T.I.), se obtiene reemplazando a la(s) variable(s) por cero.

Ejemplo: Dado el polinomio:

$$Q(x) = 5x^4 - 8x^3 + 9x + 7$$

$$\text{T.I.: } Q(0) = 5(0)^4 - 8(0)^3 + 9(0) + 7 = \boxed{7}$$

6) Para la notación de un polinomio no necesariamente se usa P(x); también se pueden usar otras letras como por ejemplo:

$$\boxed{F(x) = 5x^3 - 3x^2 + 6x - 1 \quad ó \quad R(x) = 5x^3 - 3x^2 + 6x - 1}$$

2.3.3 POLINOMIOS IDÉNTICOS

Dos polinomios reducidos son identicos cuando los coeficientes que afectan a sus términos semejantes son iguales.

≡ ; significa Idénticamente Igual

Ejemplo: Si: $Ax^4 + Bx^2 + C \equiv px^4 + qx^2 + r$

Se debe cumplir: $\boxed{A = p}$; $\boxed{B = q}$ y $\boxed{C = r}$

Nota: Sólo en polinomios idénticos podemos asignarle cualquier sistema de valores a la variable o variables con las cuales esté trabajando y obtendremos el mismo valor numérico en ambos miembros, veamos:

Ejemplo: Si se cumple la siguiente identidad.

$$2(x + 7) \equiv a(x + 2) + b(x - 3); \text{ Hallar el valor de "a" y "b"}$$

Resolución:

Primer Método:

$2(x + 7) \equiv a(x + 2) + b(x - 3)$; efectuando los productos indicados, obtenemos:

$2x + 14 \equiv ax + 2a + bx - 3b$; agrupamos términos en el segundo miembro:

$2x + 14 \equiv (ax + bx) + (2a - 3b)$

$2x + 14 \equiv (a + b)x + (2a - 3b)$

Por ser idénticos:

i) $a + b = 2 \Rightarrow \boxed{a = 2 - b}$ .... (I)

ii) $2a - 3b = 14$

Reemplazamos **(I)** en **(ii)**: $2(2 - b) - 3b = 14$

$$4 - 5b = 14 \Rightarrow -5b = 10 \Rightarrow \therefore \boxed{b = -2}$$

Remplazamos el valor de **b = –2**; en **(I)**:

$$a = 2 - (-2) \Rightarrow \therefore \boxed{a = 4}$$

Segundo Método:

Por ser una identidad, podemos darle valores numéricos a la variable "x" estos valores tienen que ser dados en forma conveniente, de modo que sea facil el cálculo, veamos:

Si: $\boxed{x = 3} \Rightarrow 2(x + 7) \equiv a(x + 2) + b(x - 3)$

$$2(3 + 7) \equiv a(3 + 2) + b\underbrace{(3 - 3)}_{0}$$

$$20 \equiv 5a \Rightarrow \therefore \boxed{a = 4}$$

Si: $\boxed{x = -2} \Rightarrow 2(x + 7) \equiv a(x + 2) + b(x - 3)$

$$2(-2 + 7) \equiv a\underbrace{(-2 + 2)}_{0} + b(-2 - 3)$$

$$10 \equiv -5b \Rightarrow \therefore \boxed{b = -2}$$

Luego, los valores de "a" y "b" son; 4 y –2 ; respectivamente.

2.3.4 POLINOMIO IDENTICAMENTE NULO

Un polinomio reducido es idénticamente nulo, cuando los coeficientes de todos sus términos son nulos o ceros.

Ejemplo 1: Si: $Ax^4 + Bx^2 + Cx + D \equiv 0$

Se debe cumplir que: $\boxed{A = B = C = D = 0}$

Ejemplo 2: Si el polinomio: $ax^2 + 5x - bx + 3x^2 + c + 6 \equiv 0$; es idénticamente nulo. Hallar el valor de "a", "b" y "c".

Resolución:

Ordenamos los términos del polinomio de la manera siguiente:

$(ax^2 + 3x^2) + (5x - bx) + (c + 6) \equiv 0$

$(a + 3)x^2 + (5 - b)x + (c + 6) \equiv 0$; por ser idénticamente nulo, se debe cumplir que:

i) $a + 3 = 0 \Rightarrow \therefore \boxed{a = -3}$

ii) $5 - b = 0 \Rightarrow \therefore \boxed{b = 5}$

iii) $c + 6 = 0 \Rightarrow \therefore \boxed{c = -6}$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Sabiendo que el polinomio: $P(x) = x^{a-1} + x^{a+b-3} + x^{b-c}$; es completo y ordenado ascendentemente; calcular el valor de : "2a + b – c"

Resolución:

Como el polinomio es completo y ordenado en forma ascendente ,

• El exponente del primer término debe ser igual a cero; osea:

i) $a - 1 = 0 \Rightarrow \therefore \boxed{a = 1}$

• El exponente del siguiente término valdrá **1**; osea:

ii) $a + b - 3 = 1 \Rightarrow a + b = 4 \Rightarrow 1 + b = 4 \Rightarrow \therefore \boxed{b = 3}$

• El último exponente valdrá 2 ; osea:

iii) $b - c = 2 \Rightarrow 3 - c = 2 \Rightarrow \therefore \boxed{c = 1}$

Luego, calculamos el valor de: $\boxed{2a + b - c = 2(1) + 3 - 1 = 4}$ ***Rpta***

2. Sabiendo que el polinomio: $P(x,y) = x^{3m-2n}y^7 + 2x^8y^{10} - x^{2m}y^{m+n+1}$; es homogéneo; calcular el valor de: "m" y "n"

Resolución:

Por ser homogéneo, se debe cumplir que :

$$\underbrace{3m - 2n + 7 = 8 + 10}_{①} = 2m + m + n + 1$$

$$3m - 2n + 7 = \underbrace{8 + 10 = 2m + m + n + 1}_{②}$$

De 1: $3m - 2n + 7 = 8 + 10 \Rightarrow \boxed{3m - 2n = 11}$ .... (I)

De 2: $8 + 10 = 2m + m + n + 1 \Rightarrow \boxed{17 = 3m + n}$ .... (II)

De las ecuaciones **(II)** y **(I)**: restamos miembro a miembro:

$$\begin{cases} 3m + n = 17 \\ 3m - 2n = 11 \end{cases}$$

$$-\textbf{M.A.M:}\ 3n = 6 \Rightarrow \therefore \boxed{n = 2}$$

Reemplazamos el valor de **n = 2**; en **(I)**:

$$3m - 2(2) = 11 \Rightarrow 3m = 15 \Rightarrow \therefore \boxed{m = 5}$$

Luego: Los valores de "m" y "n" son: 5 y 2 ; respectivamente.

3. Si se cumple la siguiente identidad: $4(2x - 1) \equiv m(x + 2) + n(x - 2)$
Hallar los valores de "m" y "n".

Resolución:

Primer Método:

Desarrollando los dos miembros; se obtiene:

$$8x - 4 \equiv mx + 2m + nx - 2n$$

Dandole una forma adecuada al segundo miembro , se tiene:

$$8x - 4 \equiv (m + n)x + (2m - 2n)$$

Por ser identicos:

$$\text{i)}\ m + n = 8 \quad ; \quad \text{ii)}\ 2m - 2n = -4 \Rightarrow \therefore \boxed{m - n = -2}$$

Sumamos miembro a miembro **(i)** y **(ii)**:

$$\begin{cases} m + n = 8 \\ m - n = -2 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}\ \textbf{M.A.M:}\ 2m = 6 \Rightarrow \therefore \boxed{m = 3}$$

Reemplazamos el valor de **m = 3**; en **(i)**

$$3 + n = 8 \Rightarrow \therefore \boxed{n = 5}$$

Segundo Método:

Por ser una identidad; podemos darle valores numéricos a la variable "x".

$$4(2x - 1) \equiv m(x + 2) + n(x - 2)$$

Para: $x = 2$ $\quad 4(2\cdot2 - 1) \equiv m(2+2) + n(2-2)$

$$12 \equiv 4m \Rightarrow \therefore \boxed{m = 3}$$

Para: $x = -2$ $\quad 4[2(-2) - 1] \equiv m\underbrace{(-2+2)}_{0} + n(-2-2)$

$$-20 \equiv m(-4) \Rightarrow \therefore \boxed{m = 5}$$

> ***Nota:***
>
> ***Los valores que se le puede dar a la variable queda a criterio de cada uno de nosotros.***

4. Calcular la suma de los coeficientes del siguiente polinomio homogeneo en: "x"; "y"; "z" y "w". Si: $P(x;y;z;w) = ax^{a^b} + by^{c^a} + cz^{(\sqrt{c})^{\sqrt{c}}} - w^{(ab)^a}$

Resolución:

Por ser homogeneo, se debe cumplir que :

$$a^b = c^a = \left(\sqrt{c}\right)^{\sqrt{c}} = (ab)^a$$

(③ relaciona a^b con c^a; ① relaciona c^a con $\left(\sqrt{c}\right)^{\sqrt{c}}$; ② relaciona c^a con $(ab)^a$)

> ***Recuerda que:***
>
> Si: $\boxed{a = \sqrt{N}}$
>
> Entonces: $\boxed{a^2 = N}$

De 1: $c^a = \left(\sqrt{c}\right)^{\sqrt{c}} \Rightarrow c^a = c^{\frac{\sqrt{c}}{2}} \Rightarrow a = \dfrac{\sqrt{c}}{2} \Rightarrow 2a = \sqrt{c}$

$$\therefore \boxed{4a^2 = c} \text{ .... (I)}$$

De 2: $c^{\not a} = (ab)^{\not a} \Rightarrow \boxed{c = ab}$ .... **(II)**

Remplazamos **(II)** en **(I)**: $4\not a^{\not 2} = \not ab \Rightarrow \boxed{4a = b}$ .... **(III)**

De 3: $a^b = c^a \Rightarrow a^{4\not a} = c^{\not a} \Rightarrow \boxed{a^4 = c}$ .... **(IV)**

Igualamos las expresiones **(I)** en **(IV)** :

$4a^2 = a^4 \Rightarrow 4 = a^2 \Rightarrow \pm\sqrt{4} = a \Rightarrow \therefore \boxed{2 = a}$ **(Sólo tomamos el valor positivo)**

Reemplazamos el valor de **a = 2**; en **(I)**:

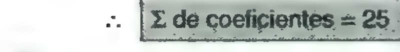
$$4a^2 = c \Rightarrow 4(2)^2 = c \Rightarrow \therefore \boxed{16 = c}$$

Remplazamos el valor de **a = 2** ; en **(III)**:

$$4a = b \Rightarrow 4(2) = b \Rightarrow \therefore \boxed{8 = b}$$

Luego del polinomio: $P(x;y;z;w) = \mathbf{a}x^{a^b} + \mathbf{b}y^{c^a} + \mathbf{c}z^{(\sqrt{c})^{\sqrt{c}}} - \mathbf{1}w^{(ab)^a}$; calculamos la suma de sus coeficientes.

$$\Sigma \text{ de coeficientes} = a + b + c - 1 = 2 + 8 + 16 - 1 = 25$$



$\therefore$ $\boxed{\Sigma \text{ de coeficientes} = 25}$

5. Calcular : "p" y "q" si se cumple que: $27 + 8x \equiv p(x + 4) + q(2x + 3)$

Resolución:

En primer lugar, efectuamos los productos indicados;

$$27 + 8x \equiv px + 4p + 2qx + 3q$$

$$8x + 27 \equiv (p + 2q)x + (4p + 3q)$$

En segundo lugar, hacemos comparación de términos :

i) $8 = p + 2q \Rightarrow \boxed{p = 8 - 2q}$

ii) $27 = 4p + 3q$

Reemplazamos **(i)** en **(ii)**: $27 = 4(8 - 2q) + 3q$

$$27 = 32 - 8q + 3q \Rightarrow 5q = 5 \Rightarrow \therefore \boxed{q = 1}$$

Reemplazamos el valor de **q = 1**; en **(i)** :

$$p = 8 - 2(1) \Rightarrow \therefore \boxed{p = 6}$$

Luego : **Los valores de "p" y "q" son: 6 y 1 ; respectivamente** ***Rpta***

Otra forma:

Calcular : "p" y "q" si se cumple que: $27 + 8x \equiv p(x + 4) + q(2x + 3)$

Resolución:

Recuerda que para este tipo de ejercicios, tu puedes dar cualquier valor numérico a la variable "x"; pero con la condición que estos valores sean pequeños, veamos:

Para: $\boxed{x=-4}$ $\quad 27+8x \equiv p(x+4)+q(2x+3)$

$$27+8(-4) \equiv p(\underbrace{-4+4}_{0})+q[2(-4)+3]$$

$$-5 \equiv -5q \;\Rightarrow\; \therefore\; \boxed{q=1}$$

Para: $\boxed{x=0}$ $\quad 27+8x \;\; p(x+4)+q(2x+3)$

$$27+8(0) \equiv p(0+4)+q(2\cdot 0+3)$$

$$27 \equiv 4p+3q$$

Reemplazamos el valor de **q = 1**; en esta última expresión:

$$27=4p+3(1) \;\Rightarrow\; 24=4p \;\Rightarrow\; \therefore\; \boxed{p=6}$$

Luego: $\boxed{\text{Los valores de "p" y "q" son: 6 y 1 respectivamente}}$ ***Rpta***

6. Si el polinomio es completo y ordenado en forma decreciente :

$$P(x;y)=4x^{m-2}y^{4-n}-\frac{1}{2}x^{n+1}y^{m-3}-\sqrt{2}x^{m-4}y^{n}+8$$

Hallar el valor de: m^{n+1}

Resolución:

Por ser completo y ordenado en forma decreciente, debe cumplirse que :

i) $m-4=1 \;\Rightarrow\; \therefore\; \boxed{m=5}$

ii) $n+1=2 \;\Rightarrow\; \therefore\; \boxed{n=1}$

$$P(x;y)=4x^{\overset{=3}{\boxed{m-2}}}y^{4-n}-\frac{1}{2}x^{\overset{=2}{\boxed{n+1}}}y^{m-3}-\sqrt{2}x^{\overset{=1}{\boxed{m-4}}}y^{n}+8x^{0}$$

Luego, reemplazamos los valores hallados, en la expresión:

$$m^{n+1}=5^{1+1}=5^{2}=\boxed{25}$$ ***Rpta***

7. El polinomio dado a continuación es completo y ordenado en forma ascendente, dar el valor de: "p + q + b + c"

$$P(x)=mx^{q+2}+nx^{q+b+c}+2x^{b-c+p}-3x^{p+q}$$

Resolución:

Por ser completo y ordenado en forma ascendente, debe cumplirse que :

i) $q + 2 = 0 \Rightarrow \therefore \boxed{q = -2}$

ii) $q + b + c = 1 \Rightarrow \boxed{-2 + b + c = 1} \Rightarrow \therefore \boxed{b + c = 3}$

$$P(x) = mx^{\boxed{q+2}=0} + nx^{\boxed{q+b+c}=1} + 2x^{\boxed{b-c+p}=2} - 3x^{\boxed{p+q}=3}$$

iii) $b - c + p = 2$

iv) $\boxed{p + q = 3}$

Luego, calculamos el valor de la expesión :

$$\boxed{p + q + b + c = 3 + 3 = 6}$$ ***Rpta***

(8.) Dado el polinomio homogéneo:

$P(x,y) = x^a + x^{b+c} + x^b y^c + x^c y^b + x^d y^e + x^e y^d$; si la suma de todos los exponentes del polinomio es 54. Calcular el valor de: "a + b + c + d + e"

Resolución:

Por ser homogeneo, se debe cumplir que:

$$\boxed{a = b + c = b + c = c + b = d + e = e + d}$$

Donde: i) $\boxed{a = b + c}$ ii) $\boxed{d + e = b + c}$

Del enunciado:

Suma de todos los exponentes del polinomio es 54; osea:

$$\boxed{a + (b + c) + (b + c) + (c + b) + (d + e) + (e + d) = 54} \quad \text{.......... (I)}$$

Reemplazamos **(i)** y **(ii)** en **(I)**:

$$(b + c) + (b + c) + (b + c) + (b + c) (b + c) + (b + c) = 54$$

$$6(b + c) = 54 \Rightarrow \boxed{b + c = 9}$$

Luego, hallamos el valor de la expresión incognita :

$$\boxed{a + b + c + d + e = (b + c) + (b + c) + (b + c) = 3\underbrace{(b + c)}_{9} = 27}$$ ***Rpta***

Ejercicios Propuestos: Grupo 9

1. ¿Cuántos términos tiene el siguiente polinomio:

$P(x) = x^{2n-1} + x^{2n-2} + x^{2n-3} + \ldots\ldots\ldots + x^3 + x^2 + x + 1$

a) 2n b) 2n + 1 c) 3n d) 2n – 1 e) n

2. Si: $P(x;y) = \sqrt{5}x^m - \frac{3}{4}x^m y^{n-1} - y^{16-n}$; es un polinomio homogeneo.

Hallar el valor de: "m + n"

a) 8 b) 1 c) 7 d) 9 e) 6

3. Hallar el valor de "m" si el polinomio: $P(x;y) = 2x^{2m-5}y^{4n} + 3x^{2m-4n}y^3 + x^4y^9$; es homogeneo:

a) 5 b) 13 c) 7 d) 8 e) N.A

4. Calcular: "m" y "n" ; para que el polinomio:

$Q(x;y) = x^{2(m+n)}y^{m+4} - x^{3m+n+1}y^{2n+1} + x^{n+5}y^{2m+3n}$; sea homogéneo.

a) 5 y 2 b) 6 y 3 c) 4 y 1 d) 7 y 3 e) 6 y 2

5. Calcular la suma de coeficientes del polinomio:

$P(x;y;z) = ax^{n^5+7}y^{2n^2+3} + bx^{2n^2+17}y^{25} + x^a y^b$; sabiendo que es homogéneo.

a) 50 b) 42 c) 51 d) a + b e) 48

6. Hallar el valor de: $(a+b)^{b-a}$; si el siguiente polinomio:

$R(x;y) = x^{a+b} + 3x^b y^{2a-3} - x^a y^{3b-10} + 5y^{3b-7}$; es homogéneo.

a) 4 b) 8 c) 16 d) 32 e) 64

7. Calcular la suma de coeficientes del polinomio:

$Q(x,y) = nx^{n+5} + 3x^n y^m + mx^{m+3}$; si es homogéneo.

a) 10 b) 11 c) 12 d) 13 e) 14

8. Si el polinomio: $M(x) = x^{m-10} + 5x^{m-n+5} + 2x^{p-n+6}$; es completo y ordenado en forma descendente. Hallar el valor de : "m + n + p"

a) 38 b) 28 c) 26 d) 25 e) 36

9. Calcular el valor de "a" en el siguiente polinomio completo y ordenado en forma ascendente.

$$Q(x) = x^{a+b} + 3x^{b+c} - x^{c+d} + x^{d+1}$$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) –1

10. Si el polinomio: $P(x) = x^{b-1} + x^{a+c} + x^{a+b} + x^{c+d}$; es completo y ordenado ascendente. Calcular: "a + b + c + d"

a) 1 b) –1 c) 2 d) –2 e) 5

11. Si se cumple la siguiente identidad: $2x + 27 \equiv m(x+3) - n(x-4)$; Hallar los valores de "m" y "n".

a) 4 y 2 b) 5 y3 c) 6 y 4 d) 5 y –3 e) 4 y 1

12. Si: $2x^2 + 5x - 1 \equiv (Ax + B)(x - 1) + c(x^2 + x + 1)$; calcular: "A + B – C"

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

13. Si se cumple: $(x+1)^5 + x + 2 \equiv (x^2 + Mx + 3)(x^3 + 2x^2 + x + 1)$;
Calcular el valor de: "M"

a) 2 b) 3 c) –3 d) 4 e) –5

14. Si: $a(x+b) + b(x+a) \equiv 26 + x$; Hallar el valor de: $R - \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

a) 1 b) 2 c) 13 d) 1/13 e) 1/26

15. Dado el siguiente polinomio identicamente nulo.

$Q(x) = b(x^2 + x) - 2ax^2 - 3cx + c - a + 1$; calcular el valor de : "ac – b"

a) 0 b) –1 c) –2 d) 1 e) 2

16. Indicar si las afirmaciones siguientes son verdaderas **(V)** o falsas **(F)**.

I. Un polinomio completo siempre es ordenado.
II. Un polinomio completo de grado "n" posee (n + 1) términos
III. Un polinomio puede tener grado negativo.
IV. El grado de toda constante siempre es cero.

a) VVVV b) FVVV c) VFVF d) FFVV e) FVFV

CLAVE DE RESPUESTAS : GRUPO 9

1. a	5. c	9. e	13. d
2. d	6. c	10. e	14. d
3. c	7. b	11. b	15. a
4. a	8. a	12. a	16. e

EJERCICIOS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA
Organizados por las Academias:
César Vallejo, Trilce, Pitágoras, Sigma, Alfa.

Ejercicio 1: Hallar: (m – n) , si el polinomio:

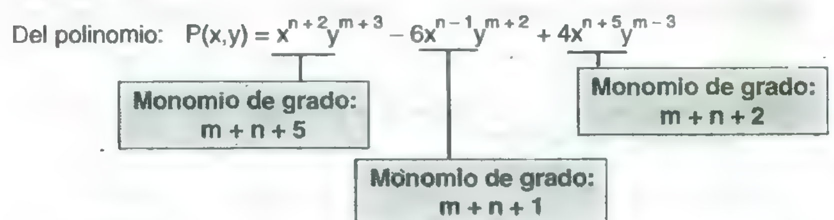
$$P(x,y) = x^{n+2}y^{m+3} - 6x^{n-1}y^{m+2} + 4x^{n+5}y^{m-3}$$

Es de grado absoluto 15 y el grado relativo respecto a "x" es 7.

a) 6 b) 5 c) 4 d) 8 e) 7

Resolución:

Del polinomio: $P(x,y) = x^{n+2}y^{m+3} - 6x^{n-1}y^{m+2} + 4x^{n+5}y^{m-3}$



Del enunciado:

✠ Grado absoluto del polinomio es 15.

$$m + n + 5 = 15 \Rightarrow \boxed{m + n = 10} \text{.............} (1)$$

✠ Grado relativo respecto a "x" es 7.

$$n + 5 = 7 \Rightarrow \boxed{n = 2}$$

Reemplazamos el valor de **n = 2**, en la expresión **(1)**:

$$m + 2 = 10 \Rightarrow m = 8$$

Luego: $m - n = 8 - 2 = 6 \Rightarrow \boxed{m - n = 6}$ ***Rpta. a***

Ejercicio 2: Calcular el valor de "m", sabiendo que la expresión es de grado 32.

$$\sqrt[m^m]{y^{m^{3m}} \cdot \sqrt[m^m]{x^{m^{4m}}}}$$

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

Resolución:

Aplicando la propiedad: $\boxed{\sqrt[q]{A^p} = A^{\frac{p}{q}}}$; obtenemos:

$$\sqrt[m^m]{x^{m^{3m}} \cdot \sqrt[m^m]{x^{m^{4m}}}} = \sqrt[m^m]{x^{m^{3m}} \cdot x^{\frac{m^{4m}}{m^m}}}$$

Recuerda que:

- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$$= \sqrt[m^m]{x^{m^{3m}} \cdot x^{m^{4m-m}}} = \sqrt[m^m]{x^{m^{3m}} \cdot x^{m^{3m}}}$$

$$= \sqrt[m^m]{x^{2m^{3m}}} = x^{2\left(\frac{m^{3m}}{m^m}\right)}$$

$$= x^{2m^{3m-m}}$$

$$= x^{2m^{2m}} = \boxed{32}$$

$$2m^{2m} = 32 \Rightarrow m^{2m} = 16 \Rightarrow m^{2m} = 2^4 = 2^{2(2)}$$

Luego: Por comparación de bases y exponentes: $m = 2$ **Rpta. a**

Rpta. a

Otra forma:

Calcular el valor de "m" sabiendo que la expresión es de grado 32.

$$\sqrt[m^m]{x^{m^{3m}} \cdot \sqrt[m^m]{x^{m^{4m}}}}$$

Resolución:

La expresión dada, se puede escribir de la manera siguiente:

$$\sqrt[m^m]{x^{m^{m \cdot 3}} \cdot \sqrt[m^m]{x^{m^{m \cdot 4}}}} = \sqrt[m^m]{x^{(m^m)^3} \sqrt[m^m]{x^{(m^m)^4}}}$$

Hacemos que: $\boxed{m^m = a}$ **(cambio de variable)**

$$= \sqrt[a]{x^{a^3} \cdot \sqrt[a]{x^{a^4}}} = \sqrt[a]{x^{a^3} \cdot x^{a^3}}$$

$$= \sqrt[a]{x^{2a^3}} = x^{2a^2} = \boxed{32}$$

Luego: $2a^2 = 32 \Rightarrow a^2 = 16$

$$(m^m)^2 = 2^4 \Rightarrow m^m = 2^2 \Rightarrow \therefore \boxed{m = 2}$$ **Rpta. a**

Ejercicio 3: Si el polinomio es identicamente nulo:

$$P(x) = ax^3 + 2bx^2 - x + 1 - 3x^3 + 2x^2 + cx - 2d$$

Calcular el valor de: $\dfrac{a+b+c}{d}$

a) 2 **b)** 3 **c)** 5 **d)** 7 **e)** 6

Resolución:

Agrupando términos, obtenemos:

$$P(x) = (ax^3 - 3x^3) + (2bx^2 + 2x^2) + (cx - x) + (1 - 2d)$$

$$P(x) = \underline{(a-3)}x^3 + \underline{(2b+2)}x^2 + \underline{(c-1)}x + \underline{(1-2d)}$$

Como el polinomio es identicamente nulo, sus coeficientes deben ser nulos, veamos:

*) $a - 3 = 0 \Rightarrow \therefore \boxed{a = 3}$;	*) $2b + 2 = 0 \Rightarrow \therefore \boxed{b = -1}$
*) $c - 1 = 0 \Rightarrow \therefore \boxed{c = 1}$;	*) $1 - 2d = 0 \Rightarrow \therefore \boxed{d = 1/2}$

Luego. los valores hallados los reemplazamos en la expresión incognita:

$$\frac{a+b+c}{d} = \frac{(3)+(-1)+(1)}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

$$\therefore \boxed{\frac{a+b+c}{d} = 6}$$ ***Rpta. e***

Ejercicio 4: Si: $P(x) = 3x^2 + mx + p - 3x$; $Q(x) = ax^2 - x + nx + 5 - 2x^2$; son equivalentes: $P(x) \equiv Q(x)$. Calcular el valor de: "$a + p + m - n$"

a) 12 **b)** 10 **c)** 7
d) 8 **e)** No se puede determinar

Resolución:

Como los polinomios P(x) y Q(x) ; son equivalentes:

$$3x^2 + mx + p - 3x \equiv ax^2 - x + nx + 5 - 2x^2$$

$$3x^2 + (m-3)x + p \equiv (a-2)x^2 + (n-1)x + 5$$

Por comparación de términos:

i) $a - 2 = 3 \Rightarrow \therefore \boxed{a = 5}$

ii) $m - 3 = n - 1 \Rightarrow \therefore \boxed{m - n = 2}$

iii) $\boxed{p = 5}$

Luego; reemplazamos los valores hallados, en la expresión incognita:

$a + p + m - n = 5 + 5 + 2 = 12 \Rightarrow \therefore \boxed{a + p + m - n = 12}$ ***Rpta. a***

Ejercicio 5: Hallar la suma de los coeficientes de :

$$M(x;y;z) = a^3x^{a^b} - b^2y^{b^a} + abz^{a^{a-b}}$$

Si es un polinomio homogéneo.

a) 64 b) 68 c) 72 d) 56 e) 60

Resolución:

Por ser un polinomio homogéneo, debe cumplirse que:

$$\underbrace{a^b = b^a}_{(2)} = a^{a-b} \qquad (1):\ a^b = a^{a-b}$$

De 1: $a^b = a^{a-b} \Rightarrow b = a - b \Rightarrow \boxed{2b = a}$ .... **(I)**

De 2: $\boxed{a^b = b^a}$ .... **(II)**

Reemplazamos **(I)** en **(II)**:

$$(2b)^b = b^{2b} \Rightarrow 2b = b^2 \Rightarrow \therefore \boxed{2 = b}$$

Reemplazamos el valor de **b = 2**; en **(I)**:

$$2(2) = a \Rightarrow \therefore \boxed{a = 4}$$

Luego, calculamos la suma de los coeficientes de dicho polinomio:

$$\Sigma \text{ de coeficientes} = a^3 - b^2 + ab = 4^3 - 2^2 + 4 \cdot 2$$

$\therefore$ $\boxed{\Sigma \text{ de coeficientes} = 68}$ ***Rpta. b***

Ejercicio 6: El polinomio es homogéneo: $P(x;y) = 9x^3y^5 - 7x^my^n - 4y^{4p}$
$m, n, p \in \mathbb{Z}$. Además: G.R.(x) = 6 ; Hallar: "m + n + p"

a) 3 b) 5 c) 6 d) 8 e) 10

Resolución:

Por ser un polinomio homogéneo , debe cumplirse que:

$$3 + 5 = m + n = 4p \Rightarrow \boxed{8 = m + n = 4p}$$ .... **(I)**

Además: G.R(x) = 6 $\Rightarrow$ $\boxed{m = 6}$ .... **(II)**

Reemplazamos **(II)** en **(I)**:

$$8 = m + n \Rightarrow 8 = 6 + n \Rightarrow \therefore \boxed{n = 2}$$

De la expresión (I): $8 = 4p \Rightarrow \therefore \boxed{p = 2}$

Luego; hallamos el valor de: "m + n + p" = 6 + 2 + 2 = 10

$$\boxed{m + n + p = 10}$$ ***Rpta. e***

Ejercicio 7: Sea: $M(x;y;z) = x^{2m}yz - 5y^{3m}z^{n+2} + (7-n)xz^{4n}$;

Si: G.R.(x) = 6 ; suma de coeficientes: cero. Hallar el G.A. (M).

a) 8 **b)** 13 **c)** 14 **d)** 12 **e)** 16

Resolución:

✠ $\underbrace{\Sigma \text{ de Coeficientes}} = 0$

$1 - 5 + (7 - n) = 0 \Rightarrow \therefore \boxed{n = 3}$

✠ G.R(x) = 6 $\quad$ $\not{2}m = \not{6} \Rightarrow \therefore \boxed{m = 3}$

Del polinomio: $M(x;y;z) = x^{2m}yz - 5y^{3m}z^{n+2} + (7-n)xz^{4n}$

Monomio de grado: $2m + 1 + 1$

Monomio de grado: $3m + n + 2$

Monomio de grado: $1 + 4n$

Luego, el grado absoluto **(G.A.)** del polinomio "M" será:

$$\boxed{G.A\,(M) = 3m + n + 2 = 3(3) + 3 + 2 = 14}$$ ***Rpta. c***

Ejercicio 8: Calcular la suma de coeficientes del polinomio :

$P(x) = ax^{n^2-1} + nx^{n+b} + bx^{a+d} + dx^{d-3}$; es completo y ordenado descendente.

a) 3 **b)** 6 **c)** 2 **d)** 1 **e)** 5

Resolución:

Por ser completo y ordenado, se debe cumplir que :

i) $d - 3 = 0 \Rightarrow \therefore \boxed{d = 3}$	**ii)** $a + d = 1$
iii) $n + b = 2$	**iv)** $n^2 - 1 = 3$

Luego, la suma de coeficientes será:

$$\Sigma \text{ de coeficientes} = a + n + b + d = (a + d) + (n + b) = 1 + 2$$

$\therefore$ $\boxed{\Sigma \text{ de coeficientes} = 3}$ ***Rpta. a***

Ejercicio 9: Si se cumple:

$$A(x-1)(x-2) + B(x-2)(x-3) + C(x-3)(x-1) \equiv 9x^2 - 37x + 34$$

Calcular el valor de: "A + B + C"

A) 7 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 11

Resolución:

Para este tipo de ejercicios es recomendable dar valores a "x" pero que dichos valores anulen términos, por decir si queremos anular el término: $A(x-1)(x-2)$; "x" debe tomar valor de 1 ó 2 ; aunque ya se nos ha dicho que podemos dar cualquier valor.

Para: $\boxed{x = 1}$

$$A(x-1)(x-2) + B(x-2)(x-3) + C(x-3)(x-1) \equiv 9x^2 - 37x + 34$$

$$A\underbrace{(1-1)}_{0}(1-2) + B(1-2)(1-3) + C(1-3)\underbrace{(1-1)}_{0} \equiv 9(1)^2 - 37(1) + 34$$

$$2B \equiv 6 \Rightarrow \therefore \boxed{B = 3}$$

Para: $\boxed{x = 2}$

$$A(x-1)(x-2) + B(x-2)(x-3) + C(x-3)(x-1) \equiv 9x^2 - 37x + 34$$

$$A(2-1)\underbrace{(2-2)}_{0} + B\underbrace{(2-2)}_{0}(2-3) + C(2-3)(2-1) \equiv 9(2)^2 - 37(2) + 34$$

$$-C \equiv -4 \Rightarrow \therefore \boxed{C = 4}$$

Para: $\boxed{x = 3}$

$$A(x-1)(x-2) + B(x-2)(x-3) + C(x-3)(x-1) \equiv 9x^2 - 37x + 34$$

$$A(3-1)(3-2) + B(3-2)\underbrace{(3-3)}_{0} + C\underbrace{(3-3)}_{0}(3-1) \equiv 9(3)^2 - 37(3) + 34$$

$$2A \equiv 4 \Rightarrow \therefore \boxed{A = 2}$$

Luego; hallamos el valor de:

$A + B + C = 2 + 3 + 4 = 9 \Rightarrow \therefore$ $\boxed{A + B + C = 9}$ ***Rpta. c***

Ejercicio 10: Hallar: "a + b" con la condición de que el siguiente polinomio:

$(x + 3)^2(a + 6) + (b + 2)^2(x - 5)$; sea identicamente nulo.

a) –5 **b)** –6 **c)** –8 **d)** –10 **e)** –12

Resolución:

Aplicando: $\boxed{(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2}$; obtenemos:

$$(x + 3)^2(a + 6) + (b + 2)^2(x - 5) = (x^2 + 6x + 9)(a + 6) + (b + 2)^2x - 5(b + 2)^2$$

$$= (a + 6)x^2 + 6(a + 6)x + 9(a + 6) + (b + 2)^2x - 5(b + 2)^2$$

$$= \underbrace{(a + 6)}_{=0}x^2 + [\underbrace{6(a + 6) + (b + 2)^2}_{=0}]x + [\underbrace{9(a + 6) - 5(b + 2)^2}_{=0}]$$

Por ser identicamente nulo, debe cumplirse que :

i) $a + 6 = 0 \Rightarrow \therefore \ a = -6$

ii) $6(a + 6) + (b + 2)^2 = 0 \Rightarrow 6(\underbrace{-6 + 6}_{0}) + (b + 2)^2 = 0$

$$(b + 2)^2 = 0 \Rightarrow \therefore \ \boxed{b = -2}$$

iii) $9(a + 6) - 5(b + 2)^2 = 0 \Rightarrow 9(\underbrace{-6 + 6}_{0}) - 5(\underbrace{-2 + 2}_{0}) = 0$

$$0 - 0 = 0 \ \ \textbf{(cumple)}$$

Luego, hallamos el valor de: "a + b" = (–6) + (–2) = –8

$\boxed{a + b = -8}$ ***Rpta. c***

2.4 OPERACIONES CON POLINOMIOS

2.4.1 ADICIÓN DE POLINOMIOS:

Para sumar dos o más polinomios se coloca su polinomio debajo de otro ordenándolos en columnas de términos semejantes y luego se efectúa la reducción de dichos términos.

Ejemplo (1): Dados los polinomios: $A = 3x^2 - 2xy + 5y^2$; $B = x^2 + 3xy - 2y^2$; hallar: $A + B$

Resolución:

$$\left.\begin{array}{r} A = 3x^2 - 2xy + 5y^2 \\ B = \;\; x^2 + 3xy - 2y^2 \end{array}\right\} +$$

$$\Rightarrow A + B = 4x^2 + xy + 3y^2 \quad \textit{Rpta.}$$

Recuerda que:

Términos Semejantes son aquellos que tienen la misma parte literal, y dicha parte literal afectada de los mismos exponentes.

Ejemplos:

a) $5x^3y^2$; $-3x^3y^2$; $2x^3y^2$

b) $8xy^2z^3$; $7xy^2z^3$; $-4xy^2z^3$

Ejemplo (2): Dados los polinomios: $A = 5x^3 - 2x^2 + 6x - 9$; $B = -2x^3 + 6x^2 - 4x + 6$ y $C = x^3 - 3x^2 + 3x + 8$. Hallar: $A + B + C$

Resolución:

$$\left.\begin{array}{r} A = 5x^3 - 2x^2 + 6x - 9 \\ B = -2x^3 + 6x^2 - 4x + 6 \\ C = \;\; x^3 - 3x^2 + 3x + 8 \end{array}\right\} +$$

$$\Rightarrow A + B + C = 4x^3 + x^2 + 5x + 5 \quad \textit{Rpta.}$$

2.4.2 SUSTRACCIÓN DE POLINOMIOS:

Se llama resta de dos polinomios al polinomio que se obtiene al sumar al minuendo el opuesto del sustraendo.

Sean los polinomios: A y B. Entonces: $\boxed{A - B = A + (-B)}$

Ejemplo (1): Hallar: $P - Q$, sabiendo que: $P = 6x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 7x - 4$;

$Q = 4x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 7$

Resolución:

$$\left.\begin{array}{rl} P = & 6x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 7x - 4 \\ -Q = & -4x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 3x - 7 \end{array}\right\} +$$

$$\Rightarrow P - Q = 2x^4 - x^3 + 2x^2 + 10x - 11 \quad \textbf{Rpta.}$$

Ejemplo (2): Hallar: A - B; sabiendo que: $A = 9x^3 - 5x^2 + x + 2$; $B = -5x^3 + 2x^2 - 3x - 1$

Resolución:

$$\left.\begin{array}{rl} A = & 9x^3 - 5x^2 + x + 2 \\ -B = & 5x^3 - 2x^2 + 3x + 1 \end{array}\right\} +$$

$$\Rightarrow A - B = 14x^3 - 7x^2 + 4x + 3 \quad \textbf{Rpta.}$$

Recuerda que:

Los signos de agrupación o de colección son:

Paréntesis ( ) ;

Corchete [ ] ;

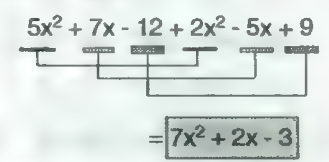
Llaves { } y

barra ———

Observación: *"Un signo de agrupación precedido del signo menos (-) se elimina, cambiando de signo a todos los términos escritos dentro del signo de agrupación".*

Ejemplo: Efectuar: $5x^2 + 7x - 12 - (-2x^2 + 5x - 9)$

Resolución: $5x^2 + 7x - 12 + 2x^2 - 5x + 9$



$= \boxed{7x^2 + 2x - 3}$ **Rpta.**

Ejemplo (3): Hallar: A - B; sabiendo que: $A = 4x^3 - 5x^2 + x - 8$; $B = -3x^2 - 12$

Resolución:

$$\left.\begin{array}{rl} A = & 4x^3 - 5x^2 + x - 8 \\ -B = & \quad\quad + 3x^2 \quad + 12 \end{array}\right\} +$$

$$\Rightarrow A - B = 4x^3 - 2x^2 + x + 4 \quad \textbf{Rpta.}$$

Ejemplo (4): Hallar: A - B; sabiendo que: $A = 10x^2 + 7x^4 + 6x - 9$; $B = -8x + 5x^3 + 4$

Resolución:

En primer lugar ordenamos los dos polinomios con respecto a la variable **x** en forma descendente.

$$\left.\begin{array}{rl} A = & 7x^4 + \quad\quad 10x^2 + 6x - 9 \\ -B = & \quad -5x^3 + \quad\quad + 8x - 4 \end{array}\right\} +$$

$$\Rightarrow \quad A - B = 7x^4 - 5x^3 + 10x^2 + 14x - 13 \quad \textit{Rpta.}$$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 10

Ejercicio 1 : Dado los polinomios:

$A = -3x^4 + 5x^2 - 2x^3 - 6 + x$
$B = 6x^2 - 3x^3 + 8 - 3x + 5x^4$
$C = 9x^4 - 6x^2 + 13x - 4 + x^3$
Calcular: $(A + B + C)$

Resolución:

Rpta. $11x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 11x - 2$

Ejercicio 2 : Dados los polinomios:

$A = 3x^5 - 2x^4 + 6x + 16$
$B = 10x^4 + 2x^3 - 5x + 4$
$C = -2x^5 + 8x^4 - x^3 + 12$
Calcular: $(A + B - C)$

Resolución:

Rpta. $5x^5 + 3x^3 + x + 8$

Ejercicio 3 : ¿Cuánto le falta a $7x^3 + 3x - 8x^2 + 4$; para ser igual a $4x + 10x^2 + 7x^3 - 5$

Resolución:

Rpta. $18x^2 + x - 9$

Ejercicio 4 : Si:

$9x^4 + 5x + 3x^3 - 4x^2 + 6 = A + 8x^4 + 4x^3 - 8 - 4x^2 + 4x$

Hallar el polinomio "A".

Resolución:

Rpta. $x^4 - x^3 + x + 14$

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE OPERACIONES CON POLINOMIOS

Dado los Polinomios:

$A = -3x^5 + 2x^4 - 7x^2 + 8x - 9;$	$B = 5x^4 - 8x^3 + 10x^2 - 3x + 4$
$C = 9x^5 + 3x^2 - 6$	$D = 2x^4 + 5x^3 - 4x^2$

Halla:

a) $A + B =$ **b)** $C + D =$ **c)** $A + B + C =$

d) $B + C + D =$ **e)** $A + B + D =$ **f)** $A + C + D =$

g) $A - B =$ **h)** $C - D =$ **i)** $(C + B) - A =$

j) $(B + D) - A =$ **k)** $(A - B) + C =$ **l)** $(A + B + D) - C =$

Dados los polinomios:

$A = 3x^4 - 2x^2 + 6x^3 + 8;$	$B = 7x^2 - 4x + 11;$
$C = -7x + 5x^3$	$D = x^2 - 4x^4 + 1$

Halla:

a) $A + B + D =$ **b)** $A + B + C =$ **c)** $B + C + D =$

d) $(A - B) + D =$ **e)** $(B + C) - D =$ **f)** $(B - D) + A =$

g) $(A + B) - D =$ **h)** $(A + B) - (C + D) =$ **i)** $(A + C) + (B - D) =$

Elimina los signos de agrupación y halla el resultado:

a) $6x^4 - (3x^4 - 2x + 1) =$ **b)** $2x^3 - (-4x - 2x^3) =$

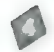
c) $7x^2 - (6x - 5 - 2x^2) =$ **d)** $8x^3 - 3x^2 + 1 + (2x^3 + 3x^2 + 5) =$

e) $5x^3 - (2x^3 - 4) + (3x^2 + 6) =$ **f)** $3x^4 - [-3x^4 + 6x^2 + x - (2x^4 + 3)] =$

g) $8x^2 + [-5x^2 - (2x^2 - 3x + 4)] =$ **h)** $-9x^3 + 5x^2 - 8 - [-4x^3 + 3x^2 + (6x^3 - 4x^2 - 2)] =$

En cada ejercicio, halla el polinomio A, sabiendo que:

Ejemplo: $8x^3 + 5x^2 + 6 + A = 10x^3 - 3x^2 + 2$

 En cada ejercicio, halla el polinomio A, sabiendo que:

Ejemplo: $8x^3 + 5x^2 + 6 + A = 10x^3 - 3x^2 + 2$

Resolución:

Pasamos los términos que acompañan a A al segundo miembro, cambiándoles de signo así:

$$A = 10x^3 - 3x^2 + 2 - 8x^3 - 5x^2 - 6$$

$\therefore$ $A = 2x^3 - 8x^2 - 4$ ***Rpta.***

a) $3x^2 + 6x - 4 + A = 5x^2 - 4x + 3$

b) $A + 7x^3 - 4x = 5x^3 - 2x$

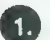
c) $A + 5x^2 - 10 = 3x^2 + 6$

d) $7x^3 - 8x^2 - 3x - A = 2x^3 + 4x^2 - 13$

e) $-6x^3 - 4x^2 + 6x + A = 3x^3 + 2x + 8$

f) $2x^4 - 9x^3 + 4x + 5 - A = -3x^4 + x^3 - 2x$

Clave de Respuestas



1.

a) $-3x^5 + 7x^4 - 8x^3 + 3x^2 + 5x - 5$

b) $9x^5 + 2x^4 + 5x^3 - x^2 - 6$

c) $6x^5 + 7x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 5x - 11$

d) $9x^5 + 7x^4 - 3x^3 + 9x^2 - 3x - 2$

e) $-3x^5 + 9x^4 - 3x^3 - x^2 + 5x - 5$

f) $6x^5 + 4x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 8x - 15$

g) $-3x^5 - 3x^4 + 8x^3 - 17x^2 + 11x - 13$

h) $9x^5 - 2x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 6$

i) $12x^5 + 3x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 11x + 7$

j) $3x^5 + 5x^4 - 3x^3 + 13x^2 - 11x + 13$

k) $6x^5 - 3x^4 + 8x^3 - 14x^2 + 11x - 19$

l) $-12x^5 + 9x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 5x + 1$

2.

a) $-x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 4x + 20$

b) $3x^4 + 11x^3 + 5x^2 - 11x + 19$

c) $-4x^4 + 5x^3 + 8x^2 - 11x + 12$

d) $-x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 4x - 2$

e) $4x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 11x + 10$

f) $7x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 4x + 18$

g) $7x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 4x + 18$

h) $7x^4 + x^3 + 4x^2 + 3x + 18$

i) $7x^4 + 11x^3 + 4x^2 - 11x + 18$

3.

a) $3x^4 + 2x - 1$

b) $4x^3 + 4x$

c) $9x^2 - 6x + 5$

d) $10x^3 + 6$

e) $6x^3 + 10$

f) $8x^4 - 6x^2 - x + 3$

g) $x^2 + 3x - 4$

h) $-11x^3 + 6x^2 - 6$

4. a) $A = 2x^2 - 10x + 7$ b) $A = -2x^3 + 2x$

c) $A = -2x^2 + 16$ d) $A = 5x^3 - 12x^2 - 3x + 13$

e) $A = 9x^3 + 4x^2 - 4x + 8$ f) $A = 5x^4 - 10x^3 + 6x + 5$

EJERCICIOS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA

Organizados por las Academias:
César Vallejo, Trilce, Pitágoras, Sigma, Alfa.

1. Sabiendo que: $A = 2x^2 - 5x + 1$; $B = x^2 + 3x - 1$ y $C = 2 - x + 3x^2$

Reducir la siguiente expresión: $2A - [2B - C + (3A - C + 2A)]$

A) $2x^2 - 5x + 1$ **B)** $2x^2 + x + 1$ **C)** $-2x^2 + 7x + 3$
D) $6x^2 - 2x + 7$ **E)** $x^2 + x - 3$

Resolución:

- En primer lugar, reducimos la expresión incógnita:

$$\begin{aligned} 2A-[2B-C+(3A-C+2A)] &= 2A-[2B-C+(5A-C)] \\ &= 2A-[2B-C+5A-C] \\ &= 2A-[5A+2B-2C] \\ &= 2A-5A-2B+2C \\ &= -3A-2B+2C \end{aligned}$$

- En segundo lugar, reemplazamos los valores de A, B y C en esta última expresión:

$$\begin{aligned} &= -3(2x^2-5x+1)-2(x^2+3x-1)+2(2-x+3x^2) \\ &= -\cancel{6x^2}+15x-3-2x^2-6x+2+4-2x+\cancel{6x^2} \\ &= \boxed{-2x^2+7x+3} \end{aligned}$$

Rpta. C

2. Si la diferencia entre: $(2x^3 + 8x^2 - 2x)$ y $(4x^3 - 2x^2 + 2)$, se le resta $(-2x^2 + 3x - 1)$. ¿Cuánto hay que agregar a la diferencia para obtener: $(-2x^3 + 2x^2 - 2x + 2)$.

A) $-10x^2 + 3x + 3$ B) $10x^2 - 7x + 1$ C) $8x^2 + 3x - 2$
D) $12x^2 - 5x - 3$ E) $7x^2 + 5x - 3$

Resolución:

- En primer lugar, hallamos la diferencia entre: $(2x^3 + 8x^2 - 2x)$ y $(4x^3 - 2x^2 + 2)$, veamos:

$$\text{Diferencia} = [\underbrace{(2x^3 + 8x^2 - 2x) - (4x^3 - 2x^2 + 2)}] - (-2x^2 + 3x - 1)$$

$$\therefore \quad \text{Diferencia} = -2x^3 + 12x^2 - 5x - 1$$

- En segundo lugar, llamemos "S" lo que hay que agregar a la diferencia para obtener: $(-2x^3 + 2x^2 - 2x + 2)$; osea:

$$(-2x^3 + 12x^2 - 5x - 1) + S = (-2x^3 + 2x^2 - 2x + 2)$$

$$S = (-2x^3 + 2x^2 - 2x + 2) + 2x^3 - 12x^2 + 5x + 1$$

$$\therefore \quad \boxed{S = -10x^2 + 3x + 3} \quad \textit{Rpta. A}$$

3. ¿Cuánto hay que sumarle a "M" para que sea igual a la diferencia de P y Q?.

$M = 1 - 4x - 2x^2$; $P = 3x^2 - 6x - 8$ y $Q = 5x^2 + x - 10$

A) $1 - 3x$ B) $2x + 3$ C) $5x$ D) $2 - 6x$ E) $3 - 2x$

Resolución:

- Sea "S" lo que hay que sumarle a "M" para que sea igual a la diferencia de P y Q; veamos:

$$(1 - 4x - 2x^2) + S = (3x^2 - 6x - 8) - (5x^2 + x - 10)$$

$$1 - 4x - 2x^2 + S = -2x^2 - 7x + 2$$

$$S = \cancel{-2x^2} - 7x + 2 - 1 + 4x \cancel{+2x^2}$$

$$\therefore \quad \boxed{S = 1 - 3x} \quad \textit{Rpta. A}$$

4. Hallar: $(F - E) + (8x^2y - 3y^2x)$, sabiendo que:

$E = 15x^2y - 12y^2x - 18xy$; $F = 16xy + 7x^2y - 9y^2x$

A) $8x^2y$ B) $16xy$ C) $34xy$ D) y^2x E) N.A.

Resolución:

- En primer lugar, hallamos (F - E):

$$F-E = (16xy+7x^2y-9y^2x)-(15x^2y-12y^2x-18xy)$$

$$F-E = 34xy-8x^2y+3y^2x$$

Luego, hallamos: $(F - E) + 8x^2y - 3y^2x$.

$$(34xy - \cancel{8x^2y} + \cancel{3y^2x}) + \cancel{8x^2y} - \cancel{3y^2x} = \boxed{34xy}$$ ***Rpta. C***

5. Si: $M=\frac{1}{7}\left(a+\frac{a+1}{6}\right)$; $N=\frac{1}{2}\left(3+\frac{a+1}{3}\right)$ señale en cuánto excede (M - N) a (N - M)

A) -1/7 B) -23/7 C) -18/7 D) -41/7 E) -98/7

Resolución:

Incógnita: En cuánto excede (M - N) a (N - M)

Incógnita: (M - N) - (N - M) = 2 (M - N) **...(I)**

Luego; calculamos: "M - N":

$$M-N = \frac{1}{7}\left(a+\frac{a+1}{6}\right)-\frac{1}{2}\left(3+\frac{a+1}{3}\right)$$

$$M-N = \frac{1}{7}\left(\frac{7a+1}{6}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{10+a}{3}\right)$$

$$M-N = \frac{7a+1}{42}-\frac{10+a}{6} = \frac{7a+1-7\ (10+a)}{42}$$

$$M-N = -\frac{\cancel{69}}{\cancel{42}}=-\frac{23}{14} \Rightarrow M-N=-\frac{23}{14} \quad \text{...(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I):

Incógnita: $2\ (M-N) = \cancel{2}\left(-\frac{23}{\cancel{14}}\right) = \boxed{-\frac{23}{7}}$ ***Rpta. B***

2.4.3 MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS:

El producto de dos polinomios es otro polinomio que se obtiene multiplicando el polinomio multiplicando por cada término del polinomio multiplicador y sumando los productos parciales.

Recomendaciones para multiplicar polinomios:

1°. Se completan y ordenan los polinomios con respecto a una sola letra o variable (en forma descendente); en caso falte un término este se completa con un cero.

2°. Se multiplican cada uno de los términos del multiplicando por los del multiplicador y en cada resultado obtenido; se desplaza un término con la intención que las expresiones aparezcan en forma ordenada para luego reducir términos semejantes.

Ejemplo (1): Multiplicar: $(5x^2 - 3x + 2x^4 + 6)(3x^2 - 4x + 2)$

Resolución:

Ordenando y completando, el polinomio multiplicando, se obtiene:

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & & 2x^4 & +0x^3 & +5x^2 & -3x & +6 \\
 & & & & 3x^2 & -4x & +2 \\
\hline
6x^6 & +0x^5 & +15x^4 & -9x^3 & +18x^2 & & \\
 & -8x^5 & -0x^4 & -20x^3 & +12x^2 & -24x & \\
 & & +4x^4 & +0x^3 & +10x^2 & -6x & +12 \\
\hline
6x^6 & -8x^5 & +19x^4 & -29x^3 & +40x^2 & -30x & +12
\end{array}$$

(Productos Parciales)

$\therefore \quad 6x^6 - 8x^5 + 19x^4 - 29x^3 + 40x^2 - 30x + 12$ ***Rpta.***

Ejemplo (2) : Multiplicar: $A = 7x^3 - 5x + 2$ por $B = 2x^2 + 5x - 1$

Resolución:

Ordenando y completando el polinomio multiplicando (A); se obtiene:

$$A = 7x^3 + 0x^2 - 5x + 2$$

$$B = \quad 2x^2 + 5x - 1$$

$$\begin{array}{r} 14x^5 + 0x^4 - 10x^3 + 4x^2 \qquad\qquad \\ + 35x^4 + 0x^3 - 25x^2 + 10x \qquad \\ - 7x^3 - 0x^2 + 5x - 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\therefore \quad \boxed{A \cdot B = 14x^5 + 35x^4 - 17x^3 - 21x^2 + 15x - 2} \quad \textit{Rpta.}$$

PROPIEDADES:

1º. El grado del producto estará determinado por la suma de los grados de los factores. Ejemplo:

Grado del Producto: $\underbrace{(x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 6x + 5)}_{\text{Grado del primer factor} = 4} \underbrace{(x^2 - 5x + 3)}_{\text{Grado del segundo factor} = 2} = 4 + 2 = 6$

Grado del primer factor = 4 + Grado del segundo factor = 2

2º. El término independiente del producto estará determinado por el producto de los términos independientes de los factores:

Término independiente del producto:

$$(x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 6x + 5)(x^2 - 5x + 3) = 5 \cdot 3 = 15$$

T.I. = 5 T.I. = 3

3º. Al multiplicar polinomios homogéneos, el producto será otro polinomio homogéneo. Ejemplo:

Multiplicar: $(2x^3 - 5x^2y + 3xy^2 - y^3)$ por $(3x^2 - 4xy + 3y^2)$

Resolución:

$2x^3 - 5x^2y + 3xy^2 - y^3$ ...Polinomios homogéneo de grado 3

$3x^2 - 4xy + 3y^2$ ...Polinomio homogéneo de grado 2

$$\begin{array}{l} 6x^5 - 15x^4y + 9x^3y^2 - 3x^2y^3 \\ \qquad - 8x^4y + 20x^3y^2 - 12x^2y^3 + 4xy^4 \\ \qquad\qquad + 6x^3y^2 - 15x^2y^3 + 9xy^4 - 3y^5 \\ \hline \end{array}$$

$\boxed{6x^5 - 23x^4y + 35x^3y^2 - 30x^2y^3 + 13xy^4 - 3y^5}$ ...Polinomio homogéneo de grado 5

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS POR EL MÉTODO DE COEFICIENTES SEPARADOS

- Este método se emplea cuando los polinomios estan en función de una sola variable, o polinomios homogéneos con dos variables.

- Este método consiste en trabajar solamente con los coeficientes, teniendo en consideración las reglas del método anterior.

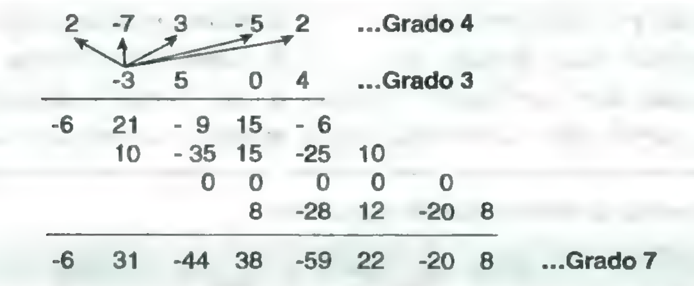
Ejemplo: Multiplicar. $(2x^4 - 7x^3 + 3x^2 - 5x + 2)$ por $(5x^2 - 3x^3 + 4)$

Resolución:

Ordenamos y completamos el polinomio multiplicador osea:

$$5x^2 - 3x^3 + 4 = -3x^3 + 5x^2 + 0x + 4$$

Luego: $(2x^4 - 7x^3 + 3x^2 - 5x + 2)$ por $(-3x^3 + 5x^2 + 0x + 4)$



2	-7	3	-5	2				...Grado 4
	-3	5	0	4				...Grado 3
-6	21	-9	15	-6				
	10	-35	15	-25	10			
		0	0	0	0	0		
			8	-28	12	-20	8	
-6	31	-44	38	-59	22	-20	8	...Grado 7

Luego, el producto es: $-6x^7 + 31x^6 - 44x^5 + 38x^4 - 59x^3 + 22x^2 - 20x + 8$ ***Rpta.***

TALLER DE EJERCICIOS Nº 11

1. Efectuar la multiplicación de los polinomios:

a) $(5x + 2y)(4x - 3y) =$	**b)** $(3x^2 + 5x)(2x + 3) =$
c) $(7x^3 + 4x^2 + 8)(x^2 - 2) =$	**d)** $(-5x^2 + 6x + 9)(2x^2 - 7) =$
e) $(x^2 + 8x - 5)(3x + 11) =$	**f)** $\left(\frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{3}x\right)\left(\frac{5}{3}x + 6\right) =$

g) $\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 9\right)(4x^2 - 3x + 1) =$	h) $\left(x^2y - \frac{1}{4}x\right)(7x^2y - 8y) =$
i) $(2x^3y - 5x^2y^2 + 2xy^3)(x^2y - 3xy^2 + 4y^3) =$	j) $(4x^5 - 2x^3 + x^2 - 3x)(5x^3 - x + 2$

2. Efectuar la multiplicación de los polinomios:

a) $(x^2 - 3x + 1)(x + 3) =$	b) $(x^4 - 2x^3 + x + 6)(x^2 - 2) =$
c) $(-2x^3y + 4x^2y^2 - 5xy^3)(4x - 5) =$	d) $(5x^2 - 2x + 3)(2x^2 + 6x + 1) =$
e) $(2x + 3y + z)(3x - y + 2z) =$	f) $(3x + 2)(x + 4)(2x - 1) =$
g) $(5x + 3)(2x - 1)(3x + 4) =$	h) $(x^2 + x + 2)(x + 3)(x - 2) =$
i) $(2x^2 + 3x)(x + 7)(x^2 - 2) =$	j) $(x^3 - 2x^2 + 4)(x^2 + 2)(x - 3) =$

3. Efectuar:

a) $(0{,}5x + 0{,}6y)(0{,}2x - 0{,}4y) =$	b) $(0{,}3x^2 - xy)(0{,}8x + 0{,}2y) =$
c) $(0{,}9x^3 - 0{,}2x + 3)(0{,}2x^2 - 6) =$	d) $(0{,}8x^2y - 0{,}2xy^2)(0{,}4xy - 0{,}3y^2) =$
e) $(3a^x - 2a^{x+1} - a^{x+2})(2a^{x+1} + 4a^x) =$	f) $(-4b^{x-1} + 6b^{x-2})(-5b^3 + 2b^2 + 5) =$
g) $(2x^{2a-3} - 5x^{2a-2} + x^{2a-1})(3x^2 - 4x) =$	h) $(5x^{3a-1} + 2x^{3a})(-4x^{a+2} - 6x^3) =$

4. Completa la tabla escribiendo el producto:

x	$5a^3 - 2a^2 + 3a + 6$	$5a^3 - 6a^2 - 4$	$12a^2 - 5a + 6$
$4a^2 + 3a - 2$			
$5a^3 - 4a^2 + a + 3$			
$2a^4 - 5a^3 - 3a$			
$6a^5 - a^3 + 2a^2$			
$7a^2 - 2a + 5$			

5. Multiplicar:

a) $(5x^4 - 2x^5 + 3x^2 - 6x + 1)(3x^2 - x^3 + 6)$

b) $(2x^3 - 3x^4 + 8x^5 + 6)(3x^2 + 2x^3 + 2x)$

c) $(8x^2 - 5x^6 + 3x + 4x^3)(2x^2 - 3x^4 + 5)$

d) $(-6x^3 - 2x^4 + x^5 + x + 2)(-x^2 + 3x^5 + 6x + 3)$

e) $(3x^2 + 6xy + y^2)(4x^2 + 3xy - 2y^2)$	f) $(-2xy + y^2 - 6x^2)(-2y^2 - xy + x^2)$
g) $(x^3y^2 - 2x^2y^3 + xy^4)(5x^2y + 2y^2)$	h) $(-5x^3 + 6x^2y - 3xy^2)(2x^3 - y^2)$

RESPUESTAS TALLER 11

1.
a) $20x^2 - 7xy - 6y^2$
b) $6x^3 + 19x^2 + 15x$
c) $7x^5 + 4x^4 - 14x^3 - 16$
d) $-10x^4 + 12x^3 + 53x^2 - 42x - 63$
e) $3x^3 + 35x^2 + 73x - 55$
f) $\frac{2}{3}x^3 + \frac{133}{45}x^2 + 2x$
g) $2x^5 - \frac{9}{2}x^4 + \frac{11}{4}x^3 + \frac{141}{4}x^2 - 27x + 9$
h) $7x^4y^2 - \frac{7}{4}x^3y - 8x^2y^2 + 2xy$
i) $2x^5y^2 - 11x^4y^3 + 25x^3y^4 - 26x^2y^5 + 8xy^6$
j) $20x^8 - 14x^6 + 13x^5 - 13x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 6x$

2.
a) $x^3 - 8x + 3$
b) $x^6 - 2x^5 - 2x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 2x - 12$
c) $-8x^4y - 10x^3y + 16x^3y^2 - 20x^2y^2 - 20x^2y^3 + 25xy^3$
d) $10x^4 + 26x^3 - x^2 + 16x + 3$
e) $6x^2 + 7xy + 7xz - 3y^2 + 5yz + 2z^2$
f) $6x^3 + 25x^2 + 2x - 8$
g) $30x^3 + 43x^2 - 5x - 12$
h) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x - 12$
i) $2x^5 + 17x^4 + 17x^3 - 34x^2 - 42x$
j) $x^6 - 5x^5 + 8x^4 - 6x^3 + 8x - 24$

3.
a) $0{,}1x^2 - 0{,}08xy - 0{,}24y^2$
b) $0{,}24x^3 - 0{,}74x^2y - 0{,}2xy^2$
c) $0{,}18x^5 - 5{,}44x^3 + 0{,}6x^2 + 1{,}2x - 18$

d) $0{,}32x^3y^2 - 0{,}32x^2y^3 + 0{,}06xy^4$
e) $-2a^{2x+3} - 8a^{2x+2} - 2a^{2x+1} + 12a^{2x}$
f) $20b^{x+2} - 38b^{x+1} + 12b^x - 20b^{x-1} + 30b^{x-2}$
g) $3x^{2a+1} - 19x^{2a} + 26x^{2a-1} - 8x^{2a-2}$
h) $-8x^{4a+2} - 20x^{4a+1} - 12x^{3a+3} - 30x^{3a+2}$

a) $2x^6 - 11x^7 + 15x^6 - 15x^5 + 45x^4 - 19x^3 + 21x^2 - 36x + 6$
b) $16x^8 + 18x^7 + 11x^6 + 4x^4 + 12x^3 + 18x^2 + 12x$
c) $15x^{10} - 10x^8 - 12x^7 - 49x^6 - x^5 + 16x^4 + 26x^3 + 40x^2 + 15x$
d) $3x^{10} - 6x^9 - 18x^6 - x^7 + 11x^6 + 3x^5 - 42x^4 - 19x^3 + 4x^2 + 15x + 6$
e) $12x^4 + 33x^3y + 16x^2y^2 - 9xy^3 - 2y^4$
f) $-6x^4 + 4x^3y + 15x^2y^2 + 3xy^3 - 2y^4$
g) $5x^5y^3 - 10x^4y^4 + 2x^3y^4 + 5x^3y^5 - 4x^2y^5 + 2xy^6$
h) $-10x^6 + 12x^5y - 6x^4y^2 + 5x^3y^2 - 6x^2y^3 + 3xy^4$

EJERCICIOS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA

Organizados por las Academias:
César Vallejo, Trilce, Pitágoras, Sigma, Alfa.

1. Dado los polinomios: $P = 5x + 6x^3 - 1$; $Q = x + \dfrac{1}{2}$; $R = 2x^2$

El producto de P . Q . R; es:

A) $12x^6 + 6x^5 + 10x^4 + 3x^3 - x^2$
B) $12x^6 - 6x^5 - 10x^4 - 3x^3 + x^2$
C) $12x^6 + 7x^5 + 10x^4 - 3x^3 - x^2$
D) $12x^6 + 6x^5 + 10x^4 + 4x^3 - x^2$
E) $12x^6 - 7x^5 - 10x^4 - 4x^3 + x^2$

Resolución:

- En primer lugar, hallamos el producto: P . Q:

$$\begin{array}{lr} P = & 6x^3 + 0x^2 + 5x - 1 \\ Q = & x + 1/2 \\ \hline & 6x^4 + 0x^3 + 5x^2 - x \qquad \\ & 3x^3 + 0x^2 + 5/2x - 1/2 \\ \hline \end{array}$$

El Polinomio "P"; se ha completado sus términos con un cero; veamos:

$P = 5x + 6x^3 + 1 = 6x^3 + 0x^2 + 5x + 1$

$$\begin{array}{lr} P.Q: & 6x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 3/2x - 1/2 \\ R: & 2x^2 \\ \hline P.Q.R: & 12x^6 + 6x^5 + 10x^4 + 3x^3 - x^2 \end{array}$$

; Este resultado lo multiplicamos con, $R = 2x^2$; veamos:

Rpta. A

2. Hallar: S = (3A + B) . C ; si se sabe que:

$A = x + 1$; $B = 2x + 2$ y $C = x^2 + 2x - 1$

A) $5x^3 + 15x^2$ B) $3x^3 + 10x^2 - 5x + 5$ C) $5x^3 + 15x^2 + 5x - 5$
D) $3x^3 + 15x^2 - 5x + 5$ E) N.A.

Resolución:

- En primer lugar, hallamos: (3A + B).

$$A = x + 1 \Rightarrow \begin{cases} 3A = 3(x+1) = 3x + 3 \\ B = 2x + 2 \end{cases}$$

$$3A + B = \boxed{5x + 5}$$

- En segundo lugar, hallamos: (3A + B) . C

$$\begin{cases} 3A + B = 5x + 5 \\ C = x^2 + 2x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 5x^3 + 5x^2 \\ +10x^2 + 10x \\ - 5x - 5 \end{array}$$

$$(3A + B) . C = \boxed{5x^3 + 15x^2 + 5x - 5}$$ ***Rpta. C***

3. Dado los polinomios: $A_{(x)} = 2x^3 + x + 1$; $B_{(x)} = -2x^2 + x - 1$ y $C_{(x)} = 4x + 3$.
Hallar: $[A_{(x)} - B_{(x)} + C_{(x)}]\, C_{(x)}$; Dar como respuesta el coeficiente del término de grado dos.

A) 8 B) 14 C) -10 D) 22 E) 15

Resolución:

- En primer lugar, hallamos: $A_{(x)} - B_{(x)}$

$$\left.\begin{array}{r} A_{(x)} = 2x^3 + 0x^2 + \not{x} + 1 \\ -B_{(x)} = 2x^2 - \not{x} + 1 \end{array}\right\} +$$

$$A_{(x)} - B_{(x)} = \boxed{2x^3 + 2x^2 + 2}$$

- En segundo lugar, hallamos: $A_{(x)} - B_{(x)} + C_{(x)}$

$$\left.\begin{array}{r} A_{(x)} - B_{(x)} = 2x^3 + 2x^2 + 0x + 2 \\ C_{(x)} = 4x + 3 \end{array}\right\} +$$

$$[A_{(x)} - B_{(x)} + C_{(x)}] = \boxed{2x^3 + 2x^2 + 4x + 5}$$

- En tercer lugar, hallamos: $[A_{(x)} - B_{(x)} + C_{(x)}]\, C_{(x)}$

$$\begin{array}{rr} [A_{(x)} - B_{(x)} + C_{(x)}] = & 2x^3 + 2x^2 + 4x + 5 \\ C_{(x)} = & 4x + 3 \\ \hline & 8x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 20x \\ & + 6x^3 + 6x^2 + 12x + 15 \\ \hline [A_{(x)} - B_{(x)} + C_{(x)}]\, C_{(x)} = & 8x^4 + 14x^3 + 22x^2 + 32x + 15 \end{array}$$

Término de Grado 2.

∴ El coeficiente del término de grado dos es: 22 *Rpta. D*

4. Halle el producto de aquellas expresiones siguientes, que son fraccionarias.

$$F_{(x)} = -2x^{-2} \; ; \; Q_{(x)} = \left(x^{3/2} \cdot x^{2/3}\right)^{-1} \; ; \; P_{(x)} = \frac{3/x}{3x^3}$$

A) $-2x^{-6}$ B) x C) $-2x^{-7}$ D) $x^{-37/6}$ E) $-2x^{-49/6}$

Resolución:

$$F_{(x)} \cdot Q_{(x)} \cdot P_{(x)} = (-2x^{-2}) \cdot \left(x^{3/2} \cdot x^{2/3}\right)^{-1} \cdot \frac{3/x}{3x^3}$$

$$= \left(-2 \cdot \frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(x^{-3/2} \cdot x^{-2/3}\right) \cdot \frac{1}{x^4}$$

$$= \frac{-2}{x^2 \cdot x^{3/2} \cdot x^{2/3} \cdot x^4} = \frac{-2}{x^6 \cdot x^{13/6}} = \frac{-2}{x^{49/6}}$$

∴ $F_{(x)} \cdot Q_{(x)} \cdot P_{(x)} = -2x^{-49/6}$ *Rpta. E*

5. Al multiplicar los polinomios: $A_{(x)} = 2x^4 - x^2 + 2x - 3$ y $B_{(x)} = 3x^3 - 6x^2 + 1$

Señalar el menor coeficiente del polinomio producto.

A) 2 B) -21 C) -12 D) -3 E) 6

Resolución:

- Los polinomios dado, completamos sus términos con ceros, veamos:

$$A_{(x)} = 2x^4 - 0x^3 - x^2 + 2x - 3$$
$$B_{(x)} = 3x^3 - 6x^2 + 0x + 1$$

$$\begin{array}{r} 6x^7 - 0x^6 - 3x^5 + 6x^4 - 9x^3 \qquad\qquad\qquad \\ -12x^6 + 0x^5 + 6x^4 - 12x^3 + 18x^2 \qquad\quad \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \qquad \\ 2x^4 - 0x^3 - x^2 + 2x - 3 \\ \hline \end{array}$$

$$A_{(x)} \cdot B_{(x)} = 6x^7 - 12x^6 - 3x^5 + 14x^4 \underset{\text{menor coeficiente}}{- 21x^3} + 17x^2 + 2x - 3$$

∴ El menor coeficiente del polinomio producto es: -21 ***Rpta. B***

6. Dados: $A = (x^2 + 1)(x^3 + x - 1)$; $B = (x^2 - 1)(x^3 - x + 1)$; $C = (2x - 1)(2x^2 + 1)$

Sumar "C" a la cantidad que excede "B" a "A".

A) $2x + 1$ **B)** $1 - 2x$ **C)** $2x - 1$ **D)** $-2x - 1$ **E)** $x - 2$

Resolución:

$$A = (x^2 + 1)(x^3 + x - 1) = x^5 + x^3 - x^2 + x^3 + x - 1 = x^5 + 2x^3 - x^2 + x - 1$$

$$B = (x^2 - 1)(x^3 - x + 1) = x^5 - x^3 + x^2 - x^3 + x - 1 = x^5 - 2x^3 + x^2 + x - 1$$

- Cantidad que excede "B" a "A"; es: "B - A"

Luego: $B - A = (x^5 - 2x^3 + x^2 + x - 1) - (x^5 + 2x^3 - x^2 + x - 1)$

∴ $B - A = -4x^3 + 2x^2$

Luego, hallamos: (B - A) + C:

$$(B - A) + C = (-4x^3 + 2x^2) + (2x - 1)(2x^2 + 1)$$
$$= \cancel{-4x^3} + \cancel{2x^2} + \cancel{4x^3} - \cancel{2x^2} + 2x - 1$$

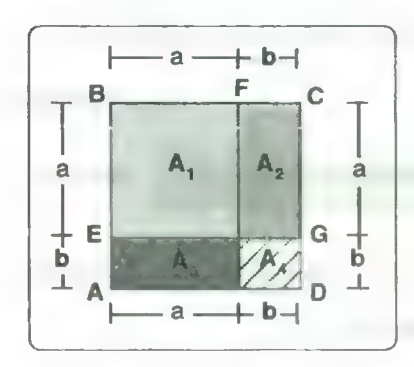
∴ $(B - A) + C = 2x - 1$ ***Rpta. C***

2.4.4 PRODUCTOS NOTABLES:

Reciben este nombre aquellos productos que se pueden determinar directamente, sin necesidad de efectuar la operación de la multiplicación. El estudiante no sólo debe saber demostrar dichos productos; sino deberá memorizarlos, de tal modo que pueda reconocer tanto el producto a partir de los factores, como los factores a partir del producto.

1. CUADRADO DE LA SUMA DE DOS MONOMIOS

De la figura mostrada, hallamos el área del cuadrado de lado: (a + b)



Area □ ABCD $= (a+b)^2$ ...(1)

Pero:

Area □ ABCD $= A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

Area □ ABCD $= a^2 + ab + ab + b^2$

Area □ ABCD $= a^2 + 2ab + b^2$ ...(2)

Igualamos (1) y (2):

$$\therefore \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Este resultado se enuncia diciendo:

"El cuadrado de la suma de dos monomios es igual al cuadrado del primero, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo monomio".

Observaciones:

i) *El segundo miembro de esta igualdad:* $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; *se denomina* ***trinomio cuadrado perfecto.***

ii) *El resultado:* $a^2 + 2ab + b^2$; *también se obtiene efectuando el producto* $(a+b)(a+b)$

iii) $(a+b)^2 = (b+a)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Ejercicio (1): Efectuar: $(2a + 3b)^2$

Recuerda que:

$(A \cdot B)^n = A^n \cdot B^n$

Resolución:

$$(2a + 3b)^2 = (2a)^2 + 2(2a)(3b) + (3b)^2$$

$$\therefore \quad (2a + 3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2$$

Ejercicio (2): Efectuar: $(x + 5)^2$

Resolución:

$$(x + 5)^2 = x^2 + 2(x)(5) + (5)^2 \Rightarrow \therefore \quad (x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$$

Ejercicio (3): Efectuar: $\left(\sqrt{3}\ x+2\right)^2$

Resolución:

$$\left(\sqrt{3}\ x+2\right)^2 = \left(\sqrt{3}\ x\right)^2 + 2\left(\sqrt{3}\ x\right)(2) + 2^2$$

$$\left(\sqrt{3}\ x+2\right)^2 = \sqrt{3}^2 x^2 + 4\sqrt{3}\ x + 4$$

$$\therefore \quad \left(\sqrt{3}\ x+2\right)^2 = 3x^2 + 4\sqrt{3}\ x + 4$$

Ejercicio (4): Efectuar: $(3xy^2 + 4z)^2$

Resolución:

$$\left(3xy^2 + 4z\right)^2 = \left(3xy^2\right)^2 + 2\left(3xy^2\right)(4z) + (4z)^2$$

$$\therefore \quad \left(3xy^2 + 4z\right)^2 = 9x^2y^4 + 24xy^2z + 16z^2$$

Ejercicio (5): Efectuar: $(5x + 3y^2z^4)^2$

Resolución:

$$\left(5x + 3y^2z^4\right)^2 = (5x)^2 + 2(5x)\left(3y^2z^4\right) + \left(3y^2z^4\right)^2$$

$$\left(5x + 3y^2z^4\right)^2 = 25x^2 + 30xy^2z^4 + 9y^4z^8$$

$$\therefore \quad \left(5x + 3y^2z^4\right)^2 = 25x^2 + 30xy^2z^4 + 9y^4z^8$$

Recuerda que:

- $\left(\dfrac{A}{B}\right)^n = \dfrac{A^n}{B^n}$
- $\left(A^n\right)^m = A^{nm}$

Ejercicio (6): Efectuar: $\left(\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{5}{2}y\right)^2$

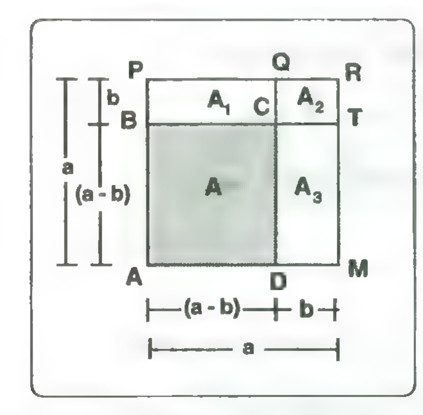
Resolución:

$$\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{5}{2}y\right)^2 = \left(\frac{1}{3}x^2\right)^2+2\left(\frac{1}{3}x^2\right)\left(\frac{5}{2}y\right)+\left(\frac{5}{2}y\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(x^2\right)^2+\left(\frac{1}{3}x^2\right)(5y)+\left(\frac{5}{2}\right)^2\left(y^2\right)$$

$$\therefore \left(\frac{1}{3}x^2+\frac{5}{2}y\right)^2 = \frac{1}{9}x^4+\frac{5}{3}x^2y+\frac{25}{4}y^2$$

(2) CUADRADO DE LA DIFERENCIA DE DOS MONOMIOS:



De la figura mostrada, hallamos el área del cuadrado de lado (a - b).

Area □ ABCD $= (a-b)^2$ ...(1)

Pero:

Area □ ABCD = Area PRMA $- A_1 - A_2 - A_3$

Area □ ABCD $= a^2 - (a-b)\,b - b^2 - (a-b)\,b$

$= a^2 - ab + b^2 - b^2 - ab + b^2$

Area □ ABCD $= a^2 - 2ab + b^2$ ...(2)

Igualamos (1) y (2):

$$\therefore \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Este resultado se enuncia diciendo:

"El cuadrado de la diferencia de dos monomios es igual al cuadrado del primero, menos el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo monomio".

Observaciones:

i) *El segundo miembro de esta igualdad: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; se denomina trinomio cuadrado perfecto.*

ii) *El resultado: $a^2 - 2ab + b^2$; también se obtiene efectuando el producto $(a-b).(a-b)$.*

iii) $(a-b)^2 = (b-a)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Ejercicio (1): Efectuar: $(x-3y)^2$

Resolución:

$$(x-3y)^2 = x^2 - 2(x)(3y) + (3y)^2$$

$$\therefore \quad (x-3y)^2 = x^2 - 6xy + 9y^2$$

Ejercicio (2): Efectuar: $\left(5x-\sqrt{7}y\right)^2$

Resolución:

$$\left(5x-\sqrt{7}y\right)^2 = (5x)^2 - 2(5x)\left(\sqrt{7}y\right) + \left(\sqrt{7}y\right)^2$$

$$= 5^2x^2 - 10\sqrt{7}\,xy + \sqrt{7}^2y^2$$

$$\therefore \quad \left(5x-\sqrt{7}y\right)^2 = 25x^2 - 10\sqrt{7}\,xy + 7y^2$$

Ejercicio (3): Efectuar: $\left(\sqrt{3}\,x^3 - \sqrt{2}\,y\right)^2$

Resolución:

$$\left(\sqrt{3}\,x^3-\sqrt{2}\,y\right)^2 = \left(\sqrt{3}\,x^3\right)^2 - 2\left(\sqrt{3}\,x^3\right)\left(\sqrt{2}\,y\right) + \left(\sqrt{2}\,y\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{3}\right)^2\left(x^3\right)^2 - 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\,x^3y + \left(\sqrt{2}\right)^2y^2$$

$$\therefore \quad \left(\sqrt{3}\,x^3-\sqrt{2}\,y\right)^2 = 3x^6 - 2\sqrt{6}\,x^3y + 2y^2$$

Ejercicio (4): Efectuar: $\left(\frac{5}{3}x^2 - \frac{1}{4}y\right)^2$

Resolución:

$$\left(\frac{5}{3}x^2 - \frac{1}{4}y\right)^2 = \left(\frac{5}{3}x^2\right)^2 - 2\left(\frac{5}{3}x^2\right)\left(\frac{1}{4}y\right) + \left(\frac{1}{4}y\right)^2$$

$$= \left(\frac{5}{3}\right)^2\left(x^2\right)^2 - \left(\frac{5}{3}x^2\right)\left(\frac{1}{2}y\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 y^2$$

$$= \frac{5^2}{3^2}\left(x^4\right) - \frac{5}{6}x^2y + \frac{1^2}{4^2}y^2$$

$$\therefore \quad \left(\frac{5}{3}x^2 - \frac{1}{4}y\right)^2 = \frac{25}{9}x^4 - \frac{5}{6}x^2y + \frac{1}{16}y^2$$

Recuerda que:

$$(-a - b)^2 = (a + b)^2$$

Demostración

$$(-a - b)^2 = [(-a) + (-b)]^2$$

$$= (-a)^2 + 2(-a)(-b) + (-b)^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$\therefore \quad (-a - b)^2 = (a + b)^2$$

Ejercicio (5): Efectuar: $(0,2\,x^3 - 0,5\,y^2)^2$

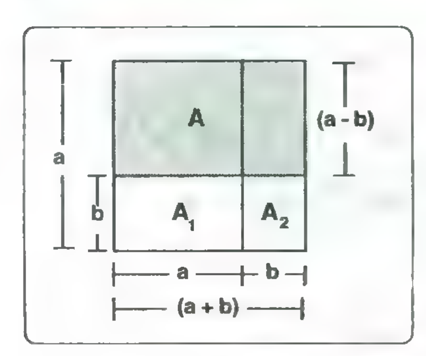
Resolución:

$$\left(0,2x^3 - 0,5y^2\right)^2 = \left(0,2x^3\right)^2 - 2\left(0,2x^3\right)\left(0,5y^2\right) + \left(0,5y^2\right)^2$$

$$= (0,2)^2\left(x^3\right)^2 - 2\,(0,2)\,(0,5)\,x^3y^2 + (0,5)^2\left(y^2\right)^2$$

$$\therefore \quad \left(0,2x^3 - 0,5y^2\right)^2 = 0,04x^6 - 0,2x^3y^2 + 0,25y^4$$

3. PRODUCTO DE LA SUMA DE DOS MONOMIOS POR SU DIFERENCIA



De la figura mostrada; hallamos el área de la región sombreada (A).

A = base x altura

$A = (a + b) \times (a - b)$

$A = a(a - b) + b(a - b)$

$A = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ba} - b^2;$

Pero: $ab = ba$

Entonces: $A = a^2 - b^2$

$$\therefore \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Este resultado se enuncia diciendo:

"El producto de la suma por la diferencia de dos monomios es igual al cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo".

Observaciones:

i) *El segundo miembro de esta igualdad: $(a + b)(a - b) = \underbrace{a^2 - b^2}$; se denomina* ***Diferencia de Cuadrados.***

ii) $(a + b)(a - b) = (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

iii) $a^2 - b^2 \neq b^2 - a^2$

iv) $(a - b)^2 \neq a^2 - b^2$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Ejercicio 1: Efectuar: $(3x + y)(3x - y)$

Resolución:

$$(3x + y)(3x - y) = (3x)^2 - y^2$$

$$\therefore \quad (3x + y)(3x - y) = 9x^2 - y^2$$

Ejercicio (2): Efectuar: $(5xy^3 + 2z^2)(5xy^3 - 2z^2)$

Resolución:

$$\left(5xy^3 + 2z^2\right)\left(5xy^3 - 2z^2\right) = \left(5xy^3\right)^2 - \left(2z^2\right)^2$$

$$= (5)^2 x^2 \left(y^3\right)^2 - (2)^2 \left(z^2\right)^2$$

$$\therefore \quad \left(5xy^3 + 2z^2\right)\left(5xy^3 - 2z^2\right) = 25x^2y^6 - 4z^4$$

Ejercicio (3): Efectuar: $\left(\frac{3}{2}xy^3 + \frac{1}{4}z\right)\left(\frac{3}{2}xy^3 - \frac{1}{4}z\right)$

Resolución:

$$\left(\frac{3}{2}xy^3 + \frac{1}{4}z\right)\left(\frac{3}{2}xy^3 - \frac{1}{4}z\right) = \left(\frac{3}{2}xy^3\right)^2 - \left(\frac{1}{4}z\right)^2$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^2 x^2y^6 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 z^2$$

$$\therefore \quad \left(\frac{3}{2}xy^3 + \frac{1}{4}z\right)\left(\frac{3}{2}xy^3 - \frac{1}{4}z\right) = \frac{9}{4}x^2y^6 - \frac{1}{16}z^2$$

Ejercicio (4): Efectuar: $\left(\sqrt{5}\ x^3y + \sqrt{2}\ z\right)\left(\sqrt{5}\ x^3y - \sqrt{2}\ z\right)$

Resolución:

$$\left(\sqrt{5}\ x^3y + \sqrt{2}\ z\right)\left(\sqrt{5}\ x^3y - \sqrt{2}\ z\right) = \left(\sqrt{5}\ x^3y\right)^2 - \left(\sqrt{2}\ z\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{5}\right)^2 \left(x^3\right)^2 \left(y^2\right) + \left(\sqrt{2}\right)^2 (z)^2$$

$$\therefore \quad \left(\sqrt{5}\ x^3y + \sqrt{2}\ z\right)\left(\sqrt{5}\ x^3y - \sqrt{2}\ z\right) = 5x^6y^2 - 2z^2$$

(4.) CUBO DE LA SUMA DE DOS MONOMIOS

$$(a + b)^3 = \underbrace{(a + b)(a + b)}(a + b)$$

$$= (a + b)^2 (a + b); \text{ pero: } (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$= (a^2 + 2ab + b^2)a + (a^2 + 2ab + b^2)\,b$$

$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$$

$$\therefore \quad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Este resultado se enuncia diciendo:

"El cubo de la suma de dos monomios es igual al cubo del primer monomio, más el triple del cuadrado del primero por el segundo, más el triple del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo monomio".

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Ejercicio 1: Efectuar: $(2x + 3y)^3$

Resolución:

$$(2x + 3y)^3 = (2x)^3 + 3\,(2x)^2\,(3y) + 3\,(2x)\,(3y)^2 + (3y)^3$$

$$= 2^3\,(x^3) + 3\,(2^2x^2)\,(3y) + 3\,(2x)\,(3^2y^2) + 3^3y^3$$

$$\therefore \quad (2x + 3y)^3 = 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$$

Ejercicio 2: Efectuar: $\left(\frac{x}{4}+\frac{y}{3}\right)^3$

Resolución:

$$\left(\frac{x}{4}+\frac{y}{3}\right)^3 = \left(\frac{x}{4}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{4}\right)^2\left(\frac{y}{3}\right) + 3\left(\frac{x}{4}\right)\left(\frac{y}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^3$$

$$= \frac{x^3}{4^3} + 3\left(\frac{x^2}{4^2}\right)\left(\frac{y}{3}\right) + 3\left(\frac{x}{4}\right)\left(\frac{y^2}{3^2}\right) + \frac{y^3}{3^3}$$

$$= \frac{x^3}{64} + \frac{x^2}{16}y + \left(\frac{x}{4}\right)\left(\frac{y^2}{3}\right) + \frac{y^3}{27}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{x}{4}+\frac{y}{3}\right)^3 = \frac{x^3}{64} + \frac{x^2y}{16} + \frac{xy^2}{12} + \frac{y^3}{27}$$

Ejercicio (3): Efectuar: $\left(\frac{2}{3}xy^2+\sqrt{2}\ z^4\right)^3$

Resolución:

$$\left(\frac{2}{3}xy^2+\sqrt{2}z^4\right)^3=\left(\frac{2}{3}xy^2\right)^3+3\left(\frac{2}{3}xy^2\right)^2\left(\sqrt{2}z^4\right)+3\left(\frac{2}{3}xy^2\right)\left(\sqrt{2}z^4\right)^2+\left(\sqrt{2}z^4\right)^3$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^3x^3y^6+3\left(\frac{2}{3}\right)^2x^2y^4\sqrt{2}z^4+\left(2xy^2\right)\left(\sqrt{2}^2z^8\right)+\left(\sqrt{2}\right)^3z^{12}$$

$$=\frac{8}{27}x^3y^6+3\left(\frac{4}{9}\right)x^2y^4\sqrt{2}z^4+\left(2xy^2\right)\left(2z^8\right)+\sqrt{2}^2\sqrt{2}z^{12}$$

$$\therefore\quad \left(\frac{2}{3}xy^2+\sqrt{2}z^4\right)^3=\frac{8}{27}x^3y^6+\frac{4}{3}\sqrt{2}x^2y^4z^4+4xy^2z^8+2\sqrt{2}z^{12}$$

(5.) CUBO DE LA DIFERENCIA DE DOS MONOMIOS:

$$(a-b)^3=\underbrace{(a-b)(a-b)}(a-b)$$

$(a-b)^3=(a-b)^2(a-b)$, pero: $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(a-b)^3=(a^2-2ab+b^2)(a-b)$

$(a-b)^3=a(a^2-2ab+b^2)-b(a^2-2ab+b^2)$

$(a-b)^3=a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3$

$$\therefore\quad (a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

Este resultado se enuncia diciendo:

"El cubo de la diferencia de dos monomios es igual al cubo del primer monomio, menos el triple del cuadrado del primero por el segundo, más el triple del primero por el cuadrado del segundo, menos el cubo del segundo monomio".

EJERCICIOS DE APLICACION

Ejercicio 1: Efectuar: $(x - 5)^3$

Resolución:

$$(x - 5)^3 = x^3 - 3x^2 (5) + 3x (5)^2 - 5^3$$

$$\therefore \quad (x - 5)^3 = x^3 - 15x^2 + 75x - 125$$

Ejercicio 2: Efectuar: $(2xy^2 - 3z^4)^3$

Resolución:

$$\left(2xy^2 - 3z^4\right)^3 = \left(2xy^2\right)^3 - 3\left(2xy^2\right)^2\left(3z^4\right) + 3\left(2xy^2\right)\left(3z^4\right)^2 - \left(3z^4\right)^3$$

$$= 2^3x^3y^6 - 3\left(2^2x^2y^4\right)\left(3z^4\right) + \left(6xy^2\right)\left(3^2z^8\right) - 3^3z^{12}$$

$$\therefore \quad \left(2xy^2 - 3z^4\right)^3 = 8x^3y^6 - 36x^2y^4z^4 + 54xy^2z^8 - 27z^{12}$$

Ejercicio 3: Efectuar: $\left(x^4 - \dfrac{1}{2}\right)^3$

Resolución:

$$\left(x^4 - \frac{1}{2}\right)^3 = \left(x^4\right)^3 - 3\left(x^4\right)^2\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(x^4\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= x^{12} - \frac{3}{2}x^8 + 3x^4\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{8}$$

$$\therefore \quad \left(x^4 - \frac{1}{2}\right)^3 = x^{12} - \frac{3}{2}x^8 + \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{8}$$

Ejercicio 4: Efectuar. $\left(\dfrac{1}{3}x^2y - \dfrac{1}{5}\right)^3$

Resolución:

$$\left(\frac{1}{3}x^2y-\frac{1}{5}\right)^3=\left(\frac{1}{3}x^2y\right)^3-3\left(\frac{1}{3}x^2y\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)+3\left(\frac{1}{3}x^2y\right)\left(\frac{1}{5}\right)^2-\left(\frac{1}{5}\right)^3$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^3x^6y^3-3\left(\frac{1}{3}\right)^2x^4y^2\left(\frac{1}{5}\right)+x^2y\left(\frac{1}{25}\right)-\frac{1}{125}$$

$$\therefore\quad \left(\frac{1}{3}x^2y-\frac{1}{5}\right)^3=\frac{1}{27}x^6y^3-\frac{1}{15}x^4y^2+\frac{1}{25}x^2y-\frac{1}{125}$$

Ejercicio (5): Efectuar: $(-3x-2)^3$

Resolución:

$$(-3x-2)^3=-(3x+2)^3$$
$$=-[(3x)^3+3(3x)^2(2)+3(3x)(2)^2+2^3]$$
$$=-[27x^3+3(9x^2)(2)+9x(4)+8]$$
$$=-[27x^3+54x^2+36x+8]$$

$$\therefore\quad (-3x-2)^3=-27x^3-54x^2-36x-8$$

Recuerda que:

$$(-a-b)^3=-(a+b)^3$$

Demostración:

$$(-a-b)^3=[-(a+b)]^3$$
$$(-a-b)^3=[-1(a+b)]^3$$
$$(-a-b)^3=(-1)^3(a+b)^3$$
$$(-a-b)^3=-1(a+b)^3$$

$$\therefore\quad (-a-b)^3=-(a+b)^3$$

Recomendación:

Cuando la suma de dos monomios $(a+b)$ o la diferencia de dos monomios $(a-b)$, están elevados a un exponente mayor que 3 es recomendable aplicar la fórmula de binomio de Newton; siendo esta:

$$(x+a)^n=x^n+\frac{n}{1}x^{n-1}\cdot a+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\cdot a^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3}\cdot a^3\ldots+a^n$$

Donde:

- *"x" y "a" son diferentes de cero.*
- *"n" es un número entero positivo.*

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Ejercicio (1): Efectuar. $(x + 3)^4$

Resolución:

$$(x+3)^4 = x^4 + \frac{4}{1}x^{4-1}(3) + \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}x^{4-2}(3)^2 + \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}x^{4-3}(3)^3 + \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^{4-4}(3)^4$$

$$= x^4 + 12x^3 + 6x^2(9) + 4x^1(27) + x^0\cdot(81)\ ;\ \text{pero: } x^0 = 1$$

$$\therefore\quad \boxed{(x+3)^4 = x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81}$$

Ejercicio (2): Efectuar: $(x + 5)^6$

Resolución:

$$(x+5)^6 = x^6 + \frac{6}{1}x^{6-1}(5) + \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}x^{6-2}(5)^2 + \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}x^{6-3}(5)^3 +$$

$$\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^{6-4}(5)^4 + \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^{6-5}(5)^5 + \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}x^{6-6}(5)^6$$

$$(x+5)^6 = x^6 + 6x^5(5) + 15x^4(5)^2 + 20x^3(5)^3 + 15x^2(5)^4 + 6x(5)^5 + (5)^6$$

$$\therefore\quad \boxed{(x+5)^6 = x^6 + 30x^5 + 375x^4 + 2\ 500x^3 + 9\ 375x^2 + 18\ 750x + 15\ 625}$$

Ejercicio (3): Efectuar: $(y - 2)^5$

Resolución:

La expresión: $(y - 2)^5$ se puede escribir así: $[y + (-2)]^5$

Luego:

$$[y+(-2)]^5 = y^5 + \frac{5}{1}y^{5-1}(-2) + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}y^{5-2}(-2)^2 + \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}y^{5-3}(-2)^3 +$$

$$\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}y^{5-4}(-2)^4 + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}y^{5-5}(-2)^5$$

$$= y^5 + 5y^4(-2) + 10y^3(-2)^2 + 10y^2(-2)^3 + 5y\ (-2)^4 + y^0(-2)^5$$

$$= y^5 - 10y^4 + 40y^3 - 80y^2 + 80y + 1\ (-32)$$

$$\therefore\quad \boxed{[y+(-2)]^5 = (y-2)^5 = y^5 - 10y^4 + 40y^3 - 80y^2 + 80y - 32}$$

Propiedades del desarrollo de $(x + a)^n$; donde: $n \in \mathbb{Z}^+$

1. El desarrollo de $(x + a)^n$ tendrá $(n + 1)$ términos.

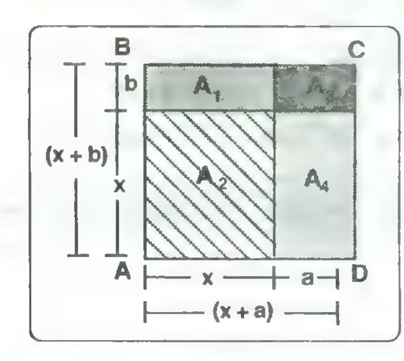
2. Si la base es el binomio suma, los términos del desarrollo serán todos positivos, así:

$$(x + a)^n = + \;,\; + \;,\; + \;,\; + \;,\; \ldots\ldots \;,\; +$$

Pero si la base es el binomio diferencia, los términos del desarrollo serán alternados (positivos los de lugar impar y negativos los de lugar par), así:

$$(x - a)^n = + \;,\; - \;,\; + \;,\; - \;,\; + \;,\; - \;,\; \ldots$$

6. PRODUCTO DE DOS BINOMIOS CON UN TÉRMINO COMÚN



De la figura:

Area ▭ ABCD $= A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

Area ▭ ABCD $= xb + x^2 + ab + ax$

Area ▭ ABCD $= x^2 + \underbrace{ax + bx} + ab$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$\therefore \quad (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

Este resultado se enuncia diciendo:

"El producto de dos binomios con un término común es igual al cuadrado del término común, más el término común con un coeficiente igual a la suma de los términos no comunes, más el producto de los términos no comunes".

Ejercicio 1: Efectuar: $(x + 4)(x + 3)$

Resolución:

$$(x + 4)(x + 3) = x^2 + (4 + 3)x + 4(3)$$

$$\therefore \quad (x + 4)(x + 3) = x^2 + 7x + 12$$

Ejercicio (2): Efectuar: $(x + 2)(x + 5)$

Resolución:

$$(x + 2)(x + 5) = x^2 + (2 + 5)x + 2(5)$$

$$\therefore \quad (x + 2)(x + 5) = x^2 + 7x + 10$$

Ejercicio (3): Efectuar: $(x - 6)(x + 1)$

Resolución:

$$(x - 6)(x + 1) = x^2 + (-6 + 1)x + (-6)(1)$$

$$\therefore \quad (x - 6)(x + 1) = x^2 - 5x - 6$$

Ejercicio (4): Efectuar: $(x + 7)(x - 3)$

Resolución:

$$(x + 7)(x - 3) = x^2 + (7 - 3)x + 7(-3)$$

$$\therefore \quad (x + 7)(x - 3) = x^2 + 4x - 21$$

Ejercicio (5): Efectuar: $(3x + 1)(3x + 4)$

Resolución:

$$(3x + 1)(3x + 4) = (3x)^2 + (1 + 4)3x + (1)(4)$$

$$\therefore \quad (3x + 1)(3x + 4) = 9x^2 + 15x + 4$$

Ejercicio (6): Efectuar: $(2x + 7)(2x - 3)$

Resolución:

$$(2x + 7)(2x - 3) = (2x)^2 + (7 - 3)2x + 7(-3)$$

$$\therefore \quad (2x + 7)(2x - 3) = 4x^2 + 8x - 21$$

Ejercicio (7): Efectuar: $(ab^2x + c)(ab^2x + d)$

Resolución:

$$(ab^2x + c)(ab^2x + d) = (ab^2x)^2 + (c + d)\,ab^2x + cd$$

$$\therefore \quad (ab^2x + c)(ab^2x + d) = a^2b^4x^2 + ab^2(c + d)x + cd$$

Ejercicio (8): Efectuar: $(x^2 + 6)(x^2 - 4)$

Resolución:

$$\left(x^2+6\right)\left(x^2-4\right) = \left(x^2\right)^2 + (6-4)x^2 + 6\,(-4)$$

$$\therefore \quad \left(x^2+6\right)\left(x^2-4\right) = x^4 + 2x^2 - 24$$

Ejercicio (9): Efectuar: $(2x^3 + 5)(2x^3 + 7)$

Resolución:

$$\left(2x^3+5\right)\left(2x^3+7\right) = \left(2x^3\right)^2 + (5+7)2x^3 + 5\cdot 7$$

$$\therefore \quad \left(2x^3+5\right)\left(2x^3+7\right) = 4x^6 + 24x^3 + 35$$

7. PRODUCTO DE DOS BINOMIOS DE LA FORMA: $(ax + b)(cx + d)$

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + adx + bcx + bd$$

$$= acx^2 + (ad + bc)\,x + bd$$

$$\therefore \quad (ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Ejercicio (1): Efectuar: $(2x + 5)(3x + 4)$

Resolución:

$$(2x + 5)(3x + 4) = 2(3)x^2 + [2(4) + 5(3)]x + 5 \cdot 4$$

$$\therefore \quad (2x + 5)(3x + 4) = 6x^2 + 23x + 20$$

Ejercicio (2): Efectuar: $(4x + 3)(2x - 9)$

Resolución:

$$(4x + 3)(2x - 9) = 4(2)x^2 + [4(-9) + 3(2)]x + 3(-9)$$

$$\therefore \quad (4x + 3)(2x - 9) = 8x^2 - 30x - 27$$

Ejercicio (3): Efectuar: $\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{2}\right)$

Resolución:

$$\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)x^2 + \left[\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}\right)\right]x + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{15}x^2 + \left[-\frac{1}{6} + \frac{1}{10}\right]x - \frac{1}{8}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{15}x^2 - \frac{1}{15}x - \frac{1}{8}$$

8. CUADRADO DE UN TRINOMIO: $(a + b + c)^2$

La expresión $(a + b + c)^2$, se puede escribir así: $[(a + b) + c]^2$

Luego: $[(a + b) + c]^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2$

$$= (a^2 + 2ab + b^2) + 2ac + 2bc + c^2;$$

ordenamos términos

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$\therefore \quad [(a + b) + c]^2 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Ejercicio (1): Efectuar: $(3x + y + 2)^2$

Resolución:

$$(3x + y + 2)^2 = (3x)^2 + y^2 + 2^2 + 2\,(3x)\,(y) + 2\,(3x)\,(2) + 2\,(y)\,(2)$$

$$= 9x^2 + y^2 + 4 + 6xy + 12x + 4y$$

$$\therefore \quad (3x + y + 2)^2 = 9x^2 + y^2 + 6xy + 12x + 4y + 4$$

Ejercicio (2): Efectuar : $(x^2 + 3x - 5)^2$

Resolución:

$$\left(x^2 + 3x - 5\right)^2 = [x^2 + 3x + (-5)]^2$$

$$= \left(x^2\right)^2 + (3x)^2 + (-5)^2 + 2x^2(3x) + 2x^2(-5) + 2\,(3x)(-5)$$

$$= x^4 + 9x^2 + 25 + 6x^3 - 10x^2 - 30x$$

$$\therefore \quad \left(x^2 + 3x - 5\right)^2 = x^4 + 6x^3 - x^2 - 30x + 25$$

Ejercicio (3): Efectuar: $(2x - 3y - 7)^2$

Resolución:

$$(2x - 3y - 7)^2 = [2x + (-3y) + (-7)]^2$$

$$= (2x)^2 + (-3y)^2 + (-7)^2 + 2\,(2x)\,(-3y) + 2\,(2x)\,(-7) + 2\,(-3y)\,(-7)$$

$$= 4x^2 + 9y^2 + 49 - 12xy - 28x + 42y$$

$$\therefore \quad (2x - 3y - 7)^2 = 4x^2 + 9y^2 + 49 - 12xy - 28x + 42y$$

9. SUMA DE CUBOS

$$(a + b)\,(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

Ejemplo (1): Efectuar: $(x + 2)\,(x^2 - 2x + 4)$

Resolución:

$$(x+2)(x^2-2x+4) = x(x^2-2x+4) + 2(x^2-2x+4)$$

$$= x^3 - 2x^2 + 4x + 2x^2 - 4x + 8 = x^3 + 8$$

$$\therefore \quad (x+2)(x^2-2x+4) = x^3 + 2^3 = x^3 + 8$$

Ejemplo (2): Efectuar: $(3x+1)(9x^2-3x+1)$

Resolución:

$$(3x+1)(9x^2-3x+1) = 3x(9x^2-3x+1) + 1(9x^2-3x+1)$$

$$= 27x^3 - 9x^2 + 3x + 9x^2 - 3x + 1$$

$$= 27x^3 + 1$$

$$\therefore \quad (3x+1)(9x^2-3x+1) = (3x)^3 + 1^3 = 27x^3 + 1$$

Ejemplo (3): Efectuar: $(x^2+3)(x^4-3x^2+9)$

Resolución:

$$(x^2+3)(x^4-3x^2+9) = x^2(x^4-3x^2+9) + 3(x^4-3x^2+9)$$

$$= x^6 - 3x^4 + 9x^2 + 3x^4 - 9x^2 + 27$$

$$= x^6 + 27$$

$$\therefore \quad (x^2+3)(x^4-3x^2+9) = (x^2)^3 + 3^3 = x^6 + 27$$

10. DIFERENCIA DE CUBOS

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$

Ejemplo (1): Efectuar: $(x-4)(x^2+4x+16)$

Resolución:

$$(x-4)(x^2+4x+16) = x(x^2+4x+16) - 4(x^2+4x+16)$$

$$= x^3 + 4x^2 + 16x - 4x^2 - 16x - 64 = x^3 - 64$$

$$\therefore \quad (x-4)(x^2+4x+16) = x^3 - 4^3 = x^3 - 64$$

Ejemplo (2): Efectuar: $(5x - 2)(25x^2 + 10x + 4)$

Resolución:

$$(5x - 2)(25x^2 + 10x + 4) = 5x(25x^2 + 10x + 4) - 2(25x^2 + 10x + 4)$$
$$= 125x^3 + 50x^2 + 20x - 50x^2 - 20x - 8$$
$$= 125x^3 - 8$$

$$\therefore \quad (5x - 2)(25x^2 + 10x + 4) = (5x)^3 - 2^3 = 125x^3 - 8$$

Ejemplo (3): Efectuar: $\left(2x - \frac{1}{3}\right)\left(4x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right)$

Resolución:

$$\left(2x - \frac{1}{3}\right)\left(4x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) = 2x\left(4x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{3}\left(4x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right)$$
$$= 8x^3 + \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{4}{3}x^2 - \frac{2}{9}x - \frac{1}{27} = 8x^3 - \frac{1}{27}$$

$$\therefore \quad \left(2x - \frac{1}{3}\right)\left(4x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) = (2x)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 8x^3 - \frac{1}{27}$$

(11.) TRINOMIO AL CUBO: $(a + b + c)^3$

$$(a + b + c)^3 = (a + b + c)(a + b + c)(a + b + c)$$
$$(a + b + c)^3 = (a + b + c)^2 (a + b + c)$$
$$= (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc)(a + b + c)$$

$$\therefore \quad (a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + 6abc$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Ejercicio (1): Efectuar: $(x + 2y + 3)^3$

Resolución:

$$(x + 2y + 3)^3 = x^3 + (2y)^3 + 3^3 + 3x^2 (2y) + 3x^2 (3) + 3x (2y)^2 + 3 (2y)^2 (3) + 3x (3)^2 + 3 (2y) (3)^2 + 6 (x) (2y) (3)$$

$$\therefore \quad (x + 2y + 3)^3 = x^3 + 8y^3 + 27 + 6x^2y + 9x^2 + 12xy^2 + 36y^2 + 27x + 54y + 36xy$$

Ejercicio (2): Efectuar: $\left(3x^2 - x - 2\right)^3$

Resolución:

$$\left(3x^2 - x - 2\right)^3 = [3x^2 + (-x) + (-2)]^3 = \left(3x^2\right)^3 + (-x)^3 + (-2)^3 + 3\left(3x^2\right)^2 (-x) + 3\left(3x^2\right)^2 (-2) + 3\left(3x^2\right)(-x)^2 + 3(-x)^2(-2) + 3\left(3x^2\right)(-2)^2 + 3(-x)(-2)^2 + 6\left(3x^2\right)(-x)(-2)$$

$$= 27x^6 - x^3 - 8 - 27x^5 - 54x^4 + 9x^4 - 6x^2 + 36x^2 - 12x + 36x^3$$

$$\left(3x^2 - x - 2\right)^3 = 27x^6 - 27x^5 - 45x^4 - 35x^3 + 30x^2 - 12x - 8$$

12. IDENTIDADES DE LEGENDRE:

- $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2 (a^2 + b^2)$
- $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Ejercicio (1): Efectuar: $(3x + y)^2 + (3x - y)^2$

Resolución:

$$(3x + y)^2 + (3x - y)^2 = [(3x)^2 + 2(3x) y + y^2] + [(3x)^2 - 2(3x)y + y^2]$$

$$= 9x^2 + 6xy + y^2 + 9x^2 - 6xy + y^2$$

$$= 18x^2 + 2y^2$$

$$\therefore \quad (3x + y)^2 + (3x - y)^2 = 18x^2 + 2y^2$$

Aplicando la primera identidad de Legendre se obtiene:

$$(3x + y)^2 + (3x - y)^2 = 2[(3x)^2 + (y)^2]$$

$$= 2\,[9x^2 + y^2]$$

$$\therefore \quad (3x + y)^2 + (3x - y)^2 = 18x^2 + 2y^2$$

Ejercicio (2): Efectuar: $(5x + 2y)^2 - (5x - 2y)^2$

Resolución:

$$(5x + 2y)^2 - (5x - 2y)^2 = [(5x)^2 + 2\,(5x)\,(2y) + (2y)^2] - [(5x)^2 - 2\,(5x)(2y) + (2y)^2]$$

$$= [25x^2 + 20xy + 4y^2] - [25x^2 - 20xy + 4y^2]$$

$$= \cancel{25x^2} + 20xy + \cancel{4y^2} - \cancel{25x^2} + 20xy - \cancel{4y^2}$$

$$\therefore \quad (5x + 2y)^2 - (5x - 2y)^2 = 40xy$$

Aplicando la segunda identidad de Legendre; se obtiene:

$$(5x + 2y)^2 - (5x - 2y)^2 = 4\,(5x)\,(2y) \;=\; 40xy$$

13. IDENTIDADES DE LAGRANGE:

* $(a^2 + b^2)\,(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$

** $(a^2 + b^2 + c^2)\,(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2 + (ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 12

1 Halla, aplicando productos notables, el resultado de:

a) $(x + 4)^2 =$	**b)** $(x + 6)^2 =$	**c)** $(3x + 1)^2 =$
d) $(5x + 3)^2 =$	**e)** $(x^2 + 3y)^2 =$	**f)** $(2x^3 + 11)^2 =$

g) $\left(4x+\frac{2}{3}\right)^2 =$	h) $\left(\sqrt{3}x+5\right)^2 =$	i) $\left(5x^2+\frac{1}{8}\right)^2 =$
j) $(0,7+x)^2 =$	k) $(x-13)^2 =$	l) $(15-y)^2 =$
m) $(6-4x)^2 =$	n) $\left(x-\frac{1}{5}\right)^2 =$	o) $\left(x^3-2y\right)^2 =$
p) $\left(x^6-\sqrt{3}\right)^2 =$	q) $(-x-13)^2 =$	r) $\left(-x-\frac{2}{7}\right)^2 =$
s) $(-3{,}2-x)^2 =$	t) $\left(x^4-3y^2\right)^3 =$	

2 Halla el binomio que da origen a cada trinomio cuadrado perfecto:

Ejemplo ①: $(\quad)^2 = x^2 + 8x + 16$

Resolución:

$$(ⓧ + ④)^2 = x^2 + 8x + 16$$

$\sqrt{x^2}$ → ⓧ $\qquad \sqrt{16}$ → ④

Ejemplo ②: $x^2 - 14x + 49 = (\quad)^2$

$$x^2 - 14x + 49 = (x - 7)^2$$

$\sqrt{x^2}$ → ⓧ $\qquad \sqrt{49}$ → ⑦

a) $(\quad)^2 = x^2 - 4x + 4$	b) $(\quad)^2 = x^2 + 12x + 36$
c) $(\quad)^2 = x^2 - 16x + 64$	d) $(\quad)^2 = x^2 + 22x + 121$
e) $(\quad)^2 = x^2 + 6x + 9$	f) $(\quad)^2 = x^2 - 26x + 169$

g) $(\qquad)^2 = 4x^2 - 12x + 9$	h) $(\qquad)^2 = 9x^2 + 6x + 1$
i) $x^2 + 24 + 144 = (\qquad)^2$	j) $x^2 - 18x + 81 = (\qquad)^2$
k) $25x^2 + 20x + 4 = (\qquad)^2$	l) $9x^2 - 24x + 16 = (\qquad)^2$
m) $x^2 + 0{,}6x + 0{,}09 = (\qquad)^2$	n) $x^2 - 2\sqrt{7}\,x + 7 = (\qquad)^2$
o) $9/4\, x^2 + 3x + 1 = (\qquad)^2$	p) $x^2 - 4\sqrt{3}\,x + 12 = (\qquad)^2$

3 Escribe directamente el producto de los binomios siguientes:

a) $(x + 3)(x - 3) =$	b) $(5 + x)(x - 5) =$
c) $(3x + 2)(3x - 2) =$	d) $(1 - x^2)(1 + x^2) =$
e) $(\sqrt{5} + x)(x - \sqrt{5}) =$	f) $(x + 0{,}5)(x - 0{,}5) =$
g) $(x^5 - 1)(x^5 + 1) =$	h) $\left(\frac{2}{3}x - 4\right)\left(\frac{2}{3}x + 4\right) =$
i) $\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) =$	j) $(x^3 - 0{,}1)(x^3 + 0{,}1) =$
k) $(2xy^2 - 3)(2xy^2 + 3) =$	l) $\left(\sqrt{11}x - \sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}x + \sqrt{7}\right) =$
m) $(1 - 3x^4)(1 + 3x^4) =$	n) $\left(0{,}4x^2 - 2\right)\left(0{,}4x^2 + 2\right) =$
o) $\left(\frac{5}{3}x^3 - 2y^2\right)\left(\frac{5}{3}x^3 + 2y^2\right) =$	p) $(0{,}02x^3 - 1)(0{,}02\,x^3 + 1) =$

4 En cada ejercicio siguiente, halla los dos factores cuyo producto es el que se te da:

Ejemplo : $(\qquad)(\qquad) = x^2 - 49$

Resolución:

$$(x + 7)(x - 7) = x^2 - 49 \quad \text{ó} \quad (x - 7)(x + 7) = x^2 - 49$$

a) ( )( ) $= x^2 - 100$	b) ( )( ) $= x^2 - 121$
c) ( )( ) $= 64 - x^2$	d) ( )( ) $= 25 - x^2$
e) ( )( ) $= x^4 - 1$	f) ( )( ) $= x^6 - 9$
g) ( )( ) $= x^4 y^2 - 1$	h) ( )( ) $= 1/9 - x^2$
i) ( )( ) $= 9/16 - x^4$	j) ( )( ) $= 3 - x^2$
k) ( )( ) $= x^2 - 7$	l) ( )( ) $= 0.04 - x^2$

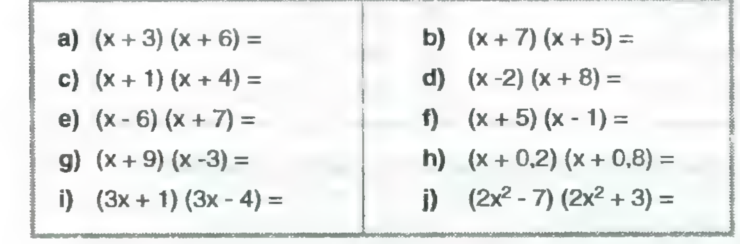
5 Halla. aplicando productos notables, el resultado de:

a) $(x + 4)^3 =$	b) $(x + 9)^3 =$	c) $(2x + 1)^3 =$
d) $(3x + 2)^3 =$	e) $(x^2 + 3y)^3 =$	f) $(x + 2/3)^3 =$
g) $(x + 0{,}2)^3 =$	h) $(3x + 5y)^3 =$	i) $(x - 5)^3 =$
j) $(x - 2)^3 =$	k) $(x - 8)^3 =$	l) $(6 - 2x)^3 =$
m) $(6 - x/3)^3 =$	n) $(2 - x/7)^3 =$	o) $\left(\sqrt[3]{x} - 1\right)^3 =$
p) $(-5 -2x)^3 =$	q) $(-2 - x/5)^3 =$	r) $(3x^2 - 2y)^3 =$
s) $(x/4 - y/2)^3 =$	t) $(0{,}5x - 0{,}4)^3 =$	u) $(1/2\ x - x^2)^3 =$

6 Halla, aplicando la fórmula de binomio de Newton, el resultado de:

a) $(x + 1)^4 =$	b) $(x^2 + 3)^5 =$	c) $(5 + x^3)^6 =$
d) $(0{,}5 + x)^6 =$	e) $(x + 4)^5 =$	f) $(x - 2y)^4 =$
g) $(x - 6)^8 =$	h) $(x - y)^{10} =$	i) $(x - 1/3)^7 =$

7 Escribe directamente el producto de los binomios siguientes:



a) $(x + 3)(x + 6) =$	b) $(x + 7)(x + 5) =$
c) $(x + 1)(x + 4) =$	d) $(x -2)(x + 8) =$
e) $(x - 6)(x + 7) =$	f) $(x + 5)(x - 1) =$
g) $(x + 9)(x -3) =$	h) $(x + 0{,}2)(x + 0{,}8) =$
i) $(3x + 1)(3x - 4) =$	j) $(2x^2 - 7)(2x^2 + 3) =$

k) $(\sqrt{3}x+6)(\sqrt{3}x-1)=$	l) $(x^3+5)(x^3-12)=$
m) $(x-10)(x-11)=$	n) $(3x^2-2)(3x^2-7)=$
o) $(2xy^3-9)(2xy^3+5)=$	p) $(5x^3-3)(5x^3+8)=$

8 Escribe directamente el producto de los binomios siguientes:

a) $(3x+1)(2x+5)=$	b) $(5x+2)(3x+4)=$
c) $(4x+3)(3x-1)=$	d) $(6x-1)(8x+5)=$
e) $(7x+6)(2x-9)=$	f) $\left(x^2+\frac{1}{3}\right)(3x^2+4)=$
g) $(2x+0{,}6)(7x-0{,}2)=$	h) $\left(\frac{3x}{4}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{6}-\frac{1}{3}\right)=$
i) $(5x^3-1)(3x^3+4)=$	j) $(8-3x)(7+x)=$
k) $(ax+6)(bx-4)=$	l) $\left(\frac{1}{4}x+\frac{4}{3}\right)\left(4x-\frac{1}{2}\right)=$
m) $\left(3x-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{4}\right)$	n) $\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{2}{3}\right)=$
o) $(0{,}5x^2-0{,}3)(0{,}2x^2-0{,}5)=$	

9 Halla aplicando productos notables, el resultado de:

a) $(x^2+2x+3)^2=$	b) $(x^3+x+1)^2=$
c) $(5+x+x^4)^2=$	d) $(2x^2+x-8)^2=$
e) $(9+x-x^2)^2=$	f) $(3x+y+6)^2=$
g) $(x^6-x^3-2)^2=$	h) $(3-x-x^4)^2=$
i) $(5x^3-2x^2-4)^2=$	j) $(8x^2-6-x)^2=$
k) $(9x-x^3+1)^2=$	l) $(2x+3y-7)^2=$

10 Escribe directamente el producto de los binomios siguientes:

a) $(x+6)(x^2-6x+36)=$	b) $(x+1)(x^2-x+1)=$

c) $(2x + 3)(4x^2 - 6x + 9) =$	d) $(7x + 4)(49x^2 - 28x + 16) =$
e) $\left(\frac{1}{2}x+8\right)\left(\frac{1}{4}x^2-4x+64\right)=$	f) $\left(\frac{5}{4}x+2\right)\left(\frac{25}{16}x^2-\frac{5}{2}x+4\right)=$
g) $(0{,}3x + 7)(0{,}09x^2 - 4{,}2x + 49) =$	h) $(x^2 + 3)(x^4 - 3x^2 + 9) =$
i) $(x^5 + 6)(x^{10} - 6x^5 + 36) =$	j) $(5x^3 + 1)(25x^6 - 5x^3 + 1) =$
k) $(x - 4)(x^2 - 4x + 16) =$	l) $(x - 7)(x^2 + 7x + 49) =$
m) $(x^4 - 2)(x^8 + 2x^4 + 4) =$	n) $\left(\frac{2}{3}x-3\right)\left(\frac{4}{9}x^2+2x+9\right)=$
o) $\left(\frac{3}{5}x-1\right)\left(\frac{9}{25}x^2+\frac{3}{5}x+1\right)=$	p) $(0{,}5x - 3)(0{,}25x^2 + 1{,}5x + 9) =$
q) $(x^2 - 8)(x^4 + 8x^2 + 64) =$	r) $(0{,}7x^3 - 5)(0{,}49x^6 + 3{,}5x^3 + 25) =$
s) $(2x^6 - 9)(4x^{12} + 18x^6 + 81) =$	t) $(7x - 3)(49x^2 + 21x + 9) =$

11 Halla, aplicando productos notables el resultado de:

a) $(x + y + 2)^3 =$	b) $(2x^2 - x + 5)^3 =$
c) $(x^3 + 2x + 4)^3 =$	d) $(6 - x^2 - x)^3 =$
e) $(2 + x^5 - x^2)^3 =$	f) $(5x + 3y - 6)^3 =$

12 Halla, aplicando las identidades de Legendre y de Lagrange, el resultado de:

a) $(2x + 4)^2 + (2x - 4)^2 =$	b) $(7x - 6)^2 + (7x + 6)^2 =$
c) $(11x + 9)^2 + (11x - 9)^2 =$	d) $(4x + 1)^2 - (4x - 1)^2 =$
e) $(2x^3 + 6)^2 - (2x^3 - 6)^2 =$	f) $\left(5x^3+\frac{1}{2}\right)^2+\left(5x^3-\frac{1}{2}\right)^2=$
g) $(7 - x^4)^2 + (7 + x^4)^2 =$	h) $(11xy^3 + 2)^2 - (11xy^3 - 2)^2 =$
i) $\left(\frac{3}{2}x+1\right)^2-\left(\frac{3}{2}x-1\right)^2=$	j) $(ax^2 + 7)^2 - (ax^2 - 7)^2 =$
k) $(0{,}6 + x)^2 + (0{,}6 - x)^2 =$	l) $(x^2 + 0{,}8)^2 - (x^2 - 0{,}8)^2 =$
m) $(x^2 + 4)(y^2 + 9) =$	n) $(a^2 + 16)(b^2 + 25) =$
o) $(x^2 + 49)(y^2 + 1) =$	p) $(x^2 + 16)(y^2 + 81) =$

13 Reducir cada una de las siguientes expresiones:

a) $(x + 4)(x - 1) - (x + 2)(x - 2) =$	b) $(x - 2)(x + 6) - (x + 3)(x + 1) =$
c) $(x + 4)(x - 1) - (x + 2)(x - 3) =$	d) $(x + 7)(x - 3) - (x + 4)(x - 5) =$
e) $(x + 1)(x - 8) + (2 - x)(3 + x) =$	f) $(6 - x)(3 - x) + (x + 4)(x - 2) =$

RESPUESTAS TALLER 12

6.

a) $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

b) $x^{10} + 15x^8 + 90x^6 + 270x^4 + 405x^2 + 243$

c) $x^{18} + 30x^{15} + 375x^{12} + 2\,500x^9 + 9\,375x^6 + 18\,750x^3 + 15\,625$

d) $x^6 + 3x^5 + \frac{15}{4}x^4 + \frac{5}{2}x^3 + \frac{15}{16}x^2 + \frac{3}{16}x + \frac{1}{64}$

e) $x^5 + 20x^4 + 160x^3 + 640x^2 + 1\,280x + 1\,024$

f) $x^4 - 8x^3y + 24x^2y^2 - 32xy^3 + 16y^4$

8.

a) $6x^2 + 17x + 5$

b) $15x^2 + 26x + 8$

c) $12x^2 + 5x - 3$

d) $48x^2 + 22x - 5$

e) $14x^2 - 51x - 54$

f) $3x^4 + 5x^2 + \frac{4}{3}$

g) $14x^2 + 3{,}8x - 0{,}12$

h) $\frac{x^2}{8} - \frac{x}{6} - \frac{1}{6}$

i) $15x^6 + 17x^3 - 4$

j) $56 - 13x - 3x^2$

k) $abx^2 + 2x(3b - 2a) - 24$

l) $x^2 + \frac{125}{24}x - \frac{2}{3}$

m) $2x^2 - \frac{35}{36}x + \frac{1}{12}$

n) $\frac{1}{4}x^6 - \frac{13}{12}x^3 + 1$

o) $0{,}1x^4 - 0{,}31x^2 + 0{,}15$

9.

a) $x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 9$

b) $x^6 + 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1$

c) $x^8 + 2x^5 + 10x^4 + x^2 + 10x + 25$

d) $4x^4 + 4x^3 - 31x^2 - 16x + 64$

e) $x^4 - 2x^3 - 17x^2 + 18x + 81$

f) $9x^2 + 6xy + 36x + y^2 + 12y + 36$

g) $x^{12} - 2x^9 - 3x^6 + 4x^3 + 4$

h) $x^8 + 2x^5 - 6x^4 + x^2 - 6x + 9$

i) $25x^6 - 20x^5 + 4x^4 - 40x^3 + 16x^2 + 16$

j) $64x^4 - 16x^3 - 95x^2 + 12x + 36$

k) $x^6 - 18x^4 - 2x^3 + 81x^2 + 18x + 1$

l) $4x^2 + 12xy - 28x + 9y^2 - 42y + 49$

11.

a) $x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 6x^2 + 6y^2 + 12xy + 12x + 12y + 8$

b) $8x^6 - 12x^5 + 66x^4 - 61x^3 + 165x^2 - 75x + 125$

c) $x^9 + 6x^7 + 12x^6 + 12x^5 + 48x^4 + 56x^3 + 48x^2 + 96x + 64$

d) $-x^6 - 3x^5 + 15x^4 + 35x^3 - 90x^2 - 108x + 216$

e) $x^{15} - 3x^{12} + 6x^{10} + 3x^9 - 12x^7 - x^6 + 12x^5 + 6x^4 - 12x^2 + 8$

f) $125x^3 + 225x^2y + 135xy^2 + 27y^3 - 450x^2 - 162y^2 - 540xy + 540x + 324y - 216$

12.

a) $8(x^2 + 4)$

b) $2(49x^2 + 36)$

c) $2(121x^2 + 81)$

d) $16x$

e) $48x^3$

f) $\dfrac{100x^6 + 1}{2}$

g) $2(x^8 + 49)$

h) $88xy^3$

i) $6x$

j) $28ax^2$

k) $2(x^2 + 0{,}36)$

l) $3{,}2\,x^2$

m) $(xy + 6)^2 + (3x - 2y)^2$

n) $(ab + 20)^2 + (5a - 4b)^2$

o) $(xy + 7)^2 + (x - 7y)^2$

p) $(xy + 36)^2 + (9x - 4y)^2$

13.

a) $3x$

b) -15

c) $4x + 2$

d) $5x - 1$

e) $-8x - 2$

f) $2x^2 - 7x + 10$

EJERCICIOS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA

Organizados por las Academias:
César Vallejo, Trilce, Pitágoras, Sigma, Alfa.

Ejercicio 1: Efectuar: $M = \sqrt{1 + (x+1)\,(x-1)\,(x^2+1)\,(x^4+1)}$

A) 1 B) x^2 C) x^4 D) Cero E) x^8

Resolución:

- Aplicando: $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$; obtenemos:

$$M = \sqrt{1+\underbrace{(x+1)(x-1)}_{x^2-1^2=x^2-1}(x^2+1)(x^4+1)} = \sqrt{1+\underbrace{(x^2-1)(x^2+1)}_{(x^2)^2-1^2=x^4-1}(x^4+1)}$$

$$M = \sqrt{1+\underbrace{(x^4-1)(x^4+1)}_{(x^4)^2-1^2=x^8-1}} = \sqrt{\cancel{1}+(x^8-\cancel{1})} = \sqrt{x^8}$$

Recuerda que:

$$\sqrt[n]{A^m} = A^{m/n}$$

$$M = \sqrt{x^8} = x^{8/2} = x^4 \Rightarrow \therefore \boxed{M = x^4}$$ ***Rpta C***

Ejercicio 2: Encontrar el valor de: $E = \left(\sqrt{5+\sqrt{24}} - \sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^2$

A) 49 **B)** 6 **C)** 8 **D)** 18 **E)** N.A.

Resolución:

- Aplicando : $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$; obtenemos:

$$E = \left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^2 - 2\sqrt{5+\sqrt{24}}\cdot\sqrt{5-\sqrt{24}} + \left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^2$$

$$E = 5+\cancel{\sqrt{24}} - 2\sqrt{(5+\sqrt{24})(5-\sqrt{24})} + 5 - \cancel{\sqrt{24}}$$

$$E = 10 - 2\sqrt{5^2 - \sqrt{24}^2}$$

$$E = 10 - 2\sqrt{25-24}$$

$$E = 10 - 2\sqrt{1} = 10 - 2 = 8 \Rightarrow \therefore \boxed{E = 8}$$ ***Rpta C***

Recuerda que:

- $\sqrt{A}\cdot\sqrt{B} = \sqrt{A\cdot B}$
- $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

Ejercicio 3: Si: $x + \frac{1}{x} = \sqrt{3}$; Calcular: $x^3 + \frac{1}{x^3}$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) $\sqrt{3}$

Resolución:

De la condición: $x+\dfrac{1}{x} = \sqrt{3}$; elevamos al cubo ambos miembros:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 = \left(\sqrt{3}\right)^3$$

Recuerda que:

- $(A + B)^3 = A^3 + 3\,A^2B + 3\,AB^2 + B^3$

$$x^3+3x^2\left(\frac{1}{x}\right)+3x\left(\frac{1}{x}\right)^2+\left(\frac{1}{x}\right)^3 = \sqrt{27}$$

Recuerda que:

$\sqrt{A\cdot B} = \sqrt{A}\cdot\sqrt{B}$

$$x^3+3x+3\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^3} = \sqrt{9\cdot 3}$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}+3\underbrace{\left(x+\frac{1}{x}\right)} = 3\sqrt{3}$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}+3\left(\sqrt{3}\right) = 3\sqrt{3} \implies \therefore\ \boxed{x^3+\frac{1}{x^3}=0}$$

Rpta A

OTRA FORMA: Si: $x+\dfrac{1}{x} = \sqrt{3}$; Calcular: $x^3+\dfrac{1}{x^3}$

Resolución:

Aplicando: $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$; en la expresión incognita , obtenemos:

$$x^3+\frac{1}{x^3} = x^3+\left(\frac{1}{x}\right)^3 = \left(x+\frac{1}{x}\right)\left[x^2-x\cdot\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right]$$

$$x^3+\frac{1}{x^3} = \sqrt{3}\left[x^2+\frac{1}{x^2}-1\right] \qquad \text{...(I)}$$

- De la condición: $x+\dfrac{1}{x} = \sqrt{3}$; elevamos al cuadrado, ambos miembros:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow x^2+2x\cdot\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2=3 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=1 \quad ...(II)$$

Reemplazamos (II) en (I):

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\sqrt{3}\ (1-1)=0 \quad \Rightarrow \quad \therefore\ x^3+\frac{1}{x^3}=0$$ ***Rpta A***

Ejercicio 4: Si: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=2$. Calcular el valor de: $K=\frac{2a+5b}{9a-2b}+\frac{3b+a}{b+a}$

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 5 **E)** 7

Resolución:

- De la condición: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=2$; damos común denominador en el primer miembro.

$$\frac{a^2+b^2}{a\cdot b}=2$$

$$a^2+b^2=2ab \Rightarrow \underbrace{a^2+b^2-2ab=0}$$

$$(a-b)^2=0 \Rightarrow a=b$$

Recuerda que:

$$\frac{x}{y}+\frac{z}{w}=\frac{x\cdot w+z\cdot y}{y\cdot w}$$

Luego, reemplazamos a = b; en la expresión «K»

$$K=\frac{2b+5b}{9b-2b}+\frac{3b+b}{b+b}=\frac{7b}{7b}+\frac{4b}{2b}=1+2=3$$

$$\therefore\ K=3$$ ***Rpta C***

Ejercicio 5: Efectuar: $Q=\left(1+\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{30}\right)\left(\sqrt{30}-\sqrt{6}-\sqrt{5}+1\right)$

A) 21 **B)** 20 **C)** 19 **D)** 31 **E)** 30

Resolución:

- En primer lugar, agrupamos términos de la manera siguiente:

$$Q = \left[\left(\sqrt{30}+1\right)+\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)\right]\left[\left(\sqrt{30}+1\right)-\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)\right]$$

- En segundo lugar, aplicamos: $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$; Obteniendo:

$$Q = \left(\sqrt{30}+1\right)^2 - \left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)^2$$

$$Q = \left(\sqrt{30}^2 + 2\sqrt{30}\cdot 1 + 1^2\right) - \left(\sqrt{6}^2 + 2\sqrt{6}\cdot\sqrt{5} + \sqrt{5}^2\right)$$

$$Q = 30 + 2\sqrt{30} + 1 - \left(6 + 2\sqrt{6\cdot 5} + 5\right)$$

$$Q = 31 + 2\sqrt{30} - 11 - 2\sqrt{30} \Rightarrow \therefore \boxed{Q = 20}$$ *Rpta B*

Ejercicio 6: Si: $a + b = \sqrt{5}$ y $ab = 3$. Entonces: $(a - b)^2$; es:

A) 5 **B)** -7 **C)** -9 **D)** 12 **E)** 10

Resolución:

- De la expresión incognita: $(a - b)^2$; obtenemos:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2(3) = a^2 + b^2 - 6 \qquad \ldots(I)$$

- De la condición: $a + b = \sqrt{5}$; elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$(a+b)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 5 \Rightarrow a^2 + 2(3) + b^2 = 5$$

$$\therefore a^2 + b^2 = -1 \qquad \ldots(II)$$

- Reemplazamoa (II) en (I):

$$(a - b)^2 = -1 - 6 \Rightarrow \therefore \boxed{(a - b)^2 = -7}$$ *Rpta B*

Ejercicio 7: Si; $\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{-4}{x-y}$. Calcular: $E = \frac{(x-y)^2 + y^2}{x^2 + y^2}$

A) y^2 **B)** x - y **C)** 1 **D)** 2 **E)** 5/2

Resolución:

En la condición: $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{-4}{x-y}$; Aplicamos: $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}$

$$\frac{x-y}{xy}=\frac{-4}{x-y} \Rightarrow \underbrace{(x-y)\,(x-y)}=-4xy$$

$$x^2-2xy+y^2=-4xy$$

$$x^2+2xy+y^2=0 \Rightarrow (x+y)^2=0 \Rightarrow \therefore \boxed{x=-y}$$

Luego, reemplazamos el valor hallado en la expresión «E»:

$$E=\frac{(x-y)^2+y^2}{x^2+y^2}=\frac{(-y-y)^2+y^2}{(-y)^2+y^2}=\frac{(-2y)^2+y^2}{y^2+y^2}=\frac{5y^2}{2y^2}=\frac{5}{2}$$

$\therefore \quad \boxed{E=\frac{5}{2}}$ ***Rpta E***

Ejercicio 8: Con la condición: $a+b+c=0$. Encontrar el equivalente de:

$$M=\frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{c^2-4ab}$$

A) a^2+b^2 **B)** bc **C)** ab **D)** c^2 **E)** ac

Resolución:

De la condición: $\boxed{a+b+c=0} \Rightarrow \boxed{a+b=-c}$ **...(I)**

La expresión hallada (I), elevamos al cuadrado, ambos miembros:

$$\underbrace{(a+b)^2}=(-c)^2$$

$$a^2+2ab+b^2=c^2 \qquad \textbf{...(II)}$$

De la expresión: $M=\frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{c^2-4ab}$; obtenemos:

$$M=\frac{[(a+b)\ (a-b)]^2}{c^2-4ab} \quad ...(III)$$

- Reemplazamos (I) y (II) en (III):

$$M=\frac{[(-c)\ (a-b)]^2}{a^2+2ab+b^2-4ab}=\frac{c^2\ (a-b)^2}{a^2-2ab+b^2}=\frac{c^2\ \cancel{(a-b)^2}}{\cancel{(a-b)^2}}$$

$\therefore$ $\boxed{M=c^2}$ ***Rpta D***

Ejercicio 9 : Si: $a^2+b^2=5$; Calcular el valor de:

$$P=(a+b+c)^2+(a+b-c)^2+2\ (a-b+c)\ (a-b-c)$$

A) 5 **B)** 10 **C)** 20 **D)** 40 **E)** 25

Resolución:

- Hacemos los siguientes cambios de variables, veamos:

$$\boxed{a+b=x} \quad ; \quad \boxed{a-b=y}$$

Reemplazamos estos valores en la expresión «P», obteniendo:

$$P=\underbrace{(x+c)^2+(x-c)^2}_{\text{Identidad de Legendre}}+2\ (y+c)\ (y-c)$$

$$P=2\left(x^2+c^2\right)+2\left(y^2-c^2\right)=2x^2+\cancel{2c^2}+2y^2-\cancel{2c^2}$$

$P=2\left(x^2+y^2\right)$; reemplazando por los valores verdaderos de «x» e «y», obtenemos:

$$P=2\Big[\underbrace{(a+b)^2+(a-b)^2}_{\text{Identidad de Legendre}}\Big]=2\left[2\left(a^2+b^2\right)\right]=4\left(a^2+b^2\right)$$

$$P=4\left(a^2+b^2\right)=4\ (5) \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad \boxed{P=20}$$ ***Rpta. C***

Ejercicio 10 : Si: $x+1/x=2$; calcular el valor de:

$$E = x+x^2+x^3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$$

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

Resolución:

- Agrupamos términos en la expresión «E»; de la manera siguiente:

$$E = \underbrace{\left(x+\frac{1}{x}\right)}+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)$$

$$E = 2+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right) \quad ...(I)$$

- **De la condición:** $x+\frac{1}{x}=2$ elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = (2)^2 \Rightarrow x^2+2x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2} = 4 \Rightarrow \therefore \boxed{x^2+\frac{1}{x^2}=2} \quad ...(II)$$

- **De la misma condición:** $x+\frac{1}{x} = 2$; elevamos al cubo ambos miembros:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 = (2)^3 \Rightarrow x^3+3x^2\cdot\frac{1}{x}+3x\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=8$$

$$x^3+3x+3\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3} = 8$$

Recuerda que:

$$(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$$

$$(A+B)^3 = A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}+3\underbrace{\left(x+\frac{1}{x}\right)} = 8$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}+3\,(2) = 8$$

$$\therefore \quad x^3+\frac{1}{x^3} = 2 \quad ...(III)$$

Luego, reemplazamos (II) y (III) en (I):

$E=2+2+2$ $\therefore$ $\boxed{E=6}$ ***Rpta C***

Ejercicio 11 : Efectuar: $Q = (x + 1)(x + 3)(x + 2)(x + 4) - (x^2 + 5x + 5)^2$

A) -1 **B)** -2 **C)** 1 **D)** 2 **E)** N.A.

Resolución:

- En este caso los factores del primer término se deben agrupar de dos en dos convenientemente de tal forma que las sumas de sus términos independientes **(T.I.)** sean iguales, es decir:

$$Q = \underbrace{(x + 1)\ (x + 4)}_{\Sigma T.I = 5}\ \underbrace{(x + 3)\ (x + 2)}_{\Sigma T.I. = 5} - (x^2 + 5x + 5)^2$$

Aplicando: $(x + a)\ (x + b) = x^2 + (a + b)\ x + ab$; obtenemos:

$$Q = \left(x^2 + 5x + 4\right)\left(x^2 + 5x + 6\right) - \left(x^2 + 5x + 5\right)^2$$

- Hacemos cambio de variable; osea: $x^2 + 5x = a$

Luego, la expresión "Q"; se transforma en:

$$Q = \underbrace{(a+4)\ (a+6)}-(a+5)^2$$

$$Q = a^2 + 10a + 24 - (a^2 + 10a + 25) = 24 - 25 = -1$$

$$\therefore\ \boxed{Q = -1}$$ ***Rpta. A***

Ejercicio 12 : Reducir: $M = (a-b)\left[3ab-(a+b)^2\right](a+b)\left[3ab+(a-b)^2\right]$

A) $a^3 + b^3$ **B)** $a^3 - b^3$ **C)** $a^6 - b^6$ **D)** $a^6 + b^6$ **E)** $b^6 - a^6$

Resolución:

Aplicando: $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \ \wedge \ (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

Obtenemos: $M = (a-b)\left[3ab-(a^2+2ab+b^2)\right](a+b)\left[3ab+\left(a^2-2ab+b^2\right)\right]$

$$M = (a-b)\left[ab-a^2-b^2\right](a+b)\left[ab+a^2+b^2\right]$$

Pero: $ab - a^2 - b^2 = -(a^2 - ab + b^2)$

Entonces: $$M = (a-b)\left[-\left(a^2-ab+b^2\right)\right](a+b)\left[a^2+ab+b^2\right]$$

$$M = -(a-b)\left(a^2-ab+b^2\right)(a+b)\left(a^2+ab+b^2\right)$$

Agrupando Términos, obtenemos:

$$M = -(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$$

$$M = -\left(a^3-b^3\right)\left(a^3+b^3\right) = -\left[\left(a^3\right)^2-\left(b^3\right)^2\right]$$

$$M = -\left[a^6-b^6\right] \Rightarrow \therefore \boxed{M=b^6-a^6}$$ *Rpta. E*

Ejercicio 13: Si: $a + b + c = 0$; Calcular el valor de: $E=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+ac+bc}$

A) 2 **B)** -2 **C)** 3 **D)** -3 **E)** 4

Resolución:

- De la condición: $a + b + c = 0$; elevamos al cuadrado a ambos miembros:

$$(a+b+c)^2 = 0^2 \Rightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=0$$

$$\therefore \boxed{(a+b+c)^2 = -2ab-2ac-2bc} \quad ...(I)$$

Reemplazamos (I) en la expresión "E"; obteniendo:

$$E = \frac{-2ab-2ac-2bc}{ab+ac+bc} = \frac{-2\,(ab+ac+bc)}{(ab+ac+bc)} = -2$$

$$\therefore \boxed{E = -2}$$ *Rpta. B*

Ejercicio 14: Reducir: $R = (x - 3)(x + 2)(x - 5)(x + 4) - (x - 2)^2 (x + 1)^2 + 22x(x - 1)$

A) 1 **B)** x - 49 **C)** 116 **D)** -x + 4 **E)** 125

Resolución:

$$R = (x-3)\,(x+2)\,(x-5)\,(x+4)-(x-2)^2(x+1)^2+22x\,(x-1)$$

$$R = \left(x^2-x-6\right)\left(x^2-x-20\right)-\left[(x-2)\,(x+1)\right]^2+22\left(x^2-x\right)$$

$$R = \left(x^2-x-6\right)\left(x^2-x-20\right)-\left(x^2-x-2\right)^2+22\left(x^2-x\right)$$

- Hacemos cambio de variable, osea: $x^2 - x = a$

Donde:

$$R = (a-6)\,(a-20)-(a-2)^2+22a$$

$$R = \cancel{a^2}-26a+120-(\cancel{a^2}-4a+4)+22a$$

$$\therefore \quad R = 116$$ ***Rpta. C***

Ejercicio 15: Simplificar: $S = \sqrt{\left(a^x+a^{-x}\right)^2-4}+\sqrt{\left(a^x-a^{-x}\right)^2+4}$

A) a^{-x} **B)** a^x **C)** $2a^{-x}$ **D)** $2a^x$ **E)** $4a^x$

Resolución:

Aplicando: $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \quad \wedge \quad (A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

Obtenemos:

$$S=\sqrt{\left(a^x\right)^2+2a^x\cdot a^{-x}+\left(a^{-x}\right)^2-4}+\sqrt{\left(a^x\right)^2-2a^x\cdot a^{-x}+\left(a^{-x}\right)^2+4} \quad \text{...(I)}$$

Pero: $a^x\cdot a^{-x}=\cancel{a^x}\cdot\dfrac{1}{\cancel{a^x}} \Rightarrow \therefore \; a^x\cdot a^{-x}=1$ **...(II)**

Reemplazamos (II) en (I):

$$S = \sqrt{\left(a^x\right)^2+2+\left(a^{-x}\right)^2-4}+\sqrt{\left(a^x\right)^2-2+\left(a^{-x}\right)^2+4}$$

$$S = \sqrt{\left(a^{x}\right)^{2} - 2 + \left(a^{-x}\right)^{2}} + \sqrt{\left(a^{x}\right)^{2} + 2 + \left(a^{-x}\right)^{2}}$$

$$S = \sqrt{\left(a^{x}\right)^{2} - 2\cdot 1 + \left(a^{-x}\right)^{2}} + \sqrt{\left(a^{x}\right)^{2} + 2\cdot 1 + \left(a^{-x}\right)^{2}} \quad \textbf{...(III)}$$

Reemplazamos (II) en (III):

$$S = \sqrt{\left(a^{x}\right)^{2} - 2a^{x}\cdot a^{-x} + \left(a^{-x}\right)^{2}} + \sqrt{\left(a^{x}\right)^{2} + 2a^{x}\cdot a^{-x} + \left(a^{-x}\right)^{2}}$$

$$S = \sqrt{\left(a^{x} - a^{-x}\right)^{2}} + \sqrt{\left(a^{x} + a^{-x}\right)^{2}} = a^{x} - a^{-x} + a^{x} + a^{-x}$$

$\therefore$ $S = 2a^{x}$ ***Rpta. D***

PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE PRODUCTOS NOTABLES

NIVEL I

1 Efectuar:

$$A = \left(3\sqrt{2} + 2\right)^{2} + \left(3\sqrt{2} - 2\right)^{2}$$

A) 40 **B)** 41 **C)** 43 **D)** 44 **E)** 46

2 Simplificar:

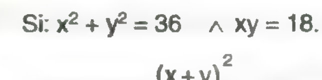
$$T = \frac{a^{3} + b^{3}}{(a+b)^{2} - 3ab} - a$$

A) b **B)** a **C)** ab **D)** 1 **E)** a + b

3 Encontrar el valor de:

$$R = \left(\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^{2}$$

A) 1 **B)** 2 **C)** $3\sqrt{5}$ **D)** $2\sqrt{5}$ **E)** 4



4 Si: $x^2 + y^2 = 36 \quad \wedge \; xy = 18$.

El valor de: $\dfrac{(x+y)^{2}}{2}$; es:

A) 48 **B)** 36 **C)** 27 **D)** 24 **E)** 26

5 Si: $x^3 - y^3 = m; \; \wedge \; x - y = n$.
Hallar el valor de: "xy"

A) $\dfrac{m^{3}-n}{3n}$ **B)** $\dfrac{m-n^{3}}{3}$ **C)** $\dfrac{m-n^{3}}{3n}$

D) $\dfrac{m^{2}-n^{3}}{n}$ **E)** $\dfrac{m+n^{3}}{3n}$

Si: $a + b = 5 \quad \wedge \quad ab = 2$.
Calcular el valor de: "a - b"

A) 17 B) $\sqrt{17}$ C) 13
D) $\sqrt{13}$ E) N.A.

Si: $x + \dfrac{1}{x} = 4$; Calcular el valor de: $M = x^3 + \dfrac{1}{x^3}$

A) 26 B) 25 C) 52 D) 68 E) 54

Calcular el equivalente de:

$$E = \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6}$$

A) $\dfrac{(x+1)^2}{x}$ B) $\dfrac{(x-1)^2}{x^3}$ C) $\dfrac{x}{(x-1)}$

D) $\dfrac{(x-1)^2}{x}$ E) N.A.

Simplificar: $M = (x + a)(x - a)(x^2 + a^2)(x^4 + a^4) + a^8$

A) x^4 B) x^8 C) x^6 D) x^{16} E) Cero

Clave de Respuestas

1. D	2. A	3. B	4. B	5. C
6. B	7. C	8. D	9. B	

NIVEL II

Si: $x + \dfrac{1}{x} = 3$; Calcular el valor de: "$x - \dfrac{1}{x}$"

A) 7 B) 9 C) $\pm\sqrt{5}$
D) $\pm\sqrt{3}$ E) ± 2

Si: $a - b = 3 \quad \wedge \quad ab = -2$. Hallar el valor de: "$a^4 + b^4$"

A) 33 B) 17 C) 25 D) 34 E) N.A

Si: $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = 4$; Calcular el valor de: $R = \dfrac{(a-b)^4 + 4a^2b^2}{16a^2b^2}$

A) 1 B) 2 C) 4 D) 1/2 E) 1/4

Si: $p - q - r = 2$ ...(1)
$pq + pr = qr$ ...(2)

El valor de: $p^2 + q^2 + r^2$; es igual a:

A) 4 B) -4 C) 2 D) -2 E) 0

Hallar el valor numérico de:

$$A = \frac{(x+y)^4 - (x-y)^4}{2x^2 + 2y^2} \text{ para:}$$

$x = \sqrt[3]{5}$; $y = \sqrt[3]{25}$

A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 40

Si:
$P = (a + b + c + d)\,(a - c + b - d)$;
$Q = (a + c - b + d)\,(a - b - d - c)$

Calcular el valor de: $K = \dfrac{P - Q}{4}$

A) 1 B) ab C) cd
D) $a^2 + b^2$ E) abcd

Si: $a + b + c = 0$. Calcular:

$$R = \frac{(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Si: $\dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{4}{m-n}$. Calcular el valor de: $E = \dfrac{2m^2 + n^2}{mn} + \dfrac{m+3n}{2m}$

A) 2 B) 4 C) -4 D) 8 E) N.A.

Si: $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = 62$; Entonces el valor de: $P = \left(\dfrac{a+b}{\sqrt{ab}}\right)^{1/3}$

A) 3 B) $\dfrac{ab}{2}$ C) $\dfrac{a+b}{2}$ D) ab E) 2

Simplificar:
$E = (a + b + c + d)^3 - (b + c + d)^3 - 3a\,(b + c + d)\,(a + b + c + d)$

A) b^3 B) a^2 C) a^3 D) c^3 E) d^3

Simplificar:

$S = (a + b + x)^2 + (a + b - x)^2 + (x + a - b)^2 + (x - a + b)^2 - 4\,(a^2 + b^2 + x^2)$

A) 1 B) a C) b D) 0 E) 8ab

12. Efectuar: $Q = (x + 3)\,(x + 2)\,(x + 5)\,(x + 4) - (x^2 + 7x + 11)^2$

A) 1 B) 2 C) -1 D) -2 E) x^2

13. Simplificar:

$$R = \frac{\left[(a+b)^2 - (a-b)^2\right]^2 - \left[(a-b)^2 + (a+b)^2\right]^2}{\left(a^2 - b^2\right)^2}$$

A) 2 B) 4 C) 8 D) -2 E) -4

14. Efectuar: $F = (a - b)^3 + (a + b)^3 + 3\,(a - b)^2\,(a + b) + 3\,(a + b)^2\,(a - b)$

A) $8b^3$ B) $8a^3$ C) $4b^3$ D) $4a^3$ E) Cero

Si se cumple que: $\dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{12}{x+3y}$.

Calcular el valor de:

$$M = \frac{x+6y}{x} + \frac{x}{y}$$

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 8

16. Simplificar: $M = (x - 2)\,(x + 3)\,(x - 4)\,(x + 1) - x^2\,(x - 1)^2 + 14x\,(x - 1) - 24$

A) Cero B) 1 C) -1 D) 2 E) -2

Clave de Respuestas

1. C	2. B	3. D	4. A
5. D	6. B	7. B	8. C
9. E	10. C	11. D	12. C
13. B	14. B	15. B	16. A

2.4.5 DIVISIÓN DE POLINOMIOS

La división de dos polinomios D(x) y d(x) [Grado D(x) ≥ d(x)] llamados dividendo y divisor respectivamente, es la operación que tiene por objeto hallar dos polinomios Q(x) [cociente] y R(x) [resto]. [grado R(x) < grado d(x)] tal que:

$$\underbrace{D(x)}_{\text{Dividendo}} = \underbrace{d(x)}_{\text{divisor}} \cdot \underbrace{Q(x)}_{\text{cociente}} + \underbrace{R(x)}_{\text{resto}}$$

En el caso particular de que el resto sea cero, la **división es exacta** y se cumple:

$$\underbrace{D(x)}_{\text{dividendo}} = \underbrace{d(x)}_{\text{divisor}} \cdot \underbrace{Q(x)}_{\text{cociente}}$$

Ahora explicaremos el procedimiento para hallar el cociente y el residuo en una división, con el siguiente ejemplo:

- Hallar el cociente y el residuo al dividir:

$$12x^4 - 7x - 74x^2 - 7x^3 + 16 \text{ entre } -7x + 3x^2 - 4$$

REGLA:

1. Se completan y ordenan los polinomios con respecto a una sola letra o variable (en forma decreciente), en caso que falte un término, éste se completa con un cero.

$$\underbrace{12x^4 - 7x^3 - 74x^2 - 7x + 16}\quad \text{entre} \quad \underbrace{3x^2 - 7x - 4}$$

(Se ha ordenado con respecto a la variable "x" tanto al dividendo como al divisor, pues en ambos polinomios no es necesario completar con ceros porque son polinomios completos).

2. Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor, obteniéndose el primer término del cociente.

$$\begin{array}{l|l} \boxed{12x^4} - 7x^3 - 74x^2 - 7x + 16 & 3x^2 - 7x - 4 \\ \hline & 4x^2 \end{array}$$

→ ***Primer término del cociente***

Luego, se multiplica este primer término del cociente por cada uno de los términos del divisor y el resultado se resta del dividendo.

(En la práctica; se acostumbra a cambiar de signo a todos los términos que resultan de multiplicar el primer término del cociente con cada uno de los términos del divisor). Veamos:

$$\begin{array}{l|l} 12x^4 - 7x^3 - 74x^2 - 7x + 16 & 3x^2 - 7x - 4 \\ \cline{2-2} -12x^4 + 28x^3 + 16x^2 & 4x^2 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

(Primer residuo) ⟶ $+ 21x^3 - 58x^2 - 7x$

- Si el residuo es cero, la división **es exacta**. Termina la división.
- Si el residuo es diferente de cero y de grado inferior que el grado del divisor, entonces éste es el residuo definitivo y la división concluye. El cociente tendrá un solo término.
- Si el residuuo es de grado mayor o igual al grado del divisor, la división continuará considerando al residuo como nuevo dividendo. Se aplicarán los pasos 2º, 3º y 4º.

Se continuará con la división hasta obtener cero o residuo de menor grado que el del divisor.

En nuestro ejemplo como el residuo: $21x^3 - 58x^2 - 7x$, es mayor que el grado del divisor: $3x^2 - 7x - 4$; continuamos con la división.

$$\begin{array}{rl|l} & 12x^4 - 7x^3 - 74x^2 - 7x + 16 & 3x^2 - 7x - 4 \\ \cline{3-3} & -12x^4 + 28x^3 + 16x^2 & 4x^2 + 7x - 3 \\ & +21x^3 - 58x^2 - 7x & \\ & -21x^3 + 49x^2 + 28x & \\ \text{(segundo residuo)} \Rightarrow & -9x^2 + 21x + 16 & \\ & +9x^2 - 21x - 12 & \\ \text{(residuo definitivo)} \Rightarrow & 4 & \end{array}$$

Rpta.

El cociente es: $4x^2 + 7x - 3$ y el residuo es 4.

Ejemplo (2): Hallar el cociente y el residuo al dividir:

$$38x^4 - 65x^3 + 27 \text{ entre } 2x^2 - 5x + 3$$

Resolución:

En este caso el polinomio dividendo no es completo, por lo tanto debemos completarlo con ceros, así: $38x^4 - 65x^3 + 0x^2 + 0x + 27$

Luego:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 38x^4 & -65x^3 & +0x^2 & +0x & +27 & 2x^2 - 5x + 3 \\ \hline -38x^4 & +95x^3 & -57x^2 & & & 19x^2 \\ \hline & 30x^3 & -57x^2 & +0x & & \end{array}$$

Resulta de dividir $\dfrac{38x^4}{2x^2} = 19x^2$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 38x^4 & -65x^3 & +0x^2 & +0x & +27 & 2x^2 - 5x + 3 \\ \hline -38x^4 & +95x^3 & -57x^2 & & & 19x^2 + 15x \\ \hline & 30x^3 & -57x^2 & +0x & & \\ & -30x^3 & +75x^2 & -45x & & \\ \hline & & +18x^2 & -45x & +27 & \end{array}$$

Resulta de dividir $\dfrac{+30x^3}{2x^2} = 15x$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 38x^4 & -65x^3 & +0x^2 & +0x & +27 & 2x^2 - 5x + 3 \\ \hline -38x^4 & +95x^3 & -57x^2 & & & 19x^2 + 15x + 9 \\ \hline & 30x^3 & -57x^2 & +0x & & \\ & -30x^3 & +75x^2 & -45x & & \\ \hline & & +18x^2 & -45x & +27 & \\ & & -18x^2 & +45x & -27 & \\ \hline & & & & 0 & \end{array}$$

(Residuo definitivo) ➡ 0

Resulta de dividir $\dfrac{+18x^2}{2x^2} = 9$

Rpta. El cociente es: $19x^2 + 15x + 9$ y el residuo es cero.

Ejemplo 3: Halla el cociente y el residuo al dividir:

$$14x^5 - 27x^4y + 21x^3y^2 - 3x^2y^3 - 2xy^4 \quad \text{entre} \quad 7x^3 - 3x^2y - xy^2$$

Resolución:

Como se observará los polinomios dividendo y divisor están ordenados en forma decreciente, respecto a la variable x.

Luego:

$$\begin{array}{l|l} 14x^5 - 27x^4y + 21x^3y^2 - 3x^2y^3 - 2xy^4 & 7x^3 - 3x^2y - xy^2 \\ \hline -14x^5 + 6x^4y + 2x^3y^2 & 2x^2 \\ \quad - 21x^4y + 23x^3y^2 - 3x^2y^3 & \end{array}$$

Resulta de dividir $\dfrac{14x^5}{7x^3} = 2x^2$

$$\begin{array}{l|l} 14x^5 - 27x^4y + 21x^3y^2 - 3x^2y^3 - 2xy^4 & 7x^3 - 3x^2y - xy^2 \\ \hline -14x^5 + 6x^4y + 2x^3y^2 & 2x^2 - 3xy \\ \quad - 21x^4y + 23x^3y^2 - 3x^2y^3 & \\ \quad + 21x^4y - 9x^3y^2 - 3x^2y^3 & \\ \qquad + 14x^3y^2 - 6x^2y^3 - 2xy^4 & \end{array}$$

Resulta de dividir $\dfrac{-21x^4y}{7x^3} = -3xy$

$$\begin{array}{l|l} 14x^5 - 27x^4y + 21x^3y^2 - 3x^2y^3 - 2xy^4 & 7x^3 - 3x^2y - xy^2 \\ \hline -14x^5 + 6x^4y + 2x^3y^2 & 2x^2 - 3xy + 2y^2 \\ \quad - 21x^4y + 23x^3y^2 - 3x^2y^3 & \\ \quad + 21x^4y - 9x^3y^2 - 3x^2y^3 & \\ \qquad + 14x^3y^2 - 6x^2y^3 - 2xy^4 & \\ \qquad - 14x^3y^2 + 6x^2y^3 + 2xy^4 & \\ \hline \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Resulta de dividir $\dfrac{14x^3y^2}{7x^3} = 2y^2$

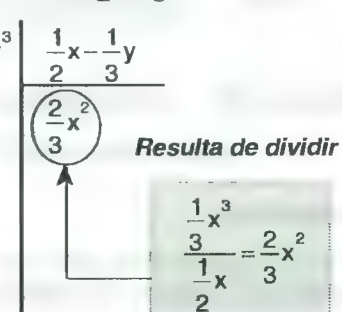
Rpta. El cociente es: $2x^2 - 3xy + 2y^2$ y el residuo es cero.

Ejemplo (4) : Halla el cociente y el residuo al dividir:

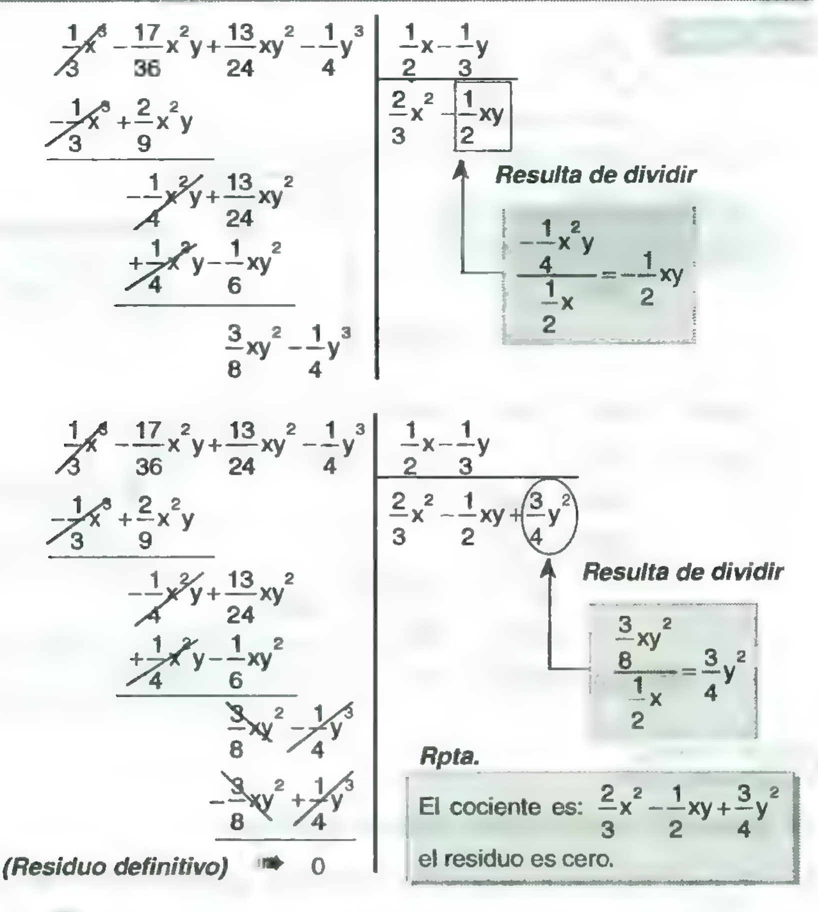
$$\frac{1}{3}x^3 - \frac{17}{36}x^2y + \frac{13}{24}xy^2 - \frac{1}{4}y^3 \text{ entre } \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y$$

Resolución:

$$\begin{array}{l|l} \frac{1}{3}x^3 - \frac{17}{36}x^2y + \frac{13}{24}xy^2 - \frac{1}{4}y^3 & \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y \\ \hline -\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{9}x^2y & \frac{2}{3}x^2 \\ \hline \left(-\frac{17}{36} + \frac{2}{9}\right)x^2y + \frac{13}{24}xy^2 & \\ -\frac{1}{4}x^2y + \frac{13}{24}xy^2 & \end{array}$$



Resulta de dividir $\dfrac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}x} = \dfrac{2}{3}x^2$



Ejemplo (5) : Halle el cociente y el residuo al dividir:

$$12a^{2x+2}-23a^{2x+3}-10a^{2x+4}+25a^{2x+5} \text{ entre } 4a^{x+1}-5a^{x+2}$$

Resolución:

Como se observará los polinomios dividendo y divisor están ordenados en forma creciente con respecto a la variable "**a**".

Luego:

$$\begin{array}{l|l} \bullet\ \cancel{12a^{2x+2}} - 23a^{2x+3} - 10a^{2x+4} + 25a^{2x+5} & 4a^{x+1} - 5a^{x+2} \\ \underline{-\cancel{12a^{2x+2}} + 15a^{2x+3}} & \boxed{3a^{x+1}} \\ \qquad -\ 8a^{2x+3} - 10a^{2x+4} & \end{array}$$

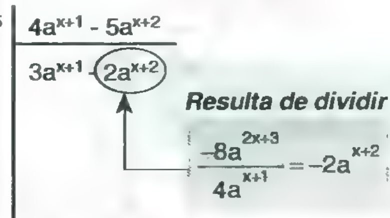
← *Resulta de dividir*

$$\frac{12a^{2x+2}}{4a^{x+1}}=3a^{x+1}$$

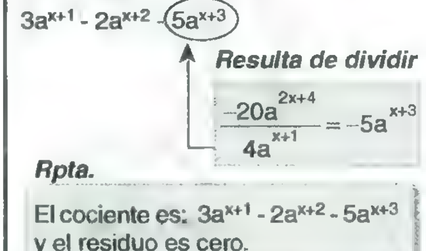
Recuerda que:

$$\frac{A^m}{A^n} = A^{m-n}$$

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{12a^{2x+2}} - 23a^{2x+3} - 10a^{2x+4} + 25a^{2x+5} & 4a^{x+1} - 5a^{x+2} \\
-\cancel{12a^{2x+2}} + 15a^{2x+3} & 3a^{x+1} - 2a^{x+2} \\
\quad -\cancel{8a^{2x+3}} - 10a^{2x+4} & \\
\quad +\cancel{8a^{2x+3}} - 10a^{2x+4} & \\
\qquad -20a^{2x+4} + 25a^{2x+5} &
\end{array}$$



$$\begin{array}{l|l}
\cancel{12a^{2x+2}} - 23a^{2x+3} - 10a^{2x+4} + 25a^{2x+5} & 4a^{x+1} - 5a^{x+2} \\
-\cancel{12a^{2x+2}} + 15a^{2x+3} & 3a^{x+1} - 2a^{x+2} - 5a^{x+3} \\
\quad -\cancel{8a^{2x+3}} - 10a^{2x+4} & \\
\quad +\cancel{8a^{2x+3}} - 10a^{2x+4} & \\
\qquad -\cancel{20a^{2x+4}} + \cancel{25a^{2x+5}} & \\
\qquad +\cancel{20a^{2x+4}} - \cancel{25a^{2x+5}} & \\
\text{(Residuo definitivo)} \Rightarrow 0 &
\end{array}$$



Rpta.

El cociente es: $3a^{x+1} - 2a^{x+2} - 5a^{x+3}$ y el residuo es cero.

PROPIEDADES

De los ejemplos resueltos anteriormente se deduce que:

1. El grado del cociente es igual a la diferencia de los grados del dividendo y del divisor.

   Grado (cociente) = Grado (Dividendo) - Grado (divisor)

2. El término independiente del dividendo estará determinado por el producto de los términos independientes del divisor y el cociente más el término independiente del residuo.

   T.I. (Dividendo) = T.I. (divisor) x T.I. (cociente) + T.I. (residuo)

3. Grado máximo del residuo es igual al grado del divisor menos uno.

   Grado máximo (R(x)) = Grado (d(x)) - 1

DIVISIÓN DE POLINOMIOS APLICANDO EL MÉTODO DE LOS COEFICIENTES SEPARADOS

Para dividir por éste método sólo se toman en cuenta los coeficientes del dividendo y divisor, con sus respectivos signos, teniendo en cuenta además los criterios del método ya estudiado anteriormente, concluyendo la división, o sea obteniendo todos los términos del cociente que como máximo es igual a su grado más uno.

Ejemplo (1): Dividir por el método de los coeficientes separados.

$$12x^4 - 7x - 74x^2 - 7x^3 + 16 \text{ entre } -7x + 3x^2 - 4$$

Resolución:

En primer lugar, ordenamos los polinomios dividendo y divisor, obteniendo:

$$12x^4 - 7x^3 - 74x^2 - 7x + 16 \text{ entre } 3x^2 - 7x - 4$$

Luego:

12	-7	-74	-7	16	|	3	-7	-4
-12	28	16	↓	↓	|	4	7	-3
	21	-58	-7		|	(términos del cociente)		
	-21	49	28	↓	|			
		9	21	16	|			
		-9	-21	-12	|			
		Residuo	=	4	|			

$Q(x) = 4x^2 + 7x - 3$

$R(x) = 4$

Ejemplo (2): Dividir por el método de los coeficientes separados:

$$38x^4 - 65x^3 + 27 \text{ entre } 2x^2 - 5x + 3$$

Resolución:

En este caso el polinomio dividendo no es completo, por lo tanto debemos completarlo con ceros, así: $38x^4 - 65x^3 + 0x^2 + 0x + 27$ entre $2x^2 - 5x + 3$

Luego:

38	-65	0	0	27	|	2	-5	3
-38	95	-57	↓	↓	|	19	15	9
	30	-57	0		|			
	-30	+75	-45	↓	|			
		18	-45	27	|			
		-18	+45	-27	|			
		Residuo	=	0	|			

$Q(x) = 19x^2 + 15x + 9$

$R(x) = 0$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS APLICANDO EL MÉTODO DE HORNER

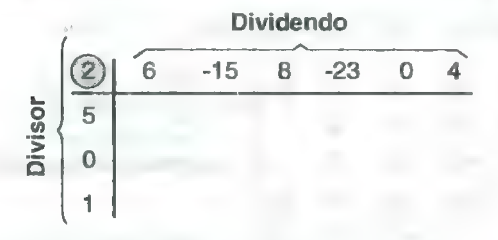
Para dividir dos polinomios por el método de Horner, primeramente se trazan dos rectas que se intersectan, una vertical y otra horizontal. Encima de la recta horizontal y a la derecha de la vertical se colocan los coeficientes del dividendo con su propio signo. A la izquierda de la recta vertical se coloca el primer coeficiente del divisor con su propio signo y debajo de la horizontal se colocan el resto de coeficientes del divisor con signo cambiado, por ejemplo:

$$8x^3 + 6x^5 - 15x^4 - 23x^2 + 4 \text{ entre } -5x^2 - 1 + 2x^3$$

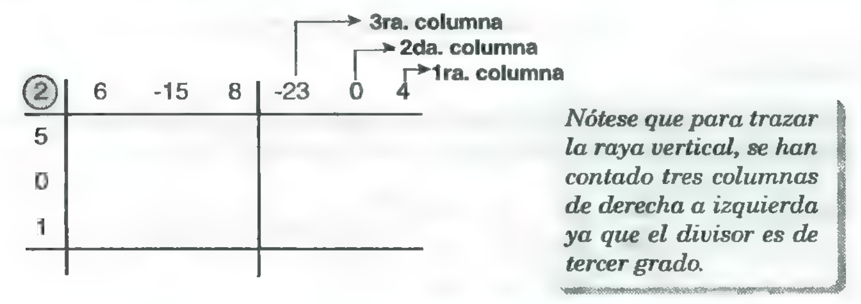
En primer lugar, ordenamos y completamos dichos polinomios, obteniendo:

$$6x^5 - 15x^4 + 8x^3 - 23x^2 + 0x + 4 \text{ entre } 2x^3 - 5x^2 + 0x - 1$$

Luego:



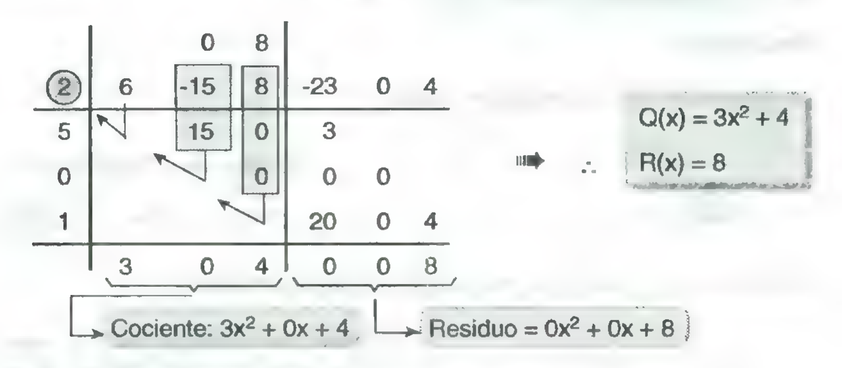
Para comenzar a dividir se traza otra raya vertical entre los coeficientes del dividendo, el número de columnas a contar de **derecha a izquierda** es igual al grado del divisor, esta raya servirá para separar el cociente del residuo en la respuesta. Además se traza una recta horizontal paralela a la anterior para colocar debajo de ella la respuesta por lo que a división quedaría así:



Nótese que para trazar la raya vertical, se han contado tres columnas de derecha a izquierda ya que el divisor es de tercer grado.

Para comenzar a dividir, se divide el primer término del dividendo (6) entre el número encerrado en una circunferencia, obteniéndose como resultado 3, éste se coloca debajo de la segunda raya horizontal y se multiplica por aquellos números que estan a la izquierda de la raya vertical y debajo de la primera horizontal colocando los productos directamente debajo de los números -15 y 8. A continuación se suma

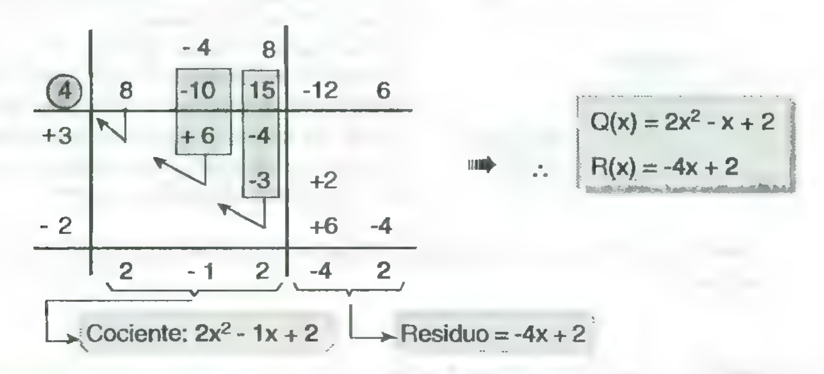
la siguiente columna y el resultado se divide por el número encerrado por la circunferencia y se coloca el resultado debajo de la raya horizontal, este resultado se vuelve a multiplicar por aquellos términos de la izquierda de la raya vertical y debajo de la horizontal, resultados que se colocan en las columnas correspondientes al -23 y al 0. La operación se realiza hasta completar el resultado correspondiente a las columnas antes de la segunda vertical, luego de esa raya la suma de las columnas ya no se dividen entre el número encerrado por la circunferencia, sino simplemente se suman.



Ejemplo (2) : Dividir: $8x^4 - 10x^3 + 15x^2 - 12x + 6$ entre $4x^2 - 3x + 2$

Resolución:

Como los polinomios están completos y ordenados hacemos el esquema y efectuamos por Horner.



MÉTODO DE RUFFINI:

Este método es aplicable a divisores de la forma $(x \pm a)$ y con ciertas restricciones a divisores de la forma $(ax^n \pm b)$

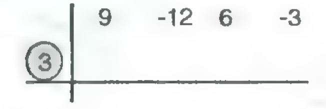
1º Caso: Divisor de la forma: $x \pm a$

Para dividir por el método de Ruffini se trazan dos rayas que se intersectan, una vertical y una horizontal, encima de la raya horizontal y a la derecha de la vertical se coloca los coeficientes del dividendo con su propio signo y encima de la raya horizontal y a la izquierda de la vertical se coloca aquel valor de "x" que anula el divisor.

Ejemplo: Dividir: $9x^3 - 12x^2 + 6x - 3$ entre $x - 3$

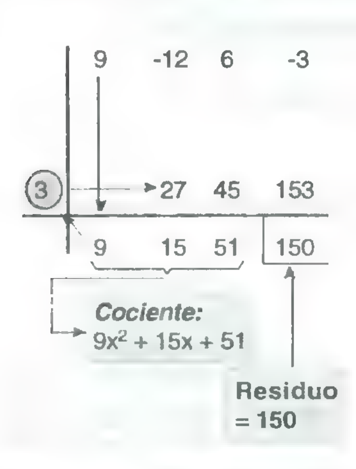
Resolución:

La disposición de los coeficientes sería:



- El valor de "x" que anula al divisor (x - 3) es: $x = 3$

Para comenzar a dividir se procede de la siguiente manera:



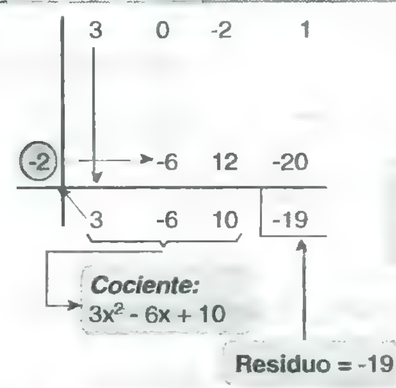
El primer coeficiente se baja de frente y se escribe en el resultado debajo de la línea horizontal, este resultado se multiplica por el número encerrado en la circunferencia y se coloca debajo del siguiente coeficiente del dividendo esta columna se suma y se obtiene un segundo coeficiente en el resultado el cual a su vez se vuelve a multiplicar por el número en la circunferencia y se coloca en la columna que sigue debajo del siguiente coeficiente del dividendo, esta operación se repite hasta agotar los coeficientes del dividendo. El último coeficiente del resultado constituye el residuo y los anteriores constituyen los coeficientes del cociente.

Nota: *Nótese que el grado del cociente es uno menor que el grado del dividendo.*

Ejemplo (2) : Dividir: $3x^3 - 2x + 1$ entre $x + 2$

Resolución:

- Completamos el dividendo así: $3x^3 - 2x + 1 = 3x^3 + 0x^2 - 2x + 1$



- El valor de "x" que anula al divisor:

$x + 2$ es: $x = -2$

- Residuo: - 19

El cociente sería: $Q = 3x^2 - 6x + 10$

El residuo sería: $R = -19$

Nota: *No debemos olvidarnos de colocar un cero por cada término que falte para completar el polinomio dividendo.*

CASOS ESPECIALES

1º Divisor de la forma: $ax \pm b$

Ante todo, debemos tener en cuenta que para aplicar el método de Ruffini en una división, el coeficiente del término en "x" en el divisor debe ser la unidad.

Para lograrlo se procederá a dividir el dividendo y el divisor por el coeficiente del término en "x" en el divisor, después de lo cual el cociente no variará pero el residuo quedará dividido por dicho número, por lo que el residuo que se obtenga en la división será un residuo falso y para obtener el verdadero deberá multiplicarse el residuo falso por aquel número por el que se dividió al dividendo y el divisor.

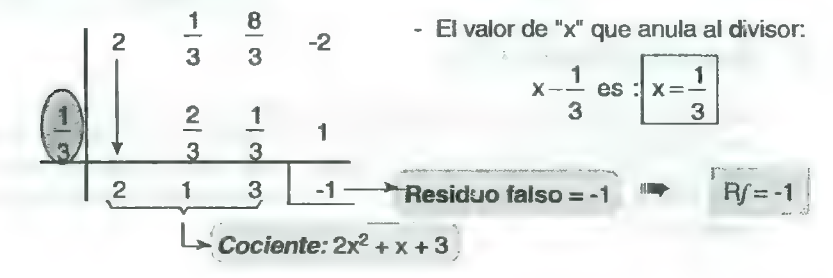
Ejemplo (1): Dividir: $6x^3 + x^2 + 8x - 6$ entre $3x - 1$

Resolución:

- En primer lugar dividimos entre 3 tanto al dividendo como al divisor.

$$\frac{6x^3+x^2+8x-6}{3} \text{ entre, } \frac{3x-1}{3} \text{ obteniendo } 2x^3+\frac{1}{3}x^2+\frac{8}{3}x-2 \text{ entre } x-\frac{1}{3}$$

- En segundo lugar, aplicamos el método de Ruffini:



Luego: El residuo verdadero sería:

$$Rv = 3\,(-1) = -3$$

$$Rv = -3$$

$\Rightarrow \quad \therefore$ $Q(x) = 2x^2 + x + 3$

$Rf = -1; \quad Rv = -3$

Ejemplo (2): Dividir: $4x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 3x - 4$ entre $2x - 1$

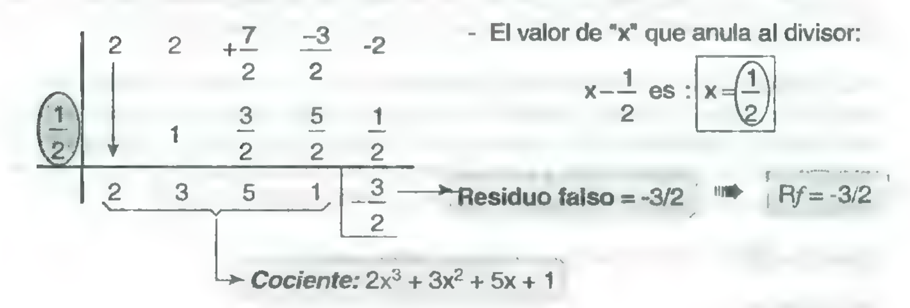
Resolución:

- En primer lugar dividimos entre 2, tanto al dividendo como al divisor:

$$\frac{4x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 3x - 4}{2} \text{ entre ; } \frac{2x-1}{2} \text{ obteniendo}$$

$$2x^4 + 2x^3 + \frac{7}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2 \text{ entre } x - \frac{1}{2}$$

- En segundo lugar, aplicamos el método de Ruffini



	2	2	$+\frac{7}{2}$	$\frac{-3}{2}$	-2
$\frac{1}{2}$	↓	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$
	2	3	5	1	$-\frac{3}{2}$

- El valor de "x" que anula al divisor:

$x - \frac{1}{2}$ es : $x = \frac{1}{2}$

$-\frac{3}{2}$ → Residuo falso = -3/2 $\Rightarrow$ $Rf = -3/2$

→ ***Cociente:*** $2x^3 + 3x^2 + 5x + 1$

Luego: El residuo verdadero sería:

$$Rv = \not{2}\left(-\frac{3}{\not{2}}\right) = -3$$

$$Rv = -3$$

$\Rightarrow \quad \therefore$ $Q(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 1$

$Rf = -3/2; \quad Rv = -3$

2º Divisor de la forma: $x^n \pm a$

- La condición para que una división de este tipo se pueda realizar por el método de Ruffini es que los exponentes de la variable "x" en el dividendo sean múltiplos del exponente de "x" en el divisor. Para poder dividir por este método se hace el cambio de variable; $x^n = y$; y se efectuará la división según lo establecido.

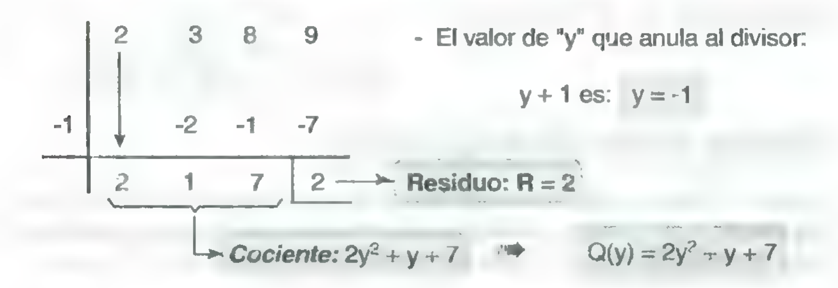
Ejemplo (1): Dividir: $2x^6 + 3x^4 + 8x^2 + 9$ entre $x^2 + 1$

Resolución:

- Haciendo el cambio de variable: $x^2 = y$; se tiene que:

$$2(x^2)^3 + 3(x^2)^2 + 8(x^2) + 9 \text{ entre } x^2 + 1 \Rightarrow 2y^3 + 3y^2 + 8y + 9 \text{ entre } y + 1$$

- Luego, dividimos estos polinomios aplicando el método de Ruffini:



Reemplazando: $y = x^2$; obtenemos que:

$$Q(y) = 2y^2 + y + 7$$

$$Q(x) = 2(x^2)^2 + x^2 + 7 = 2x^4 + x^2 + 7$$

$$\therefore \quad Q(x) = 2x^4 + x^2 + 7$$

$$R = 2$$

Ejemplo (2): Dividir: $x^2 + 2x^{4/3} - 3x^{2/3} + 8$ entre $x^{2/3} - 1$

Resolución:

Haciendo el cambio de variable: $x^{2/3} = y$; donde: $x^2 = y^3$

Luego: $x^2 + 2(x^{2/3})^2 - 3(x^{2/3}) + 8$ entre $x^{2/3} - 1$

$$y^3 + 2y^2 - 3y + 8 \text{ entre } y - 1$$

Ahora dividimos estos polinomios aplicando el método de Ruffini:

	1	2	-3	8
1	↓	1	3	0
	1	3	0	8

- El valor de "y" que anula al divisor:

y - 1 es: $y = 1$

Residuo: 8 → $R = 8$

Cociente: $1y^2 + 3y + 0$ ➠ $Q(y) = y^2 + 3y$

Reemplazamos: $y = x^{2/3}$; obteniendo: $Q(x) = (x^{2/3})^2 + 3(x^{2/3}) = x^{4/3} + 3x^{2/3}$

$\therefore$ $Q(x) = x^{4/3} + 3x^{2/3}$; $R = 8$

TEOREMA DEL RESTO O DE DESCARTES

Permite calcular el resto, sin necesidad de efectuar la operación de la división. Se emplea por lo general para divisiones de polinomios de cualquier grado entre divisores de la forma: $ax \pm b$, o cualquier otra expresión transformable a esta

Lema o Enunciado de Descartes:

Dado un polinomio P(x) como dividendo y un divisor de la forma: $(ax \pm b)$. Para calcular el resto en forma directa, se iguala el divisor a cero; se despeja la variable y esta se reemplaza en el dividendo.

Ejemplo (1): Calcular el residuo de dividir: $x^3 - 2x^2 + 5x - 3$ entre $2x - 1$

Resolución:

Igualamos el divisor a cero: $2x - 1 = 0 \Rightarrow$ $x = 1/2$

Este valor de $x = 1/2$, lo reemplazamos en el dividendo:

Dividendo $= x^3 - 2x^2 + 5x - 3$

$$\text{Residuo} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{2}\right) - 3 = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} + \frac{5}{2} - 3$$

$$= \frac{1 - 4 + 20 - 24}{8} \quad ➠ \quad \therefore \ \text{Residuo} = -7/8$$

Ejemplo (2) : Calcular el residuo de dividir: $x^{20} - 2x^6 + 1$ entre $x + 1$

Resolución:

Igualamos el divisor a cero: $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

Este valor de $x = -1$ lo reemplazamos en el dividendo:

Dividendo $= x^{20} - 2x^6 + 1$

Residuo $= (-1)^{20} - 2(-1)^6 + 1 = 1 - 2(1) + 1 = 0 \Rightarrow \therefore$ Residuo = cero

Ejemplo (3): Calcuar el valor de "k" para que el polinomio: $x^3 - kx^2 + x + 6$; sea divisible por $x + 2$

Resolución:

Primero calculamos el residuo de la división con el procedimiento ya señalado; y lo igualamos a cero para que se cumpla la condición de divisibilidad.

- Igualamos el divisor a cero: $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$
- Este valor de $x = -2$; lo reemplazamos en el dividendo:

$$\text{Dividendo} = x^3 - kx^2 + x + 6$$

$$\text{Residuo} = (-2)^3 - k(-2)^2 + (-2) + 6 \text{ ; Por divisibilidad}$$

$$0 = -8 - 4k - 2 + 6$$

$$4k = -4$$

$$k = -1$$

Divisibilidad:

Se dice que un polinomio es divisible por otro cuando al dividirse resulta como cociente una expresión algebraica entera y como residuo, cero.

Ejemplo (4): Determinar los coeficientes a y b para el polinomio:

$$x^3 + 6x^2 + ax + b\text{; sea divisible por: } x^2 - 4$$

Resolución:

- Igualamos el divisor a cero: $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2$
- Reemplazamos el valor de $x = \pm 2$; en el dividendo:

Para: $x = 2 \Rightarrow (2)^3 + 6(2)^2 + a(2) + b =$ Dividendo; (Por divisibilidad)

$8 + 24 + 2a + b = 0 \Rightarrow 2a + b = -32$ ...(1)

Para: $x = -2 \Rightarrow (-2)^3 + 6(-2)^2 + a(-2) + b =$ dividendo: (Por divisibilidad)

$-8 + 24 - 2a + b = 0 \Rightarrow -2a + b = -16$ ...(2)

Sumamos miembro a miembro (1) y (2); obteniendo:

$2b = -48 \Rightarrow \therefore b = -24$

Reemplazamos el valor de "b" en (1):

$2a + (-24) = -32 \Rightarrow \boxed{2a = -8} \Rightarrow \therefore a = -4$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 13

1. Las siguientes divisiones son exactas. Halla el polinomio cociente en cada division:

a) $(20x^3 - 2x^2 - 16x + 6) : (4x - 2)$
b) $(9x^3 + 3x^2 + x - 1) : (3x - 1)$
c) $(38x^4 - 65x^3 + 27) : (2x^2 - 5x + 3)$
d) $(12x^4 - 7x^3 - 74x^2 - 7x + 2) : (3x^2 - 7x - 4)$
e) $(15x^4 - 29x^3 + 54x^2 - 34x + 24) : (3x^2 - 4x + 6)$
f) $(2x^5 + 10x^4 - 13x^3 - 29x^2 + 51x - 18) : (x^2 + 5x - 3)$
g) $(18x^5 + 57x^3 + 8x^2 + 30x + 20) : (2x^2 + 5)$
h) $(5x^6 - 15x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 24x + 8) : (x^2 - 3x + 1)$

2. Halla el cociente y residuo en cada división:

a) $(2x^5 - 9x^4 + 21x^3 - 29x^2 - 1 + 10x)$ entre $(-5x + 1 + 2x^2)$

b) $\left(\frac{3}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{5}{3}x^2 - 5\right)$ entre $\left(x^2 - \frac{3}{2}x - 3\right)$

c) $(x^5 + 5x^4 - 9x^3 - 340x - 125x^2 - 300)$ entre $(-15x + x^3 - 50)$

d) $\left(\frac{1}{3}y^3 - \frac{17}{36}y^2x + \frac{13}{24}yx^2 - \frac{1}{4}x^3\right)$ entre $\left(\frac{2}{3}y^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{3}{4}x^2\right)$

3. Halla el cociente y residuo en cada división:

a) $(24x^{2a+2} - 46x^{2a+3} - 20x^{2a+4} + 50x^{2a+5}) : (8x^{a+1} - 10x^{a+2})$

b) $(3x^{a+2} - 6x^{a+1} + 6x^{a} - 15x^{a-1}) : (3x^2 - 3x)$

c) $(18x^{a+2} + 6x^{a+1} + 2x^{a} - 2x^{a-1}) : (6x^{a} - 2x^{a-1})$

4. Mediante la regla de Ruffini, halla el cociente y el resto de las divisiones siguientes:

a) $(x^4 - 3x^3 + 5x - 8) : (x + 2)$

b) $(3x^3 - 5x^2 + 7) : (x - 3)$

c) $(x^5 - 3x^3 - 54x - 2) : (x - 2)$

d) $(2x^3 - 6x^2 + 3) : (x - 1)$

e) $(3x^5 - 8x^3 + 2x^2) : (x + 1)$

f) $(2x^3 - 9x^2 + 18x - 12) : (x - 4)$

g) $\left(\frac{2}{3}x^4 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 1\right) : (x - 1)$

h) $(x^3 - 6x^2 + 2x + 5) : (x + 3)$

5. Halla el cociente y residuo en cada división, aplicando el método de Horner.

a) $(2x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 4x - 2) : (x^2 + x - 3)$

b) $(9x^3 + 12x^2 + 12x + 1) : (x^2 + 3x + 2)$

c) $(9x^5 + 9x^4 - 16x^3 - 14x^2 + 8x - 3) : (3x^3 + 2x^2 + 5)$

d) $(7x^2 - x^4 - 27x + x^5 + 10) : (x^2 - x + 5)$

e) $(38x^4 + 27 - 65x^3) : (-5x + 2x^2 + 3)$

f) $(10x^4 - 29x^2 + 2x^5 + 51x - 13x^3 - 18) : (5x + x^2 - 3)$

6. Halla el residuo de las divisiones siguientes; empleando el teorema del resto.

a) $(2x^5 - 3x^4 + 5x - 4) : (x - 2)$

b) $(6x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 1) : (x - 1)$

c) $(2x^6 - 5x^4 + 7x^2 + 3) : (x + 1)$

d) $(x^8 - y^8)$ entre $(x + y)$

e) $(x^3 + 2x^2a + a^3)$ entre $(x + a)$

f) $(x^2 - 6ax + 3a^2)$ entre $(x - 2a)$

7. Determinar el valor de "k" para que el polinomio: $x^4 - 5x^2 + 7x + k$, sea divisible por $(x + 2)$

8. Determinar el valor de "k" para que el polinomio: $x^4 - 5x^3 + 6x^2 + k$, sea divisible por $(x - 3)$

9. ¿Cuál es el valor de "n"; para que el polinomio: $(x^5 + ny^5) - (x + y)^5$ sea divisible por $(x + y)$

10. ¿Cuál es el valor de "n"; para que el polinomio: $(8a^7 + nb^7) - (a + 3b)^7 + (4a^7 + 4nb^7)$ sea divisible entre $(a + b)$

11. Determinar a y b para que el polinomio: $x^4 - 8x^3 + 3x^2 - ax + b$; sea divisible por: $x^2 - 1$.

RESPUESTAS TALLER 13

1.
a) $5x^2 + 2x - 3$ b) $3x^2 + 2x + 1$ c) $19x^2 + 15x + 9$
d) $4x^2 + 7x - 3$ e) $5x^2 - 3x + 4$ f) $2x^3 - 7x + 6$
g) $9x^3 + 6x + 4$ h) $5x^4 - 2x^2 + 8$

2.
a) Cociente $= x^3 - 2x^2 + 5x - 1$
Residuo = Cero

b) Cociente $= \frac{3}{4}x^2 - \frac{7}{8}x + \frac{125}{48}$
Residuo $= \frac{41}{32}x + \frac{45}{16}$

c) Cociente $= x^2 + 5x + 6$
Residuo = Cero

d) Cociente $= \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}x$
Residuo = Cero

3.
a) Cociente: $3x^{a+1} - 2x^{a+2} - 5x^{a+3}$; Residuo: Cero
b) Cociente: $x^a - x^{a-1} + x^{a-2}$; Residuo: $-12x^{a-1}$
c) Cociente: $3x^2 + 2x + 1$; Residuo: Cero

4.
a) Cociente: $x^3 - 5x^2 + 10x - 15$
Residuo: 22

b) Cociente: $3x^2 + 4x + 12$
Residuo: 43

c) Cociente: $x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x - 50$
Residuo: -102

d) Cociente: $2x^2 - 4x - 4$
Residuo: -1

e) Cociente: $3x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 7x - 7$
Residuo: 7

f) Cociente: $2x^2 - x + 14$
Residuo: 44

g) Cociente: $\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$
Residuo: $-\frac{2}{3}$

h) Cociente: $x^2 - 9x + 29$
Residuo: -82

5.
a) Cociente: $2x^2 - 8x + 17$
Residuo: $-45x + 49$

b) Cociente: $9x - 15$
Residuo: $39x + 31$

c) Cociente: $3x^2 + x - 6$
Residuo: $-17x^2 + 3x + 27$

d) Cociente: $x^3 - 5x + 2$
Residuo: cero

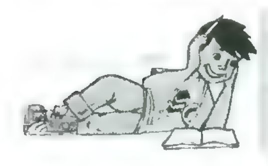
e) Cociente: $19x^2 + 15x + 9$
Residuo: Cero

f) Cociente: $2x^3 - 7x + 6$
Residuo: Cero

6. a) $R = 22$ b) $R = 6$ c) $R = 7$
d) $R =$ Cero e) $2a^3$ f) $R = -5a^2$

7. $k = 18$ **8.** $k = 0$ **9.** $n = 1$

10. $n = 28$ **11.** $a = -8$ y $b = -4$



EJERCICIOS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA

Organizados por las Academias:
César Vallejo, Trilce, Pitágoras, Sigma, Alfa.

Ejercicio 1: Determinar la suma de coeficientes del cociente que se obtiene al dividir:

$$(x^5 + 3x^2 - 2x^4 - 6) : (x^2 + x + 1)$$

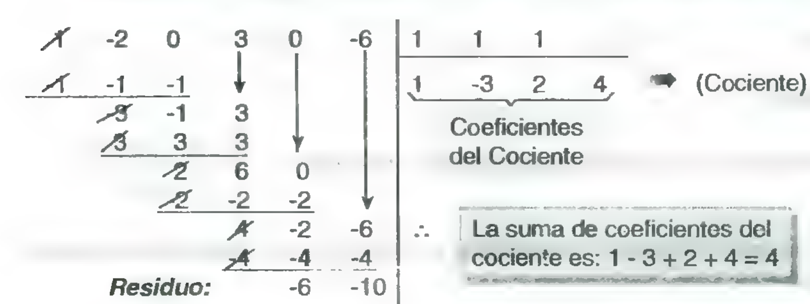
A) -1 **B)** 4 **C)** 1 **D)** 2 **E)** 3

Resolución:

- Los términos del polinomio dividendo los ordenamos en forma descendente y a la vez los términos que faltan se completan con ceros, veamos:

$$(x^5 - 2x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 0x - 6) : (x^2 + x + 1)$$

- Efectuamos la división, aplicando el método de coeficientes separados.



Rpta. B

Ejercicios 2 : Señale: (mn) de la división exacta: $\dfrac{x^4+(m-1)x^2+n-2}{x^2-x+1}$

A) 2 B) 3 C) 6 D) 8 E) 10

Resolución:

- Los términos del polinomio dividendo los ordenamos en forma descendente y a la vez los términos que faltan se completan con ceros; veamos: $\dfrac{x^4+0x^3+(m-1)x^2+0x+(n-2)}{x^2-x+1}$

- Efectuamos la división, aplicando el método de coeficientes separados.

						Divisor
~~1~~	0	(m - 1)	0	(n - 2)		1 -1 1
~~-1~~	1	-1				1 1 (m - 1) ⇒ (Cociente)
	~~-1~~	(m - 2)	0			
	~~1~~	1	-1			
		~~(m - 1)~~	-1	(n - 2)		
		~~-(m - 1)~~	(m - 1)	-(m - 1)		
	Residuo:		(m - 2)	(n - m - 1)		

* **Como la división es exacta:** i) $m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2$

ii) $n - m - 1 = 0 \Rightarrow n - 2 - 1 = 0 \Rightarrow n = 3$

$\therefore\ nm = 3.2 = 6$ **Rpta. C**

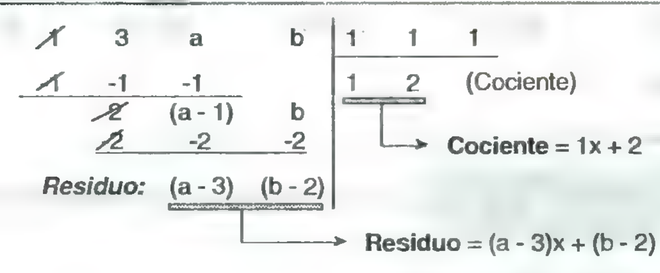
Ejercicio 3: Calcular: "a + b"; si al dividir: $\dfrac{3x^2+x^3+ax+b}{x^2+x+1}$; el resto es: 3x + 5

A) 1 B) -13 C) 13 D) -12 E) 12

Resolución:

- Ordenamos los términos del dividendo; obteniendo: $\dfrac{x^3+3x^2+ax+b}{x^2+x+1}$

- Efectuamos la división, empleando el método de los **coeficientes separados.**



$3x + 5 = (a - 3)x + (b - 2)$

Por comparación de términos:

i) $3 = a - 3 \Rightarrow a = 6$

ii) $5 = b - 2 \Rightarrow b = 7$

$\therefore \quad a + b = 6 + 7 = 13$ ***Rpta. C***

Ejercicio 4 : Si dos factores de: $2x^3 - hx + k$; son: $(x + 2)$ y $(x - 1)$ el valor de: $2h - 3k$; es:

A) 4 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 1 **E)** 0

Resolución:

- De acuerdo al enunciado: $2x^3 - hx + k = (x + 2)(x - 1) . (f)$

  $2x^3 - hx + k = (x^2 + x - 2) . (f)$

  Donde:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 + 0x^2 - hx + k & x^2 + x - 2 \\ -2x^3 - 2x^2 + 4x & f = 2x - 2 \\ \hline \quad -2x^2 + (4 - h)x + k & \\ \quad +2x^2 + 2x - 4 & \\ \hline \quad (6 - h)x + (k - 4) & \end{array}$$

$k - 4 = 0 \Rightarrow \therefore \; k = 4$

$6 - h = 0 \Rightarrow \therefore \; 6 = h$

Luego: $2h - 3k = 2(6) - 3(4) = 0$

$\therefore \quad 2h - 3k = 0$ ***Rpta. E***

Ejercicios 5 : Hallar el resto que se obtiene de dividir: $(4x^3 - 3x^2 + 2x - 4) : (x + 3)$

A) 143 B) 144 C) -145 D) 142 E) N.A.

Resolución:

Por el Teorema del Resto: $x + 3 = 0 \Rightarrow \therefore x = -3$

Luego; reemplazando el valor de $x = -3$; en el polinomio dividendo, obteniendo asi el valor del residuo o resto.

$$\text{Resto} = 4(-3)^3 - 3(-3)^2 + 2(-3) - 4$$

$$\text{Resto} = -108 - 27 - 6 - 4 \Rightarrow \therefore \boxed{\text{Resto} = -145}$$ ***Rpta. C***

Ejercicio 6 : En la división: $\dfrac{2x^5 - 6x^3 + (a-13)x^2 + ax + a + 5}{x^3 + 2x^2 + x - 4}$

Hallar el resto R(x) sabiendo que es de primer grado.

A) $17x + 6$ B) x C) $15x + 1$ D) $x + 6$ E) $-15x + 6$

Resolución:

Los polinomios dividendo y divisor se pueden escribir de la manera siguiente:

Dividendo: $2x^5 + 0x^4 - 6x^3 + (a - 13)x^2 + ax + (a + 5)$

Divisor: $x^3 + 2x^2 + x - 4$

Luego, efectuamos la división:

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{2x^5} + 0x^4 - 6x^3 + (a-13)x^2 + ax + (a+5) & x^3 + 2x^2 + x - 4 \\ \hline
-\cancel{2x^5} - 4x^4 - 2x^3 + 8x^2 & 2x^2 - 4x \\
\qquad \cancel{-4x^4} - \cancel{8x^3} + (a-5)x^2 + ax & \\
\qquad \cancel{+4x^4} + \cancel{8x^3} + 4x^2 - 16x & \\
\end{array}$$

Resto: $R(x) = \underbrace{(a-1)}x^2 + \underbrace{(a-16)}x + \underbrace{(a+5)}$

- Como se podrá observar el resto o residuo R(x) es de segundo grado mientras el divisor es de tercer grado, pues esto nos indica que no podemos continuar con la división.

- También sabemos de acuerdo al enunciado de este ejercicio que el resto R(x) es de primer grado, lo cual $(a - 1)x^2$ debe ser igual a cero. Veamos:

$$(a - 1)x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad a = 1$$

Luego, reemplazamos el valor de a = 1; en la expresión:

$$\text{Resto} = R(x) = (a - 1)x^2 + (a - 16)x + (a + 5)$$

$$= (1 - 1)x^2 + (1 - 16)x + (1 + 5) = -15x + 6$$

$$\therefore \quad \boxed{\text{Resto} = R(x) = -15x + 6}$$ ***Rpta. E***

Ejercicio 7 : Hallar el valor numérico de "m" para que el polinomio:

$mx^3 + 6x^2 + 32$; sea divisilbe por el binomio: $x + 4$

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

Resolución:

- Por el teorema del resto; al divisor lo igualamos cero, veamos:

$$x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad x = -4$$

Luego el valor de x = -4 lo reemplazamos en el polinomio dividendo, obteniendo asi el valor del residuo.

$$\text{Residuo} = m(-4)^3 + 6(-4)^2 + 32$$

$$\text{Residuo} = -64m + 96 + 32 = -64m + 128$$

- Pero como nos dicen que el polinomio $mx^3 + 6x^2 + 32$, sea divisible por el binomio: $x + 4$; esto quiere decir que la división es exacta, osea que residuo es igual a cero, osea:

$$\text{Residuo} = \boxed{-64m + 128 = 0}$$

$$-64m = -128 \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad \boxed{m = 2}$$ ***Rpta. B***

Ejercicio 8 : Efectuar: $\left(x-3+\frac{5x}{2x-6}\right) : \left(2x-1+\frac{15}{x-3}\right)$ se obtiene: m/n;

Calcular: $(m + n)^2$

A) 4 **B)** 9 **C)** 25 **D)** 16 **E)** 36

Resolución:

- Efectuando operaciones en cada polinomio, obtenemos:

$$\left(\frac{(x-3)(2x-6)+5x}{2x-6}\right):\left(\frac{(2x-1)(x-3)+15}{x-3}\right)$$

$$\left(\frac{2x^2-12x+18+5x}{2(x-3)}\right):\left(\frac{2x^2-7x+3+15}{(x-3)}\right)$$

Recuerda que:

$$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}$$

$$\left(\frac{2x^2-7x+18}{2(x-3)}\right):\left(\frac{2x^2-7x+18}{(x-3)}\right)$$

$$\left(\frac{2x^2-7x+18}{2(x-3)}\right)\cdot\left(\frac{(x-3)}{2x^2-7x+18}\right)=\frac{m}{n}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{m}{n} \Rightarrow m=1,\ n=2$$

Luego: $(m+n)^2=(1+2)^2=9 \Rightarrow \therefore \boxed{(m+n)^2=9}$ ***Rpta. B***

Ejercicio 9 : Hallar: (a + b) si el polinomio: x^3-11x^2-bx+a; es divisible entre: x^2-9

A) 108 **B)** 107 **C)** 106 **D)** 105 **E)** 104

Resolución:

Primer Método:

$$\begin{array}{l|l} x^3-11x^2-bx+a & x^2+0x-9 \\ \hline -x^3+0x^2+9x & x-11 \\ \quad -11x^2+(9-b)x+a & \\ \quad +11x^2+0x-99 & \end{array}$$

Residuo: $(9-b)x+(a-99)=0$

Donde: i) $(9-b)=0 \Rightarrow b=9$

ii) $(a-99)=0 \Rightarrow a=99$

$\therefore \boxed{a+b=9+99=108}$ ***Rpta. A***

Segundo Método: Por el Teorema del resto, igualamos el divisor a cero; veamos:

$$x^2-9=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{9} \Rightarrow \boxed{x=\pm 3}$$

- Los valores de $x=3$ y $x=-3$, los reemplazamos en el dividendo, así:

Para: $x = 3$ ⇒ $x^3 - 11x^2 - bx + a = (3)^3 - 11(3)^2 - b(3) + a = 0$

$$a - 3b = 72 \quad ...(I)$$

Para: $x = -3$ ⇒ $x^3 - 11x^2 - bx + a = (-3)^3 - 11(-3)^2 - b(-3) + a = 0$

$$a = 126 - 3b \quad ...(II)$$

- Reemplazamos (II) en (I):

$$126 - 3b - 3b = 72 \Rightarrow 54 = 6b \Rightarrow \therefore \; b = 9$$

- El valor de b = 9, lo reemplazamos en (II): $a = 126 - 3\,(9) \Rightarrow \therefore \; a = 99$

Luego, hallamos el valor de: "(a + b)"

$$\therefore \; a + b = 99 + 9 = 108$$ **Rpta. A**

Ejercicio 10 : El polinomio: $4x^4 + 5x^3 - 3x^2 + mx + n$, es divisible por: $2x^2 + x - 1$. Encontrar: m/n.

A) -2, 2 **B)** 1,1 **C)** -3,3 **D)** 4,4 **E)** 5,5

Resolución:

- Aplicando el método de Horner, obtenemos:

2	4	5	-3	m	n
-1		-2	2		
1			$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	
				$\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$
	2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{4}$	$\left(m+\frac{11}{4}\right)$	$\left(n-\frac{5}{4}\right)$

$$n - \frac{5}{4} = 0 \Rightarrow n = \frac{5}{4}$$

$$n + \frac{11}{4} = 0 \Rightarrow n = -\frac{11}{4}$$

Luego: $\frac{m}{n} = \frac{-11/4}{5/4} = -\frac{11}{5} = -2{,}2 \Rightarrow \therefore \; \frac{m}{n} = 2{,}2$ ***Rpta. A***

2.4.6 COCIENTES NOTABLES

Los ***Cocientes Notables*** son ciertos cocientes que se escriben por simple inspección, sujetándose a reglas fijas y sin realizar la división.

Cociente de la diferencia de los cuadrados de dos monomios entre la suma o la diferencia de los mismos.

- Se trata de los cocientes que se obtienen de las divisiones que pertenecen a estas formas: $\dfrac{x^2-y^2}{x+y}$ o $\dfrac{x^2-y^2}{x-y}$

Si efectuamos las divisiones se tiene:

$$\begin{array}{rr|l} x^2 & -y^2 & x+y \\ \hline -x^2-xy & \downarrow & x-y \\ \hline -xy & -y^2 & \\ +xy & +y^2 & \\ \hline & 0 & \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{rr|l} x^2 & -y^2 & x-y \\ \hline -x^2+xy & \downarrow & x+y \\ \hline +xy & -y^2 & \\ -xy & +y^2 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

Por lo tanto: $\dfrac{x^2-y^2}{x+y}=x-y$ $\qquad$ $\dfrac{x^2-y^2}{x-y}=x+y$

La diferencia de los cuadrados de dos monomios entre la suma de los mismos es igual a la diferencia de ellos.

La diferencia de los cuadrados de dos monomios entre la diferencia de los mismos es igual a la suma de ellos.

Ejemplos: Hallar el cociente de cada una de las divisiones siguientes:

a) $\dfrac{x^2-1}{x+1}=\dfrac{x^2-1^2}{x+1}=x-1$ $\qquad$ **b)** $\dfrac{x^2-4}{x+2}=\dfrac{x^2-2^2}{x+2}=x-2$

c) $\dfrac{x^2-16}{x-4}=\dfrac{x^2-4^2}{x-4}=x+4$ $\qquad$ **d)** $\dfrac{9x^2-25}{3x+5}=\dfrac{(3x)^2-5^2}{(3x)+5}=3x-5$

e) $\dfrac{64-z^2}{8+z}=\dfrac{8^2-z^2}{8+z}=8-z$ $\qquad$ **f)** $\dfrac{(x+1)^2-4y^2}{x+1-2y}=\dfrac{(x+1)^2-(2y)^2}{(x+1)-(2y)}=(x+1)+2y$

COCIENTE DE LA SUMA O DIFERENCIA DE LOS CUBOS DE DOS MONOMIOS ENTRE LA SUMA O DIFERENCIA DE LOS MISMOS:

- Se trata de escribir por simple inspección los cocientes: $\dfrac{x^3+y^3}{x+y}$ o $\dfrac{x^3-y^3}{x-y}$

  Efectuando la división se tiene:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & + & & y^3 & x+y \\ \cline{5-5}
-x^3 & -x^2y & & & x^2-xy+y^2 \\ \cline{1-2}
 & -x^2y & & & \\
 & +x^2y & +xy^2 & & \\ \cline{2-3}
 & & +xy^2 & +y^3 & \\
 & & -xy^2 & -y^3 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
\quad ; \quad
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & + & & -y^3 & x-y \\ \cline{5-5}
-x^3 & +x^2y & & & x^2+xy+y^2 \\ \cline{1-2}
 & +x^2y & & & \\
 & -x^2y & +xy^2 & & \\ \cline{2-3}
 & & +xy^2 & -y^3 & \\
 & & -xy^2 & +y^3 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Por lo tanto: $\dfrac{x^3+y^3}{x+y}=x^2-xy+y^2$; $\dfrac{x^3-y^3}{x-y}=x^2+xy+y^2$

*La **suma de los cubos** de dos monomios entre la suma de los mismo es igual al cuadrado del primero, menos el producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.*

*La **diferencia de los cubos** de dos monomios entre la diferencia de los mismos es igual al cuadrado del primero mas el producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.*

Ejemplos: Halla el cociente de cada una de las divisiones siguientes:

a) $\dfrac{x^3+8}{x+2}=\dfrac{x^3+2^3}{x+2}=x^2-2x+2^2=x^2-2x+4$

b) $\dfrac{x^3+64}{x+4}=\dfrac{x^3+4^3}{x+4}=x^2-4x+4^2=x^2-4x+16$

c) $\dfrac{y^3-27}{y-3}=\dfrac{y^3-3^3}{y-3}=y^2+3y+3^2=y^2+3y+9$

d) $\dfrac{125-64x^6}{5-4x^2}=\dfrac{5^3-(4x^2)^3}{5-(4x^2)}=5^2+5(4x^2)+(4x^2)^2=25+20x^2+16x^4$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 14

1. Aplica la regla de los cocientes notables; halla el cociente de:

a) $\dfrac{x^2-36}{x-6}=$	b) $\dfrac{z^2-4}{z+2}=$	c) $\dfrac{x^2-144}{x-12}=$
d) $\dfrac{36x^2-1}{6x+1}=$	e) $\dfrac{9x^2-1}{3x+1}=$	f) $\dfrac{100-4x^2}{10+2x}=$
g) $\dfrac{64x^2-81}{8x-9}=$	h) $\dfrac{81x^6y^4-1}{9x^3y^2+1}=$	i) $\dfrac{(x+y)^2-(z-2w)^2}{x+y+z-2w}=$
j) $\dfrac{(2x^2-1)^2-9y^4}{2x^2-1+3y^2}$	k) $\dfrac{0{,}81x^6-0{,}64y^4}{0{,}9x^3+0{,}8y^2}=$	l) $\dfrac{1{,}69x^{2n}-0{,}64y^{4n}}{1{,}3x^n+0{,}8y^{2n}}=$

2. Aplica la regla de los cocientes notables y halla el cociente de:

a) $\dfrac{x^3+125}{x+5}=$	b) $\dfrac{1\,000+x^3}{10+x}=$	c) $\dfrac{x^6+1}{x^2+1}=$
d) $\dfrac{8-x^6}{2-x^2}=$	e) $\dfrac{x^{15}-y^{12}}{x^5-y^4}=$	f) $\dfrac{27x^6+8y^3}{3x^2+2y}=$
g) $\dfrac{x^3+216}{x+6}=$	h) $\dfrac{125x^{3n}-64y^{3n}}{5x^n-4y^n}=$	i) $\dfrac{27w^3z^6-x^6y^9}{3wz^2-x^2y^3}=$
j) $\dfrac{512x^{6n}-729y^{9n}}{8x^{2n}-9y^{3n}}=$	k) $\dfrac{0{,}008x^3+0{,}027y^9}{0{,}02x+0{,}3y^3}=$	l) $\dfrac{0{,}001x^{12}-0{,}125y^{15}}{0{,}1x^4-0{,}5y^5}=$

2.4.7 EN GENERAL LOS COCIENTES NOTABLES:

Son casos especiales de división exacta entre divisores binomios de la forma: $\dfrac{x^n \pm a^n}{x \pm a}$; en los cuales es posible deducir el cociente sin necesidad de efectuar la operación; donde "x" y "a" serán las bases y $n \in IN$.

- **Se presentan 4 casos:**

1er. CASO:

$$\frac{x^n - a^n}{x-a} = x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + a^3x^{n-4} + \ldots + a^{n-1}$$

Ejemplo (1): $\dfrac{x^5 - a^5}{x-a} = x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4$

Ejemplo (2): $\dfrac{8x^3 - 64y^3}{2x-4y} = \dfrac{(2x)^3 - (4y)^3}{(2x)-(4y)} = (2x)^2 + (4y)(2x) + (4y)^2$

$$= 4x^2 + 8xy + 16y^2$$

Ejemplo (3): $\dfrac{x^2y^4 - 49}{xy^2 - 7} = \dfrac{(xy^2)^2 - (7)^2}{(xy^2)-(7)} = xy^2 + 7$

Ejemplo (4): $\dfrac{125x^3 - 1}{5x-1} = \dfrac{(5x)^3 - 1^3}{(5x)-1} = (5x)^2 + (5x)(1) + 1^2 = 25x^2 + 5x + 1$

2do. CASO:

$$\frac{x^n - a^n}{x+a} = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - a^3x^{n-4} + \ldots - a^{n-1}$$

Nota: *No desarrollamos el caso en que n = número impar, ya que la division no es exacta y por lo que excluiremos el caso del estudio como cociente notable.*

Ejemplo (1): $\dfrac{x^6 - y^6}{x+y} = x^5 - x^4y + x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4 - y^5$

Ejemplo (2): $\dfrac{81x^8-16y^4}{3x^2+2y}=\dfrac{(3x^2)^4-(2y)^4}{(3x^2)+(2y)}$

$$=(3x^2)^3-(3x^2)^2(2y)+(3x^2)(2y)^2-(2y)^3$$

$$=27x^6-18x^4y+12x^2y^2-8y^3$$

3er. CASO: $\dfrac{x^n+a^n}{x+a}=x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}-a^3x^{n-4}+\ldots+a^{n-1}$

Nota: *No desarrollamos el caso en que n = número par; ya que la división no es exacta y por lo que excluiremos el caso del estudio como cociente notable.*

Ejemplo (1): $\dfrac{x^7+y^7}{x+y}=x^6-x^5y+x^4y^2-x^3y^3+x^2y^4-xy^5+y^6$

Ejemplo (2): $\dfrac{x^{10}+32y^5}{x^2+2y}=\dfrac{(x^2)^5+(2y)^5}{(x^2)+(2y)}$

$$=(x^2)^4-(x^2)^3(2y)+(x^2)^2(2y)^2-(x^2)(2y)^3+(2y)^4$$

$$=x^8-2x^6y+4x^4y^2-8x^2y^3+16y^4$$

4to. CASO: $\dfrac{x^n+a^n}{x-a}=$ ***No es cociente notable***

Nota: *Sólo consideramos como cocientes notables aquellas divisiones de la forma:* $\dfrac{x^n\pm a^n}{x\pm a}$ *que sean exactas.*

Observaciones:

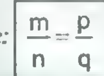
1. *Al desarrollar expresiones de la forma:* $\dfrac{x^n\pm a^n}{x\pm a}$ *; el exponente del primer término irá disminuyendo de uno en uno a partir de (n - 1) hasta cero inclusive mientras que el exponente del segundo término irá aumentando de uno en uno a partir de cero hasta (n - 1) inclusive.*

2. *El desarrollo tiene "n" términos.*

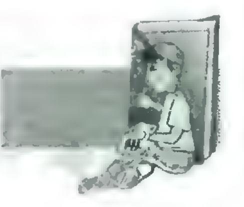
3. *En los* ***cocientes notables*** *que tengan por denominador expresiones de la forma (x - a) los signos de los términos del desarrollo serán positivos.*

4. *En los* ***cocientes notables*** *que tengan por denominador expresiones de la forma (x + a) los signos de los términos del desarrollo serán alternadamente positivos y negativos.*

5. *Cualquier término del desarrollo de un cociente notable se puede encontrar usando la fórmula:* $T_k = x^{n-k}\, a^{k-1}$*; en donde "k" es el lugar del término que se pide, "x" representa el primer término del denominador del cociente notable, "a" representa el segundo término del denominador del cociente notable y "n" es el exponente común al cual están elevados cada uno de los términos del denominador del cociente y que aparecen en el numerador.*

6. *Para que una expresión de la forma:* $\dfrac{x^m \pm a^p}{x^n \pm a^q}$*; sea desarrollada como cociente notable, ante todo debe cumplirse que:*  $\dfrac{m}{n} = \dfrac{p}{q}$

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE COCIENTES NOTABLES



Ejercicio 1: Efectuar: $\dfrac{x\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+2}$

Resolución:

$$\frac{x\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{x.x^2}+8}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{x^3}+2^3}{\sqrt{x}+2} = \frac{(\sqrt{x})^3+2^3}{(\sqrt{x})+2}$$

$$= (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x})(2) + 2^2$$

$$\therefore \quad \frac{x\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+2} = x - 2\sqrt{x} + 4$$

Recuerda que:

- $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{b \cdot a^n}$
- $\sqrt{a^m} = \left(\sqrt{a}\right)^m$

Ejercicio 2: Calcular el número de términos del desarrollo de: $\dfrac{x^{12}-64}{x^2-2}$

Resolución:

$$\frac{x^{12}-64}{x^2-2}=\frac{(x^2)^6-(2)^6}{(x^2)-(2)}$$; esta expresión es de la forma: $\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$

Donde: $n=6$

$\therefore$ El cociente tendrá 6 términos

Ejercicio 3: Calcular el quinto término del desarrollo de: $\dfrac{x^{12}-64}{x^2-2}$

Resolución:

$$\frac{x^{12}-64}{x^2-2}=\frac{(x^2)^6-(2)^6}{(x^2)-(2)}$$; para hallar el 5to. término aplicamos.

La fórmula: $T_k=x^{n-k}a^{k-1}$; donde: $k=5$; $n=6$

Luego: $T_5=(x^2)^{6-5}(2)^{5-1}=(x^2)^1(2)^4 \Rightarrow \therefore T_5=16x^2$

Ejercicio 4: Desarrollar: $M=\dfrac{(x+1)^3-1}{x}$

Resolución:

Sumando y restando 1 en el denominador, se obtiene:

$$M=\frac{(x+1)^3-1}{x+1-1}=\frac{(x+1)^3-1^3}{(x+1)-1}=(x+1)^2+(x+1)(1)+1^2$$

$$M=x^2+2x+1+x+1+1 \Rightarrow \therefore M=x^2+3x+3$$

Ejercicio 5: Calcular el valor de "n" en: $\dfrac{x^{2n+2}-y^{3n}}{x^{n+1}-y^{2n-1}}$ para que sea un cociente notable.

Resolución:

Para que la expresión dada sea cociente notable debe cumplirse que:

$$\frac{2n+2}{n+1}=\frac{3n}{2n-1} \Rightarrow \frac{2\cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)}}=\frac{3n}{2n-1} \Rightarrow 4n-2=3n \quad \therefore \quad \boxed{n=2}$$

Ejercicio 6 : Calcular el término 25 en el desarrollo del cociente notable: $\dfrac{x^{150}-a^{100}}{x^{3}+a^{2}}$

A) $x^{75}\,.\,a^{48}$ **B)** $x^{25}\,.\,a^{28}$ **C)** $x^{75}.a^{56}$ **D)** $x^{25}.a^{26}$ **E)** $x^{42}.a^{25}$

Resolución:

La expresión: $\dfrac{x^{150}-a^{100}}{x^{3}+a^{2}}$; se puede escribir de la manera siguiente:

$\dfrac{(x^{3})^{50}-(a^{2})^{50}}{(x^{3})+(a^{2})}$; para hallar el 25 avo. término; aplicamos la fórmula: $\boxed{T_k=x^{n-k}\cdot a^{k-1}}$

Donde: K = 25 ; n = 50

Luego: $T_{25}=(x^{3})^{50}\cdot(a^{2})^{25-1}=(x^{3})^{25}\cdot a^{48}=x^{75}\cdot a^{48}$

$\therefore \quad \boxed{T_{25}=x^{75}\cdot a^{48}}$ ***Rpta. A***

Ejercicio 7 : El número de términos que tiene el desarrollo del cociente notable: $\dfrac{x^{4^{3}}-y^{4^{4}}}{x^{2}-y^{8}}$; es:

A) 3 **B)** 6 **C)** 4 **D)** 32 **E)** 64

Resolución:

La expresión: $\dfrac{x^{4^{3}}-y^{4^{4}}}{x^{2}-y^{8}}$; se puede escribir de la manera siguiente:

$$\frac{x^{64}-y^{256}}{x^2-y^8}=\frac{(x^2)^{32}-(y^8)^{32}}{(x^2)-(y^8)}$$, esta última expresión es de la forma: $\frac{x^n-a^n}{x-a}$;

siendo: $n = 32$

∴ El número de términos que tiene dicho cociente es: 32 — ***Rpta. D***

Ejercicio 8 : Si el cociente notable: $\frac{x^p-y^{432}}{x^3-y^p}$ es exacto. Indicar el total de sus términos de su desarrollo.

A) 36 **B)** 8 **C)** 12 **D)** 16 **E)** 20

Resolución:

Para que dicha expresión: $\frac{x^p-y^{432}}{x^3-y^p}$; sea desarrollada como un cociente notable,

debe cumplirse que: $\frac{p}{3}=\frac{432}{p}$

Recuerda que:

Si: $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$

Entonces: $A\cdot D=B\cdot C$

Donde: $p\cdot p = 432\cdot 3$

$p^2 = 432\cdot 3 \Rightarrow p=\sqrt{432\cdot 3}=\sqrt{1\,296}$

pero: $1\,296=16\cdot 81 \Rightarrow p=\sqrt{16\cdot 81}=4\cdot 9 \Rightarrow \therefore\ p=36$

Reemplazamos el valor de $p = 36$; en la expresión inicial:

$$\frac{x^p-y^{432}}{x^3-y^p}=\frac{x^{36}-y^{432}}{x^3-y^{36}}=\frac{(x^3)^{12}-(y^{36})^{12}}{(x^3)-(y^{36})}$$

Esta última expresion es de la forma: $\frac{x^n-a^n}{x-a}$; siendo: $n = 12$

∴ El número total de términos que tiene el desarrollo del cociente notable es: 12

TALLER DE EJERCICIOS Nº 15

1. Calcular el cuarto término de:

$$\frac{x^{12}-y^{12}}{x^{2}-y^{2}}$$

2. Calcular el quinto término de:

$$\frac{128-x^{7}}{2-x}$$

3. Efectuar: $\dfrac{x\sqrt[3]{x}-81}{\sqrt[3]{x}-3}$

4. Desarrollar: $R=\dfrac{(x-4)^{3}-64}{x}$

5. Calcular el número de términos del desarrollo de: $\dfrac{x^{15}-32}{x^{3}-2}$

6. Calcular "n" en: $\dfrac{x^{4n+4}-y^{5n}}{x^{n+1}-y^{2n-3}}$; para que sea un cociente notable.

7. Calcular el sexto término del desarrollo de: $\dfrac{x^{28}+128y^{7}}{x^{4}+2y}$

8. Hallar el coeficiente del cuarto término del desarrollo de:

$$\frac{32x^{5}+243y^{5}}{2x+3y}$$

A) -108 B) -27 C) -54 D) -81 E) -12

9. Hallar el valor numérico del término de lugar 29 para x = -1, del desarrollo del cociente:

$$\frac{(x+3)^{36}-x^{36}}{2x+3}$$

A) 28 B) 256 C) 128 D) 64 E) 32

10. El grado absoluto del término de lugar 6 del siguiente cociente notable. $\dfrac{x^{3n+9}+y^{3n}}{x^{3}+y^{2}}$; es:

A) 9 B) 10 C) 18 D) 19 E) 21

11. Calcular el cuarto término del desarrollo:

$$\frac{\frac{1}{x^{18}}-x^{2}_{12}}{\frac{1}{x^{3}}-x^{2}}$$

A) x^2 B) 1 C) 1/x D) -1 E) x^4

12. Dado el siguiente cociente notable: $\dfrac{x^{6n}-y^{40}}{x^{n-4}-y^{4}}$

Indique el octavo término de su desarrollo.

A) $x^{14}y^{16}$ B) $x^{28}y^{12}$ C) $x^{12}y^{28}$
D) $x^{12}y^{15}$ E) $x^{2}y^{3}$

13. Si el cociente: $\dfrac{x^{6n+1}-y^{5n}}{x^{2n-3}-y^{n}}$ es exacto. Hallar el valor de "n" ($n \in \mathbb{N}$)

A) 2 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 10

RESPUESTAS TALLER 15

1. $T_4 = x^4y^6$	**2.** $T_5 = 4x^4$	**3.** $x+3\sqrt[3]{x^2}+9\sqrt[3]{x}+27$	
4. $R = x^2+12x+48$	**5.** n = 5 términos	**6.** n = 4	
7. $T_6 = 32x^4y^5$	**8.** C	**9.** C	
10. D	**11.** B	**12.** C	**13.** B

EJERCICIOS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA

Organizados por las Academias:

César Vallejo, Trilce, Pitágoras, Sigma, Alfa.

Ejercicio 1: Calcular el cuarto término del desarrollo de: $\dfrac{(x+y)^{18}-(x-y)^{12}}{(x+y)^3-(x-y)^2}$;

para: $x = 2\sqrt{3}$; $y = \sqrt{10}$

A) 32 **B)** 64 **C)** 16 **D)** 128 **E)** 81

Resolución:

La expresión dada, se puede escribir de la manera siguiente:

$$\frac{\left[(x+y)^3\right]^6-\left[(x-y)^2\right]^6}{(x+y)^3-(x-y)^2}$$; esta expresión es de la forma: $\dfrac{b^n-a^n}{b-a}$

Donde: $n = 6$

Luego para hallar el cuarto término de su desarrollo, aplicamos la siguiente fórmula: $T_k = b^{n-k}\cdot a^{k-1}$; en donde "k" es el lugar que se pide, "b" representa el primer

término del denominador del **cociente notable; "a"** representa el segundo término del denominador del **cociente notable** y **"n"** es el exponente común al cual están elevados cada uno de los términos del denominador del **cociente notable** y que aparecen en el numerador.

Luego: $T_4 = b^{6-4} \cdot a^{4-1} = b^2 \cdot a^3$; para nuestro ejercicio:

$$T_4 = \left[(x+y)^3\right]^2 \cdot \left[(x-y)^2\right]^3 = (x+y)^6 \cdot (x-y)^6$$

$$T_4 = [(x+y)(x-y)]^6 = \left[x^2 - y^2\right]^6$$

Reemplazamos los valores de: $x = 2\sqrt{3}$; $y = \sqrt{10}$; en esta última expresión:

$$T_4 = \left[(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{10})^2\right]^6 = (12-10)^6 = 2^6 = 64$$

$\therefore$ El cuarto término (T_4) es: 64 ***Rpta. B***

Ejercicio 2: Proporcione el número de términos que presenta el desarrollo del cociente notable: $\dfrac{x^p - y^{4p-60}}{x^3 + y^9}$

A) 60 **B)** 40 **C)** 30 **D)** 10 **E)** 20

Resolución:

Para que una expresión de la forma: $\dfrac{x^m - a^p}{x^n + a\,a^q}$; sea desarrollada como **cociente notable**, debe cumplirse que: $\dfrac{m}{n} = \dfrac{p}{q}$

Luego: $\dfrac{p}{3} = \dfrac{4p-60}{9} \Rightarrow p = \dfrac{4p-60}{3} \Rightarrow 3p = 4p - 60 \Rightarrow \therefore\ p = 60$

- El valor $p = 60$, lo reemplazamos en la expresión:

$$\frac{x^{p}-y^{4p-60}}{x^{3}+y^{9}}=\frac{x^{60}-y^{4(60)-60}}{x^{3}+y^{9}}=\frac{x^{60}-y^{180}}{x^{3}+y^{9}}$$

- Esta última expresión se puede escribir así:

$$\frac{x^{60}-y^{180}}{x^{3}+y^{9}}=\frac{(x^{3})^{20}-(y^{9})^{20}}{x^{3}+y^{9}}$$ ......(El desarrollo de este cociente notable tiene 20 términos).

∴ El número de términos que presenta el desarrollo de dicho cociente notable es: 20 ***Rpta. E***

Ejercicio 3: Calcular el número de términos del cociente notable: $\dfrac{x^{n+5}-y^{n}}{x^{\frac{n}{2}-2}-y^{\frac{n}{2}-3}}$

A) 10 **B)** 7 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 9

Resolución:

Por propiedad: $\dfrac{n+5}{\frac{n}{2}-2}=\dfrac{n}{\frac{n}{2}-3}$; Ahora resolvemos la ecuación de la manera siguiente:

$$\frac{(n+5)}{\left(\frac{n-4}{2}\right)}=\frac{n}{\left(\frac{n-6}{2}\right)}$$

$$\frac{\not{2}\,(n+5)}{(n-4)}=\frac{\not{2}n}{(n-6)}\Rightarrow (n+5)(n-6)=n(n-4)$$

$$\not{n^{2}}-n-30=\not{n^{2}}-4n$$

$$3n=30\Rightarrow n=10$$

∴ El número de términos del cociente notable es 10. ***Rpta. A***

Ejercicio 4: En el cociente notable de: $\dfrac{(a+b)^{50}+(a-b)^{50}}{2a^{2}+2b^{2}}$; que valor adquiere el término central para: $a=\sqrt{\dfrac{x+\sqrt[48]{2}}{2}}$; $b=\sqrt{\dfrac{x-\sqrt[48]{2}}{2}}$

A) 2 B) 1/2 C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt[24]{2}$ E) $\sqrt[48]{2}$

Resolución:

La expresión: $\dfrac{(a+b)^{50}+(a-b)^{50}}{2a^2+2b^2}$; se puede escribir así:

$$\frac{(a+b)^{50}+(a-b)^{50}}{2a^2+2b^2}=\frac{(a+b)^{50}+(a-b)^{50}}{(a^2+2ab+b^2)+(a^2-2ab+b^2)}=\frac{(a+b)^{50}+(a-b)^{50}}{(a+b)^2+(a-b)^2}$$

$$=\frac{\left[(a+b)^2\right]^{25}+\left[(a-b)^2\right]^{25}}{(a+b)^2+(a-b)^2}$$

esta expresión es de la forma: $\dfrac{b^n-a^n}{b-a}$

Donde: $n=25$ (# de términos)

- Como el cociente notable tiene 25 términos, pues para saber que lugar ocupa el término central se realiza la siguiente operación:

$$25 \;\underline{\big|\; 2\;} \qquad \text{residuo } 1,\ \text{cociente } 12$$

⇒ Lugar que ocupa el término central = 12 + 1 = 13

- Ahora hallamos el término central (T_{13}); Aplicando la fórmula:

$$T_k = b^{n-k}\cdot a^{k-1}$$

$$T_{13}=(a+b)^{25-13}\cdot(a-b)^{13-1}=(a+b)^{12}\cdot(a-b)^{12}$$

$$T_{13}=[(a+b)(a-b)]^{12}=\left[a^2-b^2\right]^{12}$$

Reemplazando por los valores de "a" y "b", en esta última expresión; obtenemos:

$$T_{13}=\left[\left(\sqrt{\frac{x+\sqrt[48]{2}}{2}}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{x-\sqrt[48]{2}}{2}}\right)^2\right]^{12}$$

$$T_{13}=\left[\frac{x+\sqrt[48]{2}}{2}-\frac{x-\sqrt[48]{2}}{2}\right]=\left(\frac{2\sqrt[48]{2}}{2}\right)^{12}=\left(\sqrt[48]{2}\right)^{12}$$

$\therefore$ $T_{13}=\sqrt[24]{2}$ ***Rpta. D***

Ejercicio 5: Determinar el término central en el cociente notable:

$$\frac{(x+a)^{14}+a^{14}}{x^2+2a^2+2ax}$$

A) $a^3(x+1)^3$ B) $-a^7(x+a)^7$ C) $a^4(x+a)^3$

D) $-a^4(x+a)^3$ E) $-a^3(x+a)^3$

Resolución:

La expresión dado se puede escribir de la manera siguiente:

$$\frac{(x+a)^{14}+a^{14}}{x^2+2ax+a^2+a^2}=\frac{\left[(x+a)^2\right]^7+(a^2)^7}{(x+a)^2+a^2}$$

- Como el cociente notable tiene 7 términos (n = 7), pues para saber que lugar ocupa el término central, se realiza la siguiente operación:

$$\begin{array}{r|l} 7 & 2 \\ \hline 1 & \boxed{3} \end{array}$$

➡ Lugar que ocupa el término central = 3 + 1 = 4

- Ahora, hallamos el término central (T_4); aplicando la fórmula:

$$\boxed{T_k = b^{n-k}\cdot a^{k-1}} \Rightarrow T_4 = (x+a)^{7-4}\cdot a^{4-1} = (x+a)^3\cdot a^3$$

$$\therefore \boxed{T_4 = (x+a)^3\cdot(a^3) = a^3\ (x+a)^3}$$ ***Rpta. A***

Ejercicio 6: Calcule el término octavo en: $\dfrac{a^6-b^6}{\sqrt[7]{a}-\sqrt[7]{b}}$

A) $a\cdot\sqrt[7]{b}^{34}$ B) $b\cdot\sqrt[7]{a}^{34}$ C) $\sqrt[7]{a}^{17}\cdot\sqrt[7]{a}^{8}$ D) $\sqrt[7]{a}^{8}\cdot\sqrt[7]{b}^{17}$ E) $\sqrt[7]{a}^{34}\cdot a^8$

Resolución:

La expresión dada, se puede escribir de la manera siguiente:

$$\frac{\left(\sqrt[7]{a^6}\right)^7-\left(\sqrt[7]{b^6}\right)^7}{\sqrt[7]{a}-\sqrt[7]{b}}=\frac{\left(\sqrt[7]{a}\right)^{42}-\left(\sqrt[7]{b}\right)^{42}}{\sqrt[7]{a}-\sqrt[7]{b}}$$

Recuerda que:

- $a^n=\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^m$
- $\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^m=\left(\sqrt[m]{a}\right)^{m\cdot n}$

Luego, hallamos el término octavo (T_8):

$$T_k=b^{n-k}a^{k-1} \Rightarrow T_8=\left(\sqrt[7]{a}\right)^{42-8}\cdot\left(\sqrt[7]{b}\right)^{8-1}$$

$$T_8=\left(\sqrt[7]{a}\right)^{34}\cdot b \quad ➡ \quad \therefore \boxed{T_8=b\cdot\sqrt[7]{a}^{34}}$$ ***Rpta. B***

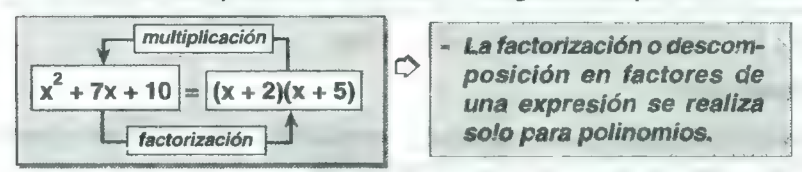
2.5 FACTORIZACIÓN

El fin primordial de la factorización es transfomar un polinomio en un producto de dos o más factores.

Aunque no haya reglas fijas y bien deteminadas para la factorización de un polinomio, con todo consideremos algunos ejemplos típicos, según los cuales haremos algunas afirmaciones.

Llámase **factor común** la expresión que está contenida en cada uno de los términos del polinomio dado. Generalmente el factor común es el máximo común divisor, pero no siempre, sino según lo exija la aplicación o circunstancia.

Lo mencionado, podemos resumirlo en el siguiente esquema:



✪ A continuación estudiaremos los siguientes casos de factorización:

2.5.1 FACTORIZACIÓN DE UN POLINOMIO CON FACTOR COMÚN MONOMIO

Factor común monomio es el monomio que esta contenido en todos los términos del polinomio considerado , esta formado por el **M.C.D.** de los coeficientes y las letras comunes elevadas a su menor exponente.

Ejemplo 1: Sacar factor común de: $8x^2y + 6x^3yz - 10xy^2w$

Resolución:

1º) Hallamos el **M.C.D.** de los coeficientes **8; 6** y **10**

8 - 6 - 10	2
4 - 3 - 5	

⇨ **M.C.D. (8; 6 y 10)** = ②

2º) El menor exponente con que aparecen las variables comunes **"x"** e **"y"** son **1** para la variable **"x"** y **1** para la variable **"y"**: Por lo tanto, el factor común es: **2xy**

Luego: $8x^2y + 6x^3yz - 10xy^2w = 2xy(\quad + \quad - \quad)$

Factor común (2xy)

* Dividimos $8x^2y : 2xy =$ **$4x$**

* Dividimos $6x^3yz : 2xy =$ **$3x^2z$**

* Dividimos $10xy^2w : 2xy =$ **$5yw$**

$$\therefore \quad 8x^2y + 6x^3yz - 10xy^2w = 2xy(4x + 3x^2z - 5yw)$$

El Factor Comun Monomio:

Se determina hallando el M.C.D. (máximo común divisor de los coeficientes de todos los términos del polinomio dado el cual será el coeficiente del factor común y escribiendo a continuación de él las variables comunes con el menor exponente con que aparecen en el polinomio.

Luego se divide cada uno de los términos del polinomio entre el monomio común. Los resultados se escriben dentro de un signo de agrupación, osea paréntesis, corchetes o llaves.

Ejemplo 2: Factorizar: $2{,}4ab^3 - 1{,}8a^2b - 0{,}9ab$

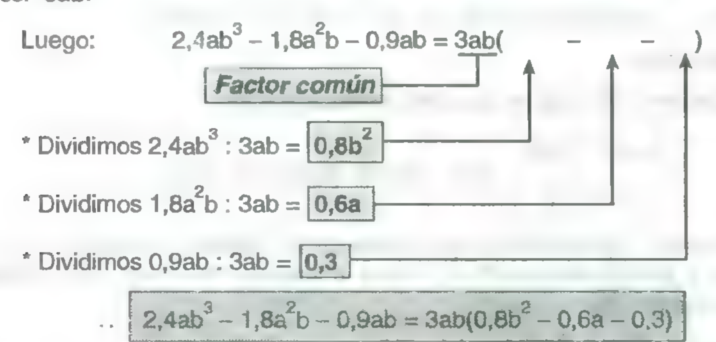
Resolución:

Hallando el **M.C.D.** de los coeficientes, tomándolos como si fueran números enteros osea no se considera la coma decimal.

24 - 18 - 9	3
8 - 6 - 3	

⇨ **M.C.D. (24; 18 y 9) = (3)**

* El menor exponente con que aparece la variable común **"a"** es **1**, y el menor exponente con que aparece la variable **"b"** es **1**. Por lo tanto, el factor común es: **3ab**.



$$\therefore \quad 2{,}4ab^3 - 1{,}8a^2b - 0{,}9ab = 3ab(0{,}8b^2 - 0{,}6a - 0{,}3)$$

Ejemplo 3: Factorizar: $x^3 - 2xy + x^2$

Resolución:

* En este caso los coeficientes del polinomio son: **1**, **2** y **1**, siendo su **M.C.D.** igual a **1**, veamos:

1 - 2 - 1	1
1 - 2 - 1	

⇨ **M.C.D. (1; 2 y 1) = (1)**

El menor exponente de la variable común "x" es **1**, por tanto, el factor común es: **1x = x**

$$x^3 - 2xy + x^2 = x(\quad - \quad + \quad)$$

Factor común

* Dividimos $x^3 : x =$ $\boxed{x^2}$

* Dividimos $2xy : x =$ $\boxed{2y}$

* Dividimos $x^2 : x =$ $\boxed{x}$

$$\therefore \boxed{x^3 - 2xy + x^2 = x(x^2 - 2y + x)}$$

Ejemplo 4: Factorizar: $12x^3y^2z^3 - 15x^2yz^3 - 6x^2y^3z^4 + 9x^3y^5z^3$

Resolución:

Hallamos el **M.C.D.** de los coeficientes: **12; 15; 6** y **9**

12 - 15 - 6 - 9	3
4 - 5 - 2 - 3	

⇨ **M.C.D. (12; 15; 6 y 9) = (3)**

El menor exponente con que aparece la variable común "**x**" es **2**, la variable común "**y**", el menor exponente es **1** y la variable común "**z**", el menor exponente es **3**. Por lo tanto, el factor común es: $\mathbf{3x^2yz^3}$.

Luego:

$$12x^3y^2z^3 - 15x^2yz^3 - 6x^2y^3z^4 + 9x^3y^5z^3 = 3x^2yz^3(4xy - 5 - 2y^2z + 3xy^4)$$

Factor común

* Dividimos $12x^3y^2z^3 : 3x^2yz^3 =$ $\boxed{4xy}$

* Dividimos $15x^2yz^3 : 3x^2yz^3 =$ $\boxed{5}$

* Dividimos $6x^2y^3z^4 : 3x^2yz^3 =$ $\boxed{2y^2z}$

* Dividimos $9x^3y^5z^3 : 3x^2yz^3 =$ $\boxed{3xy^4}$

$$\therefore \boxed{12x^3y^2z^3 - 15x^2yz^3 - 6x^2y^3z^4 + 9x^3y^5z^3 = 3x^2yz^3(4xy - 5 - 2y^2z + 3xy^4)}$$

Ejemplo 5: Factorizar: $\frac{2}{6}x^2y^2 + \frac{4}{9}x^3yz + \frac{8}{15}xyw$

Resolución:

La expresión dada se puede escribir así:

$$\frac{2}{6}x^2y^2+\frac{4}{9}x^3yz+\frac{8}{15}xyw=\frac{1\cdot 2}{2\cdot 3}x^2y^2+\frac{2\cdot 2}{3\cdot 3}x^3yz+\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3}xyw$$

$$\frac{2}{6}x^2y^2+\frac{4}{9}x^3yz+\frac{8}{15}xyw=\frac{2}{3}xy(\quad+\quad+\quad)$$

Factor común

* Dividimos $\frac{2}{6}x^2y^2:\frac{2}{3}xy=\boxed{\frac{1}{2}xy}$

* Dividimos $\frac{4}{9}x^3yz:\frac{2}{3}xy=\boxed{\frac{2}{3}x^2z}$

* Dividimos $\frac{8}{15}xyw:\frac{2}{3}xy=\boxed{\frac{4}{5}w}$

$$\therefore\quad \boxed{\frac{2}{6}x^2y^2+\frac{4}{9}x^3yz+\frac{8}{15}xyw=\frac{2}{3}xy\left(\frac{1}{2}xy+\frac{2}{3}x^2z+\frac{4}{5}w\right)}$$

Ejemplo 6: Factorizar: $6x^{3a}+12x^{2a+1}-18x^a$

Resolución:

Hallamos el **M.C.D.** de los coeficientes: **6; 12 y 18**

6 - 12 - 18	2
3 - 6 - 9	3
1 - 2 - 3	

⇨ **M.C.D. (6; 12 y 18) = 2·3 = (6)**

El menor exponente con que aparece la variable común "**x**" es a. Osea: $\mathbf{x}^3$ por tanto el factor común es: $\mathbf{6x^a}$

Luego: $6x^{3a}+12x^{2a+1}-18x^a=6x^a(\quad-\quad-\quad)$

Factor común

* Dividimos $6x^{3a}:6x^a=\boxed{x^{2a}}$

* Dividimos $12x^{2a+1}:6x^a=\boxed{2x^{a+1}}$

* Dividimos $18x^a:6x^a=\boxed{3}$

Recuerda que:

$$\frac{A^m}{A^n}=A^{m-n}$$

$$\therefore\quad \boxed{6x^{3a}+12x^{2a+1}-18x^a=6x^a(x^{2a}-2x^{a+1}-3)}$$

Verificación:

Para verificar si se ha factorizado correctamente basta con examinar si al hacer el producto de los factores se obtiene la expresión original.

Ejemplo: Factorizar: $xy^3 + 3x^2y^2$

Resolución:

$$xy^3 + 3x^2y^2 = xy^2(y + 3x)$$

➡ ***Verificación:*** $xy^2(y + 3x) = xy^2 . y + xy^2 . 3x$

(Expresión original) $xy^2(y + 3x) = xy^3 + 3x^2y^2$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 16

1. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $6a + 18b =$	b) $12x + 8bx =$	c) $ab^2 + a^3b =$
d) $x^3 - x^2 =$	e) $b^4 - b^3x =$	f) $36xy - 18xz =$
g) $6x^2y^2 - 24xy =$	h) $8x^3 - 16x^2y =$	i) $20ax^2 + 36abx =$

2. Factorizar los siguientes polinomios:

a) $a^3bx + 3a^2b^2y - a^4b^3z =$	b) $2x^3y^2 - 7x^2y + 0{,}6x^4y^2z =$
c) $-ab^2 + 8a^2by - 5abx^2 =$	d) $25a^2x - 30a^4y + 35a^3z =$
e) $-12x^2y + 18xy^2 - 24xyz =$	f) $21a^3bx - 15a^2xy - 9a^4bx^2 =$
g) $15a^2b^3c - 9a^3b - 6abx =$	h) $-24x^3y + 16x^2y^2 - 8x^2yz^2 =$
i) $50a^3b^3 - 40a^2b^4 + 30ab^5x =$	i) $-22abc + 44a^2c - 66b^2c =$
k) $75x^2y^2 + 50x^3y + 25xyz^2 =$	l) $-48ab^3 - 64a^3bx - 16a^2b^2x^2 =$

3. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $0{,}9a^2b - 0{,}6a^2b^2 + 1{,}2abx =$	b) $0{,}8x^2y^2 - 1{,}6xy^3z + 0{,}4xy =$
c) $0{,}5ac^2 + 2a^2cx - 1{,}5abc =$	d) $1{,}6xy^3z^2 - 0{,}8x^2yz^3 + 1{,}2xyz^2$
e) $\frac{5}{12}x^3y - \frac{3}{8}x^2y^3 + \frac{1}{4}xy^2 =$	f) $\frac{2}{21}x^3y^3 - \frac{2}{14}x^2y^2z + \frac{4}{35}xy^3z^2 =$
g) $\frac{6}{15}a^3bc^3 + \frac{3}{20}a^2b^4c^2 - \frac{6}{5}a^3bc =$	h) $\frac{3}{4}x^3y^2 - \frac{2}{20}xy^2z + \frac{7}{4}xyz^3 =$
i) $3x^a + 2x^{a+1} - x^{a+3} =$	j) $8x^{n+1} - 6x^{n+2} + 12x^{2n} =$
k) $7x^{a+3} + 21x^{3a} - 14x^{a+2} =$	l) $35x^{a-1} - 15x^{a-2} + 10x^{a+1} =$

RESPUESTAS TALLER 16

1. a) $6(a+3b)$	b) $4x(3+2b)$	c) $ab(b+a^2)$
d) $x^2(x-1)$	e) $b^3(b-x)$	f) $18x(2y-z)$
g) $6xy(xy-4)$	h) $8x^2(x-2y)$	i) $4ax(5x+9b)$

2. a) $a^2b(ax+3by-5a^2b^2z)$	b) $x^2y(2xy-7+0{,}6x^2yz)$
c) $-ab(b-8ay+5x^2)$	d) $5a^2(5x-6a^2y+7az)$
e) $-6xy(2x-3y+4z)$	f) $3a^2x(7ab-5y-3a^2bx)$
g) $3ab(5ab^2c-3a^2-2x)$	h) $8x^2y(3x-2y+z^2)$
i) $10ab^3(5a^2-4ab+3b^2x)$	j) $-22c(ab-2a^2+3b^2)$
k) $25xy(3xy+2x^2+z^2)$	l) $-16ab(3b^2+4a^2x+abx^2)$

3. a) $0{,}3ab(3a-2ab+4x)$	b) $0{,}4xy(2xy-4y^2z+1)$
c) $ac(0{,}5c+2ax-1{,}5b)$	d) $0{,}4xyz^2(4y^2-2xz+3)$
e) $\frac{1}{4}xy\left(\frac{5}{3}x^2-\frac{3}{2}xy^2+y\right)$	f) $\frac{2}{7}xy^2\left(\frac{1}{3}x^2y-\frac{1}{2}xz+\frac{2}{5}yz^3\right)$
g) $\frac{3}{5}a^2bc\left(\frac{2}{3}ac^2+\frac{1}{4}b^3c-2a\right)$	h) $\frac{1}{4}xy\left(3x^2y-\frac{2}{5}yz+7z^3\right)$
i) $x^a(3+2x-x^3)$	j) $2x^{n+1}(4-3x+6x^{n-1})$
k) $7x^{a+2}(x+3x^{2a-2}-2)$	l) $5x^{a-2}(7x-3+2x^3)$

2.5.2 FACTORIZACIÓN DE UN POLINOMIO CON FACTOR COMÚN POLINOMIO

En caso de que el polinomio tenga un factor común polinomio de dos o más términos para factorizarlo se procede en la misma forma como en el caso anterior, osea aplicando la propiedad distributiva.

$$ab + ac = a(b + c)$$

Ejemplo 1: Factorizar: $3a(x-2y)+6b^2(x-2y)$

Resolución:

1º) Hallamos el **M.C.D.** de los coeficientes **3** y **6**

3 - 6	2
1 - 2	

M.C.D. (3 y 6) = ③

2º) El menor exponente del polinomio común (x - 2y) es 1. Por tanto el factor común es **3(x – 2y)**.

Luego: $3a(x-2y)+6b^2(x-2y)=3(x-2y)[\quad + \quad]$

Factor común

* Dividimos $3a(x-2y) : 3(x-2y) = \boxed{a}$

* Dividimos $6b^2(x-2y) : 3(x-2y) = \boxed{2b^2}$

$$\therefore\ \boxed{3a(x-2y)+6b^2(x-2y)=3(x-2y)[a+2b^2]}$$

Ejemplo 2: Factorizar: $8a^2(x-2)^4+16a^3(x-2)^2-24a^5(x-2)^3$

Resolución:

1º) Hallamos el **M.C.D.** de los coeficientes **8; 16** y **24** así:

8 - 16 - 24	8
1 - 2 - 3	

⇨ **M.C.D. (8; 16 y 24) =** ⑧

2º) El menor exponente del polinomio común **(x – 2)** es **2**. Osea: $(x-2)^2$ y el menor exponente de la variable "a" es **2**; osea: a^2

Por tanto el factor común es: $8a^2(x-2)^2$

Luego:

$$8a^2(x-2)^4+16a^3(x-2)^2-24a^5(x-2)^3=8a^2(x-2)^2[\quad + \quad - \quad]$$

Factor común

* Dividimos $8a^2(x-2)^4 : 8a^2(x-2)^2 = \boxed{(x-2)^2}$

* Dividimos $16a^3(x-2)^2 : 8a^2(x-2)^2 = \boxed{2a}$

* Dividimos $24a^5(x-2)^3 : 8a^2(x-2)^2 = \boxed{3a^3(x-2)}$

$$\therefore\ \boxed{8a^2(x-2)^4+16a^3(x-2)^2-24a^5(x-2)^3=8a^2(x-2)^2[(x-2)^2+2a-3a^3(x-2)]}$$

Ejemplo 3: Factorizar: $-2x-3y+ab^3(2x+3y)$

Resolución:

> ***Recuerda que:***
> $-a-b=-(a+b)$

La expresión dada, se puede escribir así:

$$\underline{-2x-3y}+ab^3(2x+3y)=\underline{-(2x+3y)}+ab^3(2x+3y)$$

$-2x - 3y + ab^3(2x + 3y) = -1(2x + 3y) + ab^3(2x + 3y)$

***El factor común es:* (2x + 3y)**

Luego: $-2x - 3y + ab^3(2x + 3y) = (2x + 3y)[-1 + ab^3]$

$\therefore$ $-2x - 3y + ab^3(2x + 3y) = (2x + 3y)[ab^3 - 1]$

Ejemplo 4: Factorizar: $5x(2a - 7b) - 2a + 7b$

> ***Recuerda que:***
> $-2a + 7b = -(2a - 7b)$

Resolución:

La expresión dada, se puede escribir así:

$5x(2a - 7b) - 2a + 7b = 5x(2a - 7b) - (2a - 7b)$

$5x(2a - 7b) - 2a + 7b = 5x(2a - 7b) - 1(2a - 7b)$

***El factor común es:* (2a – 7b)**

Luego: $5x(2a - 7b) - 2a + 7b = (2a - 7b)[5x - 1]$

$\therefore$ $5x(2a - 7b) - 2a + 7b = (2a - 7b)[5x - 1]$

Ejemplo 5: Factorizar: $5x^2(a + b - 3c) - 2x^3(3c - a - b)$

> ***Recuerda que:***
> $-(3c - a + b) = -(3a - a + b)$
> $= (a + b - 3c)$

Resolución:

La expresión dada se puede escribir así:

$5x^2(a + b - 3c) - 2x^3(3c - a - b) = 5x^2(a + b - 3c) + 2x^3(-3c + a + b)$

$5x^2(a + b - 3c) - 2x^3(3c - a - b) = 5x^2(a + b - 3c) + 2x^3(a + b - 3c)$

El menor exponente de la variable común "**x**" es **2**, osea: $\mathbf{x^2}$

El menor exponente del polinomio común **(a + b – 3c)** es **1**; osea: **(a + b – 3c)**

Por tanto el factor común es: $\mathbf{x^2(a + b - 3c)}$

Luego: $5x^2(a + b - 3c) - 2x^3(3c - a - b) = 5x^2(a + b - 3c) + 2x^3(a + b - 3c)$

$5x^2(a + b - 3c) - 2x^3(3c - a - b) = x^2(a + b - 3c)[\ \ +\ \ ]$

Factor común

* Dividimos $5x^2(a + b - 3c) : x^2(a + b - 3c) = \boxed{5}$

* Dividimos $2x^3(3c - a - b) : x^2(a + b - 3c) = \boxed{2x}$

$\therefore \quad \boxed{5x^2(a+b-3c) - 2x^3(3c-a-b) = x^2(a+b-3c)[5+2x]}$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 17

1. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $3x(5a-2b)+2y(5a-2b) =$	b) $12a(x^2-y^2)+5(x^2-y^2)$
c) $4x^2(y-1)-9(y-1) =$	d) $7x(8m+3)+8m+3 =$
e) $x+2y-3z(x+2y) =$	f) $xy^2(2-a)+x^2y(2-a) =$
g) $(x-3)^2(x+2)+(x-3)(x-1) =$	h) $8abc^3(x+3y)-7a^2bc(x+3y) =$
i) $(3x-2)^3(x-2)-(3x-2)^2(x+1) =$	j) $(x+2)^3(x+5)+(x+5)^2(x-2)^2 =$
k) $ab^3(x-y)-a^2b(y-x) =$	l) $3x(a^2-b^2)-5z(b^2-a^2) =$

2. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $16x^2(z+2y)+4x(z+2y) =$	g) $(x+3y)(4a-6b) \quad (2x+3y)(4a-6b) =$
b) $20xy^3(a-3b)+15x^2y(a-3b) =$	h) $8xy^2(a^3-b^3)-24x^2y^3(a^3-b^3) =$
c) $12(a+2b)(x-y)^2-18(a+2b)^2(x-y) =$	i) $(9x-3y)(2w-1)+(9x-3y)(4w+1) =$
d) $81(x-3y)^2(m+n)+27(x-3y)(m+n) =$	j) $x^{2a}(2m+3n)-3x^{a+1}(2m+3n) =$
e) $9ab^2y^3(x^2-z^2)-5a^2by^2(x^2-z^2) =$	k) $6x^{a+1}(a+b)+24x^{a+2}(a+b) =$
f) $30(x+y)^2(a-b)+18(x+y)(a-b)^2 =$	l) $28x^{2a+1}(2m-n)-7x^{a+1}(2m-n) =$

3. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $-3a-5b-(3a+5b)5x^2 =$	b) $-7x+2y-2ab(7x-2y) =$
c) $-6x^2+9y^2+4w(2x^2-3y^2) =$	d) $-x^2+y^2+3a^2b(x^2-y^2) =$
e) $4a^2-9b^2-6xy(4a^2-9b^2) =$	f) $5x(3a-2b)-3a+2b =$
g) $6a(5x-2y-3z)-5x+2y+3z =$	h) $12(x+y)(a^2-b^2)-(6a^2-6b^2) =$
i) $(x^3-y^3)+(x-y)z-x^2+y^2 =$	j) $3x(2a-b+3c)-5y(b-2a-3c) =$
k) $(a+b)(5x-2y-z)-(a-2b)(2y+z-5x) =$	l) $(a^x-a^y)-a^{2x}+a^{2y} =$

RESPUESTAS TALLER 17

1.

a) $(5a-2b)(3x+2y)$ b) $(x+y)(x-y)(12a+5)$

c) $(2x+3)(2x-3)(y-1)$ d) $(7x+1)(8m+3)$

e) $(x+2y)\,(1-3z)$ f) $xy(x+y)(2-a)$

g) $(x-3)\left(x+\sqrt{7}\right)\left(x-\sqrt{7}\right)$ h) $abc(8c^2-7a)(x+3y)$

i) $3(3x-2)^2(x^2-3x+1)$ j) $(x+2)^2(x+5)(2x+7)$

k) $ab(x-y)(b^2+a)$ l) $(a+b)(a-b)(3x+5z)$

2.

a) $4x(4x+1)(2y+z)$ b) $5xy(a-3b)(4y^2+3x)$

c) $6(x-y)(a+2b)[2(x-y)-3(a+2b)]$ d) $27(x-3y)(m+n)(3x-9y+1)$

e) $aby^2(x+z)(x-z)(9by-5a)$ f) $6(x+y)(a-b)[5(x+y)+3(a-b)]$

g) $2x(3b-2a)$ h) $8xy^2(1-3xy)(a-b)(a^2+ab+b^2)$

i) $18w(3x-y)$ j) $(2m+3n)x^{a+1}(x^{a-1}-3)$

k) $6x^{a+1}(a+b)(4x+1)$ l) $7x^{a+1}(2m-n)(4x^a-1)$

3.

a) $-(3a+5b)(5x^2+1)$ b) $(2y-7x)(2ab+1)$

c) $(2x^2-3y^2)\,(4w-3)$ d) $(x+y)(x-y)(3a^2b-1)$

e) $(2a+3b)(2a-3b)(1-6xy)$ f) $(3a-2b)(5x-1)$

g) $(5x-2y-2z)(6a-1)$ h) $6(a+b)(a-b)(2x+2y-1)$

i) $(x-y)(x^2+xy+y^2-x-y+z)$ j) $(2a-b+3c)(3x+5y)$

k) $(5x-2y-z)(2a-b)$ l) $(a^x-a^y)(1-a^x-a^y)$

2.5.3 FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS POR AGRUPACIÓN DE TÉRMINOS

El proceso para factorizar por **"Agrupación de términos"** consiste en agrupar convenientemente los términos de un polinomio, a fin de obtener, en cada grupo formado, un factor que sea común a todos los términos, luego se procede como en el caso anterior.

Ejemplo 1: Factorizar: $ac+ad+bc+bd$

Resolución:

Agrupando de dos en dos términos el polinomio dado, obtendremos dos polinomios parciales; veamos:

$$ac + ad + bc + bd = (ac + ad) + (bc + bd)$$

Sacamos factor común "b"

Sacamos factor común "a"

$$= a(c + d) + b(c + d)$$

Sacamos factor común "(c + d)"

$$ac + ad + bc + bd = (c + d)(a + b)$$

$$\therefore \quad \boxed{ac + ad + bc + bd = (c + d)(a + b)}$$

Verificación:

$$(c + d)(a + b) = c(a + b) + d(a + b)$$

$$\therefore \quad \boxed{(c + d)(a + b) = ac + bc + ad + bd} \text{ (Polinomio Original)}$$

Ejemplo 2: Factorizar: $mx - m - x + 1$

Resolución:

- Agrupando el primero con el segundo, el tercero con el cuarto, obtenemos:

$$mx - m - x + 1 = (mx - m) - (x - 1)$$

Sacamos factor común "m"

$$mx - m - x + 1 = m(x - 1) - 1(x - 1)$$

Sacamos factor común "(x– 1)"

$$mx - m - x + 1 = (x - 1)(m - 1)$$

$$\therefore \quad \boxed{mx - m - x + 1 = (x - 1)(m - 1)}$$

Ejemplo 3: Factorizar: $2x^2 + 2xc - 3bx - 3bc$

Resolución:

- Agrupando el primero con el segundo, el tercero con el cuarto obtenemos:

$$2x^2 + 2xc - 3bx - 3bc = (2x^2 + 2xc) - (3bx + 3bc)$$

Sacamos factor común "3b"

Sacamos factor común "2x"

$$2x^2 + 2xc - 3bx - 3bc = 2x(x + c) - 3b(x + c)$$

Sacamos factor común "(x + b)"

$$2x^2 + 2xc - 3bx - 3bc = (x + c)(2x - 3b)$$

$\therefore$ $\boxed{2x^2 + 2xc - 3bx - 3bc = (x + c)(2x - 3b)}$

Ejemplo 4: Factorizar: $3y^2 - 2ax + 3x - 2ay^2 + 4a - 6$

Resolución:

- Agrupamos los términos del polinomio de la siguiente manera:

$$3y^2 - 2ax + 3x - 2ay^2 + 4a - 6 = (3y^2 - 2ay^2) - (2ax - 3x) + (4a - 6)$$

$$= y^2(3 - 2a) - x(2a - 3) + 2(2a - 3)$$

$$= y^2\underline{(3 - 2a)} + x\underline{(3 - 2a)} - 2\underline{(3 - 2a)}$$

$$= \underline{(3 - 2a)}(y^2 + x - 2)$$

$\therefore$ $\boxed{3y^2 - 2ax + 3x - 2ay^2 + 4a - 6 = (3 - 2a)(y^2 + x - 2)}$

Ejemplo 5: Factorizar: $x^2 + \frac{1}{5}x + 5x + 1$

Resolución:

La expresión dada se puede escribir así:

$$x^2 + \frac{1}{5}x + 5x + 1 = \left(x^2 + \frac{1}{5}x\right) + \left(5x + \frac{5}{5}\right)$$

Sacamos factor común "5"

Sacamos factor común "x"

$$x^2 + \frac{1}{5}x + 5x + 1 = x\left(x + \frac{1}{5}\right) + 5\left(x + \frac{1}{5}\right)$$

Sacamos factor común "$\left(x + \frac{1}{5}\right)$"

$\therefore$ $\boxed{x^2 + \frac{1}{5}x + 5x + 1 = \left(x + \frac{1}{5}\right)(x + 5)}$

Ejemplo 6: Factorizar: $x^{n+2} + x^3 + x^n + x + x^2 + 1$

Resolución:

- Agrupamos los términos del polinomio de la siguiente manera:

$$x^{n+2} + x^3 + x^n + x + x^2 + 1 = (x^{n+2} + x^n) + (x^3 + x) + (x^2 + 1)$$

Sacamos factor común "x^n" ***Sacamos factor común "x"***

$$x^{n+2}+x^3+x^n+x+x^2+1=x^n(x^2+1)+x(x^2+1)+1(x^2+1)$$

Sacamos factor común "(x^2+1)"

$$x^{n+2}+x^3+x^n+x+x^2+1=(x^2+1)(x^n+x+1)$$

$$\therefore\ x^{n+2}+x^3+x^n+x+x^2+1=(x^2+1)(x^n+x+1)$$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 18

1. Factorizar por agrupación los siguientes polinomios:

a) $x^3+xz+x^2y^2+y^2z$

b) $x^2-3xz+2xy-6yz$

c) $3x^3-2x^2y+3xy-2y^2$

d) $ax-2ay+3bx-6by$

e) $10ax+by-2ay-5bx$

f) $21x^2y+3x-14xy-2$

g) $12a^2-10ab^2+5b^3-6ab$

h) $(1/4)x^2y-yz-(1/4)xy^2+xz$

i) $2ax+3a+x+3/2$

j) x^2-y-y^2-x

k) $9a^2-25b^2-3a-5b$

l) a^2-3a-b^2+3b

m) $x^2-2xy+y^2-x+y$

n) $3x^2+2/5+6x+x/5$

2. Factorizar por agrupación los siguientes polinomios:

a) x^3+3x^2-x-3

b) $x^3+2x^2y-xy^2-2y^3$

c) $ax^2-16ay^2+bx^2-16by^2$

d) $2a^2x-2x/9+a^2y-y/9$

e) $x^n+1+3x+2x^n+6$

f) $x^{3n}+2x^{2n}-2-x^n$

g) $x^3+xy+2x+x^2y+2y+y^2$

h) $3by+az+cy+3bz+ay+cz$

i) $ax^2+yz+3bx^2-ay-x^2z-3by$

j) $ax+3a/2+bx/3+b/2$

k) $4ay-10cy+6az-2by-15cz-3bz$

l) $6ax-5bx+5by-6ay+6axy-5bxy$

m) $3b^2y+a^2x-3b^2x-a^2y+2aby-2abx$

n) $ax^2+3ax-3ay-axy+x^2z+3xz-3yz-xyz$

RESPUESTAS TALLER 18

1. a) $(x+y^2)(x^2+z)$	b) $(x+2y)(x-3z)$	c) $(3x-2y)(x^2+y)$
d) $(a+3b)(x-2y)$	e) $(2a-b)(5x-y)$	f) $(7xy+1)(3x-2)$
g) $(6a-5b^2)(2a-b)$	h) $(x-y)\left(z+\frac{1}{4}xy\right)$	i) $\left(x+\frac{3}{2}\right)(2a+1)$
j) $(x+y)(x-y-1)$	k) $(3a+5b)(3a-5b-1)$	l) $(a-b)(a+b-3)$
m) $(x-y)(x-y-1)$	n) $(x+2)\left(3x+\frac{1}{5}\right)$	

2. a) $(x+1)(x-1)(x+3)$	b) $(x+y)(x-y)(x+2y)$
c) $(x+4y)(x-4y)(a+b)$	d) $\left(a+\frac{1}{3}\right)\left(a-\frac{1}{3}\right)(2x+y)$
e) $(x^n+3)(x+2)$	f) $(x^n+1)(x^n-1)(x^n+2)$
g) $(x+y)(x^2+y+2)$	h) $(a+3b+c)(y+z)$
i) $(x^2-y)(a+3b-z)$	j) $\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(a+\frac{1}{3}b\right)$
k) $(2y+3z)(2a-b-5c)$	l) $(6a-5b)(x-y+xy)$
m) $(a-3b)(a+b)(x-y)$	n) $(a+z)(x-y)(x+3)$

2.5.4 FACTORIZACIÓN DE UNA DIFERENCIA DE CUADRADOS

Hemos visto en los productos notables ya estudiados que una diferencia de cuadrados se obtiene multipicando la suma de dos términos por la diferencia de los mismos; osea:

$$(a+b)(a-b)=\underbrace{a^2-b^2}_{\text{Diferencia de cuadrados}}$$

En consecuencia una **Diferencia de cuadrados**, siempre será igual al producto de la suma de los téminos, por la diferencia de los mismos.

En general: $a^{2m}-b^{2n}=(a^m+b^n)(a^m-b^n)$

Luego: Dada una diferencia de cuadrados para hallar sus factores:

1º Se extrae la raíz cuadrada de cada término .
2º Se forman 2 factores uno con la suma de las raíces halladas y el otro con la diferencia de dichas raíces.

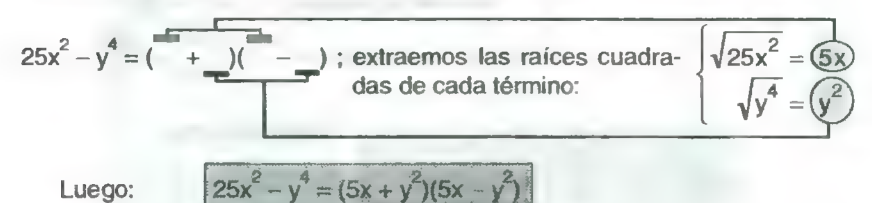
Ejemplo 1: Factorizar: $x^2 - 49$

$x^2 - 49 = (\quad + \quad)(\quad - \quad)$; extraemos las raíces cuadradas de cada término: $\sqrt{x^2} = x$; $\sqrt{49} = 7$

Luego: $x^2 - 49 = (x + 7)(x - 7)$

Ejemplo 2: Factorizar: $25x^2 - y^4$

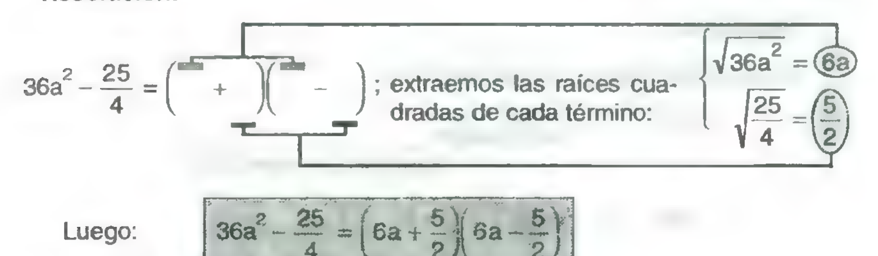
Resolución:



Luego: $25x^2 - y^4 = (5x + y^2)(5x - y^2)$

Ejemplo 3: Factorizar: $36a^2 - \dfrac{25}{4}$

Resolución:



Luego: $36a^2 - \dfrac{25}{4} = \left(6a + \dfrac{5}{2}\right)\left(6a - \dfrac{5}{2}\right)$

Ejemplo 4: Factorizar: $3x^2 - 300$

Resolución:

La expresión dada, se puede escribir así:

$$3x^2 - 300 = 3x^2 - 3 \cdot 100$$

Sacamos factor común "3"

$$3x^2 - 300 = 3(x^2 - 100) = 3(\quad + \quad)(\quad - \quad)$$

Extraemos $\sqrt{\ }$: $\sqrt{100} = 10$

Extraemos $\sqrt{\ }$: $\sqrt{x^2} = x$

Luego: $3x^2 - 300 = 3(x+10)(x-10)$

Ejemplo 5: Factorizar: $0,64 - x^8$

Resolución:

La expresión dada, se puede escribir así:

$$0,64 - x^8 = \frac{64}{100} - x^8 = (\quad + \quad)(\quad - \quad)$$

Extraemos $\sqrt{\ }$: $\sqrt{x^8} = x^4$

Extraemos $\sqrt{\ }$: $\sqrt{\frac{64}{100}} = \frac{8}{10}$

$$\therefore \quad 0,64 - x^8 = \left(\frac{8}{10} + x^4\right)\left(\frac{8}{10} - x^4\right)$$

Recuerda que:

- $\sqrt[n]{A^m} = A^{m/n}$
- $\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}$

Ejemplo 6: Factorizar: $80a^{2n} - 5$

Resolución:

La expresión dada, se puede escribir así:

$$80a^{2n} - 5 = 5 \cdot 16a^{2n} - 5 \cdot 1$$

Sacamos factor común "5"

$$80a^{2n} - 5 = 5(16a^{2n} - 1) = 5(\quad + \quad)(\quad - \quad)$$

Extraemos $\sqrt{\ }$: $\sqrt{1} = 1$

Extraemos $\sqrt{\ }$: $\sqrt{16a^{2n}} = 4a^n$

$$\therefore \quad 80a^{2n} - 5 = 5(4a^n + 1)(4a^n - 1)$$

Ejemplo 7: Factorizar. $(2x - y)^2 - (3y + z)^2$

Resolución:

$$(2x - y)^2 - (3y + z)^2 = [\quad + \quad][\quad - \quad]$$

Extraemos $\sqrt{\ }$: $\sqrt{(2x-y)^2} = (2x - y)$

Extraemos $\sqrt{\ }$: $\sqrt{(3y+z)^2} = (3y + z)$

Luego: $(2x - y)^2 - (3y + z)^2 = [(2x - y) + (3y + z)][(2x - y) - (3y + z)]$

$\therefore$ $(2x - y)^2 - (3y + z)^2 = [2x + 2y + z][2x - 4y - z]$

Ejemplo 8: Factorizar: $9x^3 - x^2 - 9x + 1$

Resolución:

- Agrupamos los términos de la siguiente manera :

$$9x^3 - x^2 - 9x + 1 = (9x^3 - 9x) - (x^2 - 1)$$

Sacamos factor común "9x"

$$9x^3 - x^2 - 9x + 1 = 9x(x^2 - 1) - 1(x^2 - 1)$$

Sacamos factor común "$(x^2 - 1)$"

$$9x^3 - x^2 - 9x + 1 = (x^2 - 1)(9x - 1) = (\quad + \quad)(\quad - \quad)(9x - 1)$$

Extraemos $\sqrt{\ }$: $\sqrt{1} = 1$

Extraemos $\sqrt{\ }$: $\sqrt{x^2} = x$

$\therefore$ $9x^3 - x^2 - 9x + 1 = (x + 1)(x - 1)(9x - 1)$

Ejemplo 9: Factorizar: $64x^2 - z^2 + 6z - 9$

Resolución:

- Agrupamos los términos de la siguiente manera :

$$64x^2 - z^2 + 6z - 9 = 64x^2 - (z^2 - 6z + 9)$$

$$64x^2 - z^2 + 6z - 9 = 64x^2 - (z - 3)^2 = [8x + (z - 3)][8x - (z - 3)]$$

Extraemos $\sqrt{\ }$: $\sqrt{(z - 3)^2} = (z - 3)$

Extraemos $\sqrt{\ }$: $\sqrt{64x^2} = 8x$

$$64x^2 - z^2 + 6z - 9 = [8x + (z - 3)][8x - (z - 3)]$$

$\therefore$ $64x^2 - z^2 + 6z - 9 = [8x + z - 3][8x - z + 3]$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 19

1. Factoriza los polinomios siguientes:

a) $x^2 - 121 =$	b) $64 - x^2 =$	c) $36x^2 - 1 =$
d) $49 - 16x^2 =$	e) $25x^2 - 4y^2 =$	f) $2x^2 - 200 =$
g) $6a^2 - 6b^2 =$	h) $x^4y^2 - 1 =$	i) $16x^2/9 - 36 =$
j) $81 - (1/9)z^2 =$	k) $144 - a^{2n} =$	l) $49x^{2n} - y^{2n} =$
m) $0{,}04x^2 - 1 =$	n) $6x^2 - 12$	o) $4x^2 - 8y^2 =$

2. Factoriza los polinomios siguientes:

a) $3x^2 - 9 =$	b) $5x^2 - 3 =$	c) $7 - 2x^2 =$
d) $(1/4)x^{2m} - 1 =$	e) $(1/3)x^4 - (16/3)y^4 =$	f) $x^4 - 81 =$
g) $(1/25)x^4 - (1/9)y^6 =$	h) $15 - 60x^{2n} =$	i) $49a^4b^2 - 25x^2 =$
j) $16ax^{4n} - 9ax^{4m} =$	k) $(x+3y)^2 - 4 =$	l) $(2x-1)^2 - 64 =$
m) $225 - (x+z)^2 =$	n) $(a+2b)^2 - 9c^2 =$	o) $100(a+b)^2 - 4c^2 =$

3. Factoriza los polinomios siguientes:

a) $(x+2y)^2 - (3z-w)^2 =$	b) $(a-3b)^2 - (3a-b)^2 =$
c) $(x+2c+y)^2 - (x-c-y)^2 =$	d) $x^2 - 2xy + y^2 - a^2 + 2ab - b^2 =$
e) $4x^3 + 1 - x^2 - 4x =$	f) $121a^2 - x^4 - 10x^2 - 25 =$
g) $9a^2 - 6a + 1 - 100x^2 =$	h) $x^2 + 12x + 36 - y^2 - 6y - 9 =$
i) $a^2 + 4a + 4 - y^2 + 2y - 1 =$	j) $x^4 - x^2 - x^2y^2 + y^2 =$

RESPUESTAS TALLER 19

1. a) $(x+11)(x-11)$	b) $(8+x)(8-x)$	c) $(6x+1)(6x-1)$
d) $(7+4x)(7-4x)$	e) $(5x+2y)(5x-2y)$	f) $2(x+10)(x-10)$
g) $6(a+b)(a-b)$	h) $(x^2y+1)(x^2y-1)$	i) $4\left(\frac{2}{3}x+3\right)\left(\frac{2}{3}x-3\right)$
j) $\left(9+\frac{1}{3}z\right)\left(9-\frac{1}{3}z\right)$	k) $(12+a^n)(12-a^n)$	l) $(7x^n+y^n)(7x^n-y^n)$

m) $(0{,}2x+1)(0{,}2x-1)$ n) $6(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$ o) $6(x+\sqrt{2}\,y)(x-\sqrt{2}\,y)$

2.

a) $3(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

b) $(\sqrt{5}\,x+\sqrt{3})(\sqrt{5}\,x-\sqrt{3})$

c) $(\sqrt{7}+\sqrt{2}\,x)(\sqrt{7}-\sqrt{2}\,x)$

d) $\left(\frac{1}{2}x^m+1\right)\left(\frac{1}{2}x^m-1\right)$

e) $\frac{1}{3}(x^2+4y^2)(x+2y)(x-2y)$

f) $(x^2+9)(x+3)(x-3)$

g) $\left(\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{3}y^3\right)\left(\frac{1}{5}x^2-\frac{1}{3}y^3\right)$

h) $15(1+2x^n)(1-2x^n)$

i) $(7a^2b+5x)(7a^2b-5x)$

j) $a(4x^{2m}+3x^{2n})(2x^{2n}+\sqrt{3}\,x^m)(2x^n-\sqrt{3}\,x^m)$

k) $(x+3y+2)(x+3y-2)$

l) $(2x+7)(2x-9)$

m) $(15+x+z)(15-x-z)$

n) $(a+2b+3c)(a+2b-3c)$

o) $4(5a+5b+c)(5a+5b-c)$

3.

a) $(x+2y+3z-w)(x+y-3z+w)$

b) $-8(a+b)(a-b)$

c) $(2x+c)(2y+3c)$

d) $(x-y+a-b)(x-y-a+b)$

e) $(x+1)(x-1)(4x-1)$

f) $(11a+x^2+5)(11a-x^2-5)$

g) $(3a-1+10x)(3a-1-10x)$

h) $(x+y+9)(x-y+3)$

i) $(a+y+1)(a-y+3)$

j) $(x+1)(x-1)(x+y)(x-y)$

2.5.5 FACTORIZACIÓN DE UNA SUMA DE CUBOS

La suma de cubos es un producto igual a la suma de sus bases, multiplicada por el trinomio que se forma del cuadrado de la primera base menos el producto de sus bases y más el cuadrado de la segunda base.

Osea: $$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

Ejemplo 1: Factorizar: $27a^3+64b^3$

Resolución:

$$27a^3+64b^3=(\quad+\quad)(\quad-\quad+\quad)$$

Para factorizar dicho binomio se extrae la raíz cúbica de ambos términos; la suma de estas raíces es el primer factor binomio (la suma de sus bases)

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[3]{27a^3}=\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{a^3}=3\cdot a=3a\\ \sqrt[3]{64b^3}=\sqrt[3]{64}\cdot\sqrt[3]{b^3}=4\cdot b=4b\end{array}\right\}\ \textbf{(Suma de bases: } \mathbf{3a+4b)}$$

Esta suma **(3a + 4b)** se multiplica por un trinomio cuyos términos son el cuadrado de la primera base **$(3a)^2 = 9a^2$**; menos el producto de las dos bases **$-3a \cdot 4b = -12ab$** ; y más el cuadrado de la segunda base **$(4b)^2 = 16b^2$**

Luego: $\boxed{27a^3 + 64b^3 = (3a + 4b)[9a^2 - 12ab + 16b^2]}$

Ejemplo 2: Factorizar: $125x^3 + 1$

Resolución:

$125x^3 + 1 = (5x + 1)(\quad - \quad + \quad)$

Extraemos $\sqrt[3]{\;}$: $\sqrt[3]{1} = 1$

Extraemos $\sqrt[3]{\;}$: $\sqrt[3]{125x^3} = 5x$

(Suma de bases: 5x + 1)

Luego: $125x^3 + 1 = (5x + 1)[(5x)^2 - (5x)(1) + (1)^2]$

$\therefore \boxed{125x^3 + 1 = (5x + 1)[25x^2 - 5x + 1]}$

Ejemplo 3: Factorizar: $x^6 + \frac{1}{8}y^3$

Resolución:

$x^6 + \frac{1}{8}y^3 = \left(\quad + \quad\right)\left(\quad - \quad + \quad\right)$

Extraemos $\sqrt[3]{\;}$: $\sqrt[3]{\frac{1}{8}y^3} = \frac{1}{2}y$

Extraemos $\sqrt[3]{\;}$: $\sqrt[3]{x^6} = x^2$

Suma de bases: $x^2 + \frac{1}{2}y$

$$x^6 + \frac{1}{8}y^3 = \left(x^2 + \frac{1}{2}y\right)\left(\left(x^2\right)^2 - \left(\frac{1}{2}y\right)\left(x^2\right) + \left(\frac{1}{2}y\right)^2\right)$$

$$\therefore \boxed{x^6 + \frac{1}{8}y^3 = \left(x^2 + \frac{1}{2}y\right)\left(x^4 - \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{4}y^2\right)}$$

Ejemplo 4: Factorizar: $0{,}027x^3 + 0{,}001y^3$

Resolución:

La expresión dada se puede escribir así:

$$0{,}027x^3+0{,}001y^3=\frac{27}{1000}x^3+\frac{1}{1000}y^3=(\quad+\quad)(\quad-\quad+\quad)$$

Extraemos $\sqrt[3]{\ }$: $\sqrt[3]{\frac{1}{1000}y^3}=\frac{1}{10}y$

Extraemos $\sqrt[3]{\ }$: $\sqrt[3]{\frac{27}{1000}x^3}=\frac{3}{10}x$

Suma de bases: $\frac{3}{10}x+\frac{1}{10}y$

Luego: $0{,}027x^3+0{,}001y^3=\frac{27}{1000}x^3+\frac{1}{1000}y^3$

$$0{,}027x^3+0{,}001y^3=\left(\frac{3}{10}x+\frac{1}{10}y\right)\left(\left(\frac{3}{10}x\right)^2-\frac{3}{10}x\cdot\frac{1}{10}y+\left(\frac{1}{10}y\right)^2\right)$$

$$0{,}027x^3+0{,}001y^3=\left(\frac{3}{10}x+\frac{1}{10}y\right)\left(\frac{9}{100}x^2-\frac{3}{100}xy+\frac{1}{100}y^2\right)$$

$$\therefore\quad \boxed{0{,}027x^3+0{,}001y^3=(0{,}3x+0{,}1y)(0{,}09x^2-0{,}03xy+0{,}01y^2)}$$

Ejemplo 5: Factorizar: $(x+2y)^3+64z^3$

Resolución:

$$(x+2y)^3+64z^3=[\quad+\quad][\quad-\quad+\quad]$$

Extraemos $\sqrt[3]{\ }$: $\sqrt[3]{64z^3}=4z$

Extraemos $\sqrt[3]{\ }$: $\sqrt[3]{(x+2y)^3}=(x+2y)$

Suma de bases: $[(x+2y)+4z]$

Luego: $(x+2y)^3+64z^3=[(x+2y)+4z][(x+2y)^2-(x+2y)(4z)+(4z)^2]$

$$\therefore\quad \boxed{(x+2y)^3+64z^3=[x+2y+4z][(x+2y)^2-4z(x+2y)+16z^2]}$$

Ejemplo 6: Factorizar: $64x^6+216$

Resolución:

$$64x^6+216=(\quad+\quad)(\quad-\quad+\quad)$$

Extraemos $\sqrt[3]{\ }$: $\sqrt[3]{216}=6$

Extraemos $\sqrt[3]{\ }$: $\sqrt[3]{64x^6}=4x^2$

Suma de bases: $(4x^2+6)$

Luego:

$$64x^6+216=(4x^2+6)[(4x^2)^2-(4x^2)(6)+(6)^2]$$

$$64x^6 + 216 = (4x^2 + 6)(16x^4 - 24x^2 + 36)$$

Sacamos factor común "4"

Sacamos factor común "4"

$$64x^6 + 216 = [2(2x^2 + 3)][4(4x^4 - 6x^2 + 9)]$$

$$\therefore \quad \boxed{64x^6 + 216 = 8(2x^2 + 3)(4x^4 - 6x^2 + 9)}$$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 20

1. Factoriza los siguientes binomios:

a) $8x^3 + 1=$	b) $x^3 + 64 =$	c) $125x^3 + 27y^3 =$
d) $8 + 1\,000x^3 =$	e) $1 + 27x^6 =$	f) $343x^9 + 1=$
g) $x^3 + x^{-3} =$	h) $729x^3 + y^6 =$	i) $64 + 27x^{3n} =$
j) $x^{3n} + 1=$	k) $x^6 + 1 =$	l) $8x^{15} + y^{12} =$

2. Factoriza los siguientes binomios:

a) $125x^6 + y^9 =$	b) $a^3b^6 + x^6 =$	c) $1331x^3 + y^{12} =$
d) $27x^6y^3 + z^9 =$	e) $1 + (1/8)x^3 =$	f) $(8/27)x^3 + y^3 =$
g) $\frac{1}{64}x^3 + \frac{y^3}{27z^3} =$	h) $\frac{125x^6}{8y^3} + z^6 =$	i) $0{,}064x^3 + 1=$
j) $0{,}125x^3 + 0{,}008y^3 =$	k) $729x^3 + 0{,}008y^6 =$	l) $(27/8)x^3 + 0{,}216y^3 =$

3. Factoriza los siguientes binomios:

a) $7x^4 + 7x =$	b) $6x^5 + 6x^2y^3 =$
c) $6bx^6 + 48by^9 =$	d) $(a + b)^3 + 125x^3 =$
e) $64(x - 3)^3 + 27y^6 =$	f) $(x - y)^3 + (a - 2)^3 =$
g) $(x^2 + a)^3 + (a + 2)^3 =$	h) $729(3a - y)^3 + (2x + y)^3 =$
i) $0{,}008(x + 5y)^3 + (3 - y)^3 =$	j) $0{,}027x^3 + (3x + y)^3 =$
k) $(1/8)(3a - b)^3 + (1/27)(b - a)^3 =$	l) $(a + b)^{3n} + (a - b)^{3m} =$

RESPUESTAS TALLER 20

1.

a) $(2x+1)(4x^2-2x+1)$

b) $(x+4)(x^2-4x+16)$

c) $(5x+3y)(25x^2-15xy+9y^2)$

d) $8(1+5x)(1-5x+25x^2)$

e) $(1+3x^2)(1-3x^2+9x^4)$

f) $(7x^3+1)(49x^6-7x^3+1)$

g) $(x+x^{-1})(x^2-1+x^{-2})$

h) $(9x+y^2)(81x^2-9xy^2+y^6)$

i) $(4+3x^n)(16-12x^n+9x^{2n})$

j) $(x^n+1)(x^{2n}-x^n+1)$

k) $(x^2+1)(x^4-x^2+1)$

l) $(2x^5+y^4)(4x^{10}-2x^5y^4+y^8)$

2.

a) $(5x^2+y^3)(25x^4-5x^2y^3+y^6)$

b) $(ab^2+x^2)(a^2b^4 \quad ab^2x^2+x^4)$

c) $(11x+y^4)(121x^2-11xy^4+y^8)$

d) $(3x^2y+z^3)(9x^4y^4-3x^2yz^3+z^6)$

e) $\left(1+\frac{1}{2}x\right)\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2\right)$

f) $\left(\frac{2}{3}x+y\right)\left(\frac{4}{9}x^2-\frac{2}{3}xy+y^2\right)$

g) $\left(\frac{1}{4}x+\frac{y}{3z}\right)\left(\frac{1}{16}x^2-\frac{xy}{12z}+\frac{y^2}{9z^2}\right)$

h) $\left(\frac{5x^2}{2y}+z^2\right)\left(\frac{25x^4}{4y^2}-\frac{5x^2z^2}{2y}+z^4\right)$

i) $(0{,}4x+1)(0{,}16x^2-0{,}4x+1)$

j) $(0{,}5x+0{,}2y)(0{,}25x^2-0{,}1xy+0{,}04y^2)$

3.

a) $7x(x+1)(x^2-x+1)$

b) $6x^2(x+y)(x^2-xy+y^2)$

c) $6b(x^2+2y^3)(x^4-2x^2y^3+4y^6)$

d) $(a+b+5x)[(a+b)^2-5(a+b)x+25x^2]$

e) $(4x+3y^2-12)[16(x-3)^2-12(x-3)y^2+9y^4]$

f) $(x-y+a-2)[(x-y)^2-(x-y)(a-2)+(a-2)^2]$

g) $(x^2+2a+2)[x^2(x^2+a-2)+a(a+2)+4]$

h) $(27a-8y+2x)[81(3a-y)^2-9(3a-y)(2x+y)+(2x+y)^2]$

i) $(0{,}2x+4y+3)[0{,}04(x+5y)^2-0{,}2(x+5y)(3-y)+(3-y)^2]$

j) $(3{,}3x+y)[0{,}09x^2-0{,}3x(3x+y)+(3x+y)^2]$

k) $\frac{1}{216}(7a-b)(103a^2-80ab+19b^2)$

l) $[(a+b)^n+(a-b)^m][(a+b)^{2n}-(a+b)^n(a-b)^m+(a-b)^{2m}]$

2.5.6 FACTORIZACIÓN DE UNA DIFERENCIA DE CUBOS

La diferencia de dos cubos es un producto igual a la diferencia de las bases, multiplicada por el trinomio que consta del cuadrado de la primera base más el producto de las bases y más el cuadrado de la segunda base.

Osea: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Ejemplo 1: Factorizar: $8x^3 - 27$

Resolución:

$$8x^3 - 27 = (2x-3)(\quad + \quad + \quad)$$

Para factorizar dicho binomio se extrae la raíz cúbica a ambos términos, la diferencia de estas raíces es el primer factor binomio **(diferencia de bases).**

$$\left.\begin{array}{r} \sqrt[3]{8x^3} = \sqrt[3]{8}\ \sqrt[3]{x^3} = 2\cdot x = \boxed{2x} \\ \sqrt[3]{27} = \boxed{3} \end{array}\right\}$$ **Diferencia de bases: (2x – 3)**

Esta diferencia **(2x – 3)** se multiplica por un trinomio cuyos términos son:

El cuadrado de la primera base $\mathbf{(2x)^2 = 4x^2}$; más el producto de las dos bases $\mathbf{2x\cdot 3 = 6x}$; y más el cuadrado de la segunda base $\mathbf{(3)^2} = 9$

Luego: $8x^3 - 27 = (2x-3)(4x^2 + 6x + 9)$

Ejemplo 2: Factorizar: $125x^6 - y^3$

Resolución:

$$125x^6 - y^3 = (\quad - \quad)(\quad + \quad + \quad)$$

→ Extraemos $\sqrt[3]{\ }$: $\sqrt[3]{y^3} = y$

→ Extraemos $\sqrt[3]{\ }$: $\sqrt[3]{125x^6} = 5x^2$

Diferencia de bases: $\mathbf{(5x^2 - y)}$

Luego: $125x^6 - y^3 = (5x^2 - y)((5x^2)^2 + (5x^2)(y) + (y)^2)$

$\therefore\ 125x^6 - y^3 = (5x^2 - y)[25x^4 + (5x^2)(y) + (y)^2]$

Ejemplo 3: Factorizar: $a^3 - a^{-6}$

Resolución:

$$a^3 - a^{-6} = (\quad - \quad)(\quad + \quad + \quad)$$

→ Extraemos $\sqrt[3]{\ }$: $\sqrt[3]{a^{-6}} = a^{-2}$

→ Extraemos $\sqrt[3]{\ }$: $\sqrt[3]{a^3} = a$

Diferencia de bases: $\mathbf{[a - a^{-2}]}$

Luego: $a^3 - a^{-6} = (a - a^{-2})(a^2 + a\cdot a^{-2} + (a^{-2})^2)$

$\therefore\ a^3 - a^{-6} = (a - a^{-2})(a^2 + a^{-1} + a^{-4})$

Ejemplo 4: Factorizar: $64x^3 - (3x-1)^3$

Resolución:

$$64x^3 - (3x-1)^3 = [\quad - \quad][\quad + \quad + \quad]$$

Extraemos $\sqrt[3]{\ }$: $\sqrt[3]{64x^3} = 4x$

Extraemos $\sqrt[3]{\ }$: $\sqrt[3]{(3x-1)^3} = (3x-1)$

Diferencia de bases: **$[4x - (3x-1)]$**

Luego: $64x^3 - (3x-1)^3 = [4x - (3x-1)][(4x)^2 + 4x(3x-1) + (3x-1)^2]$

$$64x^3 - (3x-1)^3 = (x+1)((16x^2 + 12x^2 - 4x + 9x^2 - 6x + 1)$$

$$\therefore \boxed{64x^3 - (3x-1)^3 = (x+1)((37x^2 - 10x + 1)}$$

Ejemplo 5: Factorizar: $8x^{3n} - 27y^{3n}$

Resolución:

$$8x^{3n} - 27y^{3n} = (\quad - \quad)[\quad + \quad + \quad]$$

Extraemos $\sqrt[3]{\ }$: $\sqrt[3]{27y^{3n}} = 3y^n$

Extraemos $\sqrt[3]{\ }$: $\sqrt[3]{8x^{3n}} = 2x^n$

Diferencia de bases: **$(2x^n - 3y^n)$**

Luego: $8x^{3n} - 27y^{3n} = (2x^n - 3y^n)[(2x^n)^2 + (2x^n)(3y^n) + (3y^n)^2]$

$$\therefore \boxed{8x^{3n} - 27y^{3n} = (2x^n - 3y^n)(4x^{2n} + 6x^n y^n + 9y^{2n})}$$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 21

1. Factoriza los siguientes monomios:

a) $x^3 - 1 =$	b) $8 - x^3 =$	c) $64x^3 - y^3 =$	d) $x^3 - 125y^3 =$
e) $x^6 - 27y^9 =$	f) $x^9 - y^6 =$	g) $64x^{12} - 1 =$	h) $216x^3 - 125y^6 =$
i) $1331x^9 - y^3 =$	j) $x^{3n} - 27 =$	k) $x^6 - 1 =$	l) $8x^{12} - y^{15} =$

2. Factoriza los siguientes monomios:

a) $64x^6 - y^9 =$	b) $x^3 - a^6b^9 =$	c) $1/27x^3 - 1 =$
d) $1/216x^3 - y^6 =$	e) $1000x^6 - y^{15} =$	f) $64x^3y^6 - z^9 =$

g) $8x^6y^9 - a^{12} =$

h) $125x^3 - 0{,}001y^6 =$

i) $0{,}027x^3 - 1 =$

j) $0{,}125x^6 - 0{,}004y^3 =$

k) $\dfrac{8x}{125y^6} - z^3$

l) $\dfrac{8}{27}x^3 - 0{,}216y^3 =$

3. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $4x^5 - 4x^2 =$

b) $8x^7 - 8x^4y^3 =$

c) $12ax^6 - 96ay^9 =$

d) $(2x + y)^3 - 8x^6 =$

e) $8(x - 2)^3 - 27y^3 =$

f) $(x + y)^3 - (3 - y)^3 =$

g) $(x + y^2)^3 - (2x - y)^3 =$

h) $216(2a - b)3 - (a + b)^3 =$

i) $0{,}001(x + 2y)^3 - (2 - y)^3 =$

j) $(2x - y)^3 - 0{,}008x^3 =$

k) $(2a - b)^{3n} - (a - 2b)^{3n} =$

l) $\dfrac{1}{64}(x - 3y)^3 - \dfrac{1}{8}(2x + 1)^3 =$

RESPUESTAS TALLER 21

1.

a) $(x - 1)(x^2 + x + 1)$

b) $(2 - x)(4 + 2x + x^2)$

c) $(4x - y)(16x^2 + 4xy + y^2)$

d) $(x + 5y)(x^2 + 5xy + 25y^2)$

e) $(x^2 - 3y^3)(x^4 + 3x^2y^3 + 9y^6)$

f) $(x^3 - y^2)(x^6 + x^3y^2 + y^4)$

g) $(2x^2 + 1)(2x^2 - 1)(16x^8 + 4x^4 + 1)$

h) $(6x - 5y^2)(36x^2 + 30xy^2 + 25y^4)$

i) $(11x^3 - y)(121x^6 + 11x^3y + y^2)$

j) $(x^n - 3)(x^{2n} + 3x^n + 9)$

k) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

l) $(2x^4 - y^5)(4x^8 + 2x^4y^5 + y^{10})$

2.

a) $(4x^2 - y^3)(16x^4 + 4x^2y^3 + y^6)$

b) $(x - a^2b^3)(x^2 + a^2b^3x + a^4b^6)$

c) $\left(\dfrac{1}{3}x - 1\right)\left(\dfrac{1}{9}x^2 + \dfrac{1}{3}x + 1\right)$

d) $\left(\dfrac{1}{6}x - y^2\right)\left(\dfrac{1}{36}x^2 + \dfrac{xy^2}{6} + y^4\right)$

e) $(10x^2 - y^5)(100x^4 + 10x^2y^5 + y^{10})$

f) $(4xy^2 - z^3)(16x^2y^4 + 4xy^2z^3 + z^6)$

g) $(2x^2y^3 - a^4)(4x^4y^6 + 2a^4x^2y^3 + a^8)$

h) $(5x - 0{,}1y^2)(25x^2 + 0{,}5xy^2 + 0{,}01y^4)$

i) $(0{,}3x - 1)(0{,}09x^2 + 0{,}3x + 1)$

j) $(0{,}5x^2 - 0{,}2y)(0{,}25x^4 + 0{,}1x^2y + 0{,}04y^2)$

k) $\left(\dfrac{2x}{5y^2}-z\right)\left(\dfrac{4x^2}{25y^4}+\dfrac{2xz}{5y^2}+z^2\right)$

l) $\left(\dfrac{2}{3}x-0,6y\right)\left(\dfrac{4}{9}x^2+0,4xy+0,36y^2\right)$

3. a) $4x^2(x-1)(x^2+x+1)$

b) $8x^4(x-y)(x^2+xy+y^2)$

c) $12a(x^2-2y^3)(x^4+2x^2y^3+4y^6)$

d) $(2x+y-2x^2)[(2x+y)^2+2x^2(2x+y)+4x^4$

e) $(2x-3y-4)[4(x-2)^2+6y(x-2)+9y^2]$

f) $(x+2y-3)(x^2-xy-y^2+3x-3y+9)$

g) $(y^2+y-x)[(x+y^2)^2+(x+y^2)(2x-y)+(2x-y)^2]$

h) $(11a-7b)(157a^2-136ab+31b^2)$

i) $(0,1x+1,2y-2)[0,01(x+2y)^2+0,1(x+2y)(2-y)+(2-y)^2]$

j) $(1,8x-y)[(2x-y)^2+0,2x(2x-y)+0,04x^2]$

k) $[(2a-b)^n-(a-2b^n)][(2a-b)^{2n}+(2a-b)^n(a-2b)^n+(a-2b)^{2n}]$

l) $\left(\dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{4}y+1\right)\left[\dfrac{1}{16}(x-3y)^2+\dfrac{1}{8}(x-3y)(2x+1)+\dfrac{1}{4}(2x+1)^2\right]$

2.6 FACTORIZACIÓN DE TRINOMIOS DE SEGUNDO GRADO

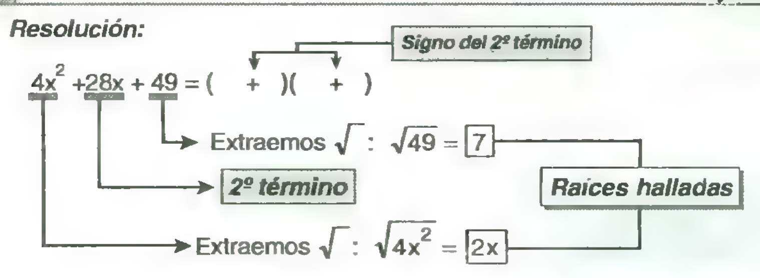
2.6.1 FACTORIZACIÓN DE UN TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Cuando en un trinomio (Tres términos) después de haberlo ordenado el primer y el tercer término son cuadrados y el segundo término es el doble producto de las bases de dichos términos esta clase de términos se llaman **"Trinomios Cuadrados Perfectos".**

Todo trinomio cuadrado perfecto se descompone en dos factores binomios, que se obtienen extrayendo la raíz cuadrada de los términos primero y tercero, empleando el signo del segundo término.

Ejemplo 1: Factorizar: $4x^2+28x+49$

Resolución:

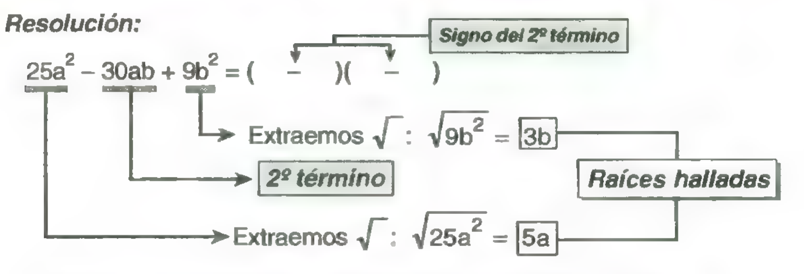


- Doble producto de las raíces halladas es: $2(2x)(7) = \mathbf{28x}$

Luego: $4x^2 + 28x + 49 = (2x + 7)(2x + 7) = (2x + 7)^2$ *Igual al 2º término*

Ejemplo 2: Factorizar: $25a^2 - 30ab + 9b^2$

Resolución:



- Doble producto de las raíces halladas es: $2(5a)(3b) = \mathbf{30ab}$

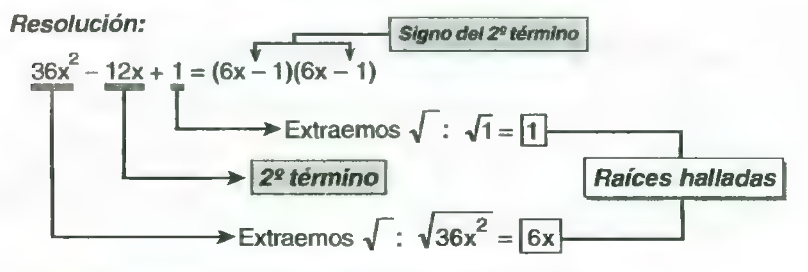
Igual al 2º término

Luego:

$$25a^2 - 30ab + 9b^2 = (5a - 3b)(5a - 3b) = (5a - 3b)^2$$

Ejemplo 3: Factorizar: $36x^2 - 12x + 1$

Resolución:



- Doble producto de las raíces halladas es: $(6x)(1) = \mathbf{12x}$

Igual al 2º término

Luego:

$$36x^2 - 12x + 1 = (6x - 1)(6x - 1) = (6x - 1)^2$$

Ejemplo 4: Factorizar: $25x^{2n} + 64 + 80x^n$

Resolución:

Signo del 2º término

$$25x^{2n} + 64 + 80x^n = 25x^{2n} + 80x^n + 64 = (5x^n + 8)(5x^n + 8)$$

- 64 → Extraemos $\sqrt{\ }$: $\sqrt{64} = \boxed{8}$
- $80x^n$ → **2º término**
- $25x^{2n}$ → Extraemos $\sqrt{\ }$: $\sqrt{25x^{2n}} = \boxed{5x^n}$

Raíces halladas

- Doble producto de las raíces halladas; $2(5x^n)(8) = 80x^n$ — **Igual al 2º término**

Luego:

$$25x^{2n} + 80x^n + 64 = (5x^n + 8)(5x^n + 8) = (5x^n + 8)^2$$

Ejemplo 5: Factorizar: $\frac{4}{9}x^2 + 25y^2 - \frac{20}{3}xy$

Resolución:

Signo del 2º término

$$\frac{4}{9}x^2 + 25y^2 - \frac{20}{3}xy = \frac{4}{9}x^2 - \frac{20}{3}xy + 25y^2 = \left(\frac{2}{3}x - 5y\right)\left(\frac{2}{3}x - 5y\right)$$

- $25y^2$ → Extraemos $\sqrt{\ }$: $\sqrt{25y^2} = \boxed{5y}$
- $\frac{20}{3}xy$ → **2º término**
- $\frac{4}{9}x^2$ → Extraemos $\sqrt{\ }$: $\sqrt{\frac{4}{9}x^2} = \boxed{\frac{2}{3}x}$

Raíces halladas

- Doble producto de las raíces halladas: $2\left(\frac{2}{3}x\right)(5y) = \frac{20}{3}xy$ — **Igual al 2º término**

Luego:

$$\frac{4}{9}x^2 - \frac{20}{3}xy + 25y^2 = \left(\frac{2}{3}x - 5y\right)\left(\frac{2}{3}x - 5y\right) = \left(\frac{2}{3}x - 5y\right)^2$$

Observación 1:

Todo cuadrado perfecto tiene su origen en el cuadrado de una suma o de una diferencia de dos términos, o sea:

$$(a + b)^2 = \underbrace{a^2 + 2ab + b^2}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto}} \quad ; \quad (a - b)^2 = \underbrace{a^2 - 2ab + b^2}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto}}$$

Por lo tanto, un trinomio cuadrado perfecto siempre será igual al cuadrado de una suma o al cuadrado de una diferencia de dos términos.

Observación 2:

Los siguientes polinomios **Trinomios Cuadrados Perfectos (T.C.P)**

$x^2 - 3x + 4$; no es **T.C.P.** porque: $\boxed{3x \neq 4x}$

$\sqrt{4} = \boxed{2}$

$\sqrt{x^2} = \boxed{x}$

Doble producto de las raíces halladas: $2(x)(2) = \mathbf{4x}$

$x^2 + 5x + 16$; no es **T.C.P.** porque: $\boxed{5x \neq 8x}$

$\sqrt{16} = \boxed{4}$

$\sqrt{x^2} = \boxed{x}$

Doble producto de las raíces halladas: $2(x)(4) = \mathbf{8x}$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 22

1. Factoriza los siguientes trinomios cuadrados perfectos:

a) $x^2 + 18x + 81 =$	b) $x^2 + 24x + 144 =$
c) $x^2 - 20x + 100 =$	d) $x^2 + 16x + 64 =$
e) $x^2 + 30x + 225 =$	f) $4x^2 + 12x + 9 =$
g) $9x^2 + 30x + 25 =$	h) $25x^2 + 10x + 1 =$
i) $49x^2 + 9 + 42x =$	j) $121x^2 + 132x + 36 =$
k) $4x^2 + y^2 + 4xy =$	l) $(x + y)^2 + 9z^2 + 6z(x + y) =$

2. Factoriza los siguientes trinomios cuadrados perfectos:

a) $x^2 - 8x + 16 =$	b) $x^2 - 14x + 49 =$
c) $x^2 - 26x + 169 =$	d) $x^2 - 12x + 36 =$
e) $x^{4n} - 2x^{2n} + 1 =$	f) $x^6 - 4x^3 + 4 =$
g) $4x^{10} - 12x^5 + 9 =$	h) $36x^2 - 84x + 49 =$
i) $9x^2 - 48xy + 64y^2 =$	j) $x^2 + 36y^2 - 12xy =$
k) $16x^2 + 9y^2 - 24xy =$	l) $49x^4 + 1 - 14x^2 =$

3. Factoriza los siguientes trinomios cuadrados perfectos:

a) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{2xy}{3}+y^2=$	b) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{xy}{5}+\dfrac{y^2}{4}=$
c) $\dfrac{1}{81}x^2-\dfrac{1}{18}x+\dfrac{1}{16}=$	d) $\dfrac{25}{9}x^4+y^2-\dfrac{10}{3}x^2y=$
e) $0{,}04x^2+0{,}12xy+0{,}09y^2=$	f) $0{,}36x^4-1{,}2x^2y+y^2=$
g) $9x^6+1{,}2x^3+0{,}04=$	h) $0{,}16+\dfrac{0{,}8}{3}x+\dfrac{1}{9}x^2=$
i) $25x^2+10\sqrt{3}\,x+3=$	j) $49a^2x^2+28a^2x+4a^2=$
k) $2x^2+8y^2-8xy=$	l) $2x^6+2\sqrt{6}\,x^3y+3y^2=$

4. Escribe el término que falta para que en cada expresión siguiente obtengas un trinomio cuadrado perfecto **(T.C.P.)**

a) $x^2+\square+81$	b) $x^2-\square+144$
c) $4x^2+\square+625$	d) $49x^4+\square+36$
e) $100x^2-\square+49$	f) $36x^2-\square+\dfrac{1}{9}$
g) $\dfrac{1}{4}x^2+\square+121$	h) $9x^2-48x+\square$
i) $16-\square+100z^2$	j) $\square+72y+16y^2$
k) $100x^2+\square+9y^2$	l) $\square-60x+25$

5. Factoriza, simplifica y reduce los términos semejantes:

a) $\dfrac{a^2-9}{a+3}+\dfrac{a^2+10a+25}{a+5}-\dfrac{(a+2)^2}{a+2}$

Resolución:

- Factorizamos: **i)** $a^2-9=a^2-3^2=(a+3)(a-3)$

ii) $a^2+10a+25=(a+5)^2$

Luego:

$$\frac{a^2-9}{a+3}+\frac{a^2+10a+25}{a+5}-\frac{(a+2)^2}{a+2}=\frac{\cancel{(a+3)}(a-3)}{\cancel{(a+3)}}+\frac{\cancel{(a+5)^2}}{\cancel{(a+5)}}-\frac{\cancel{(a+2)^2}}{\cancel{(a+2)}}$$

$$=(a-3)+(a+5)-(a+2)$$

$$\frac{a^2-9}{a+3}+\frac{a^2+10a+25}{a+5}-\frac{(a+2)^2}{a+2}=a-3+\cancel{a}+5-\cancel{a}-2$$

$$\boxed{\frac{a^2-9}{a+3}+\frac{a^2+10a+25}{a+5}-\frac{(a+2)^2}{a+2}=a}$$ ***Rpta.***

b) $\dfrac{4x^2-49}{2x+7}-\dfrac{x^2-16x+64}{8-x}+\dfrac{9x^2-6x+1}{1-3x}$

Resolución:

- Factorizamos: **i)** $4x^2-49=(2x)^2-7^2=(2x+7)(2x-7)$

ii) $x^2-16x+64=(x-8)^2$

iii) $9x^2-6x+1=(3x-1)^2$

Luego:

$$\frac{4x^2-49}{2x+7}-\frac{x^2-16x+64}{8-x}+\frac{9x^2-6x+1}{1-3x}=\frac{\cancel{(2x+7)}(2x-7)}{\cancel{(2x+7)}}-\frac{(x-8)^2}{(8-x)}+\frac{(3x-1)^2}{(1-3x)}$$

$$=(2x-7)-\frac{\cancel{(8-x)^2}}{\cancel{(8-x)}}+\frac{\cancel{(1-3x)^2}}{\cancel{(1-3x)}}$$

$$=(2x-7)-(8-x)+(1-3x)$$

$$=2x-7-8+x+1-3x=-14$$

$$\boxed{\frac{4x^2-49}{2x+7}-\frac{x^2-16x+64}{8-x}+\frac{9x^2-6x+1}{1-3x}=-14}$$

Recuerda que:

$(a-b)^2=(b-a)^2$

c) $\dfrac{(5x-2)^2}{2-5x}-\dfrac{x^3-8}{2-x}+\dfrac{(x-6)^2}{6-x}-\dfrac{\left(16-x^4\right)^2}{x^2+4}$ ➪ ***Rpta.*** $2(x^2-2x+4)$

d) $\dfrac{y^2-64}{8-y}-\dfrac{6\left(y^2-81\right)}{3y-27}+\dfrac{5\left(y^2-12y+36\right)}{6-y}$ ➪ ***Rpta.*** $2(3y-10)$

e) $\dfrac{(5x-y)^2}{7-5x}-\dfrac{4x^2-y^2}{y-2x}+\dfrac{49x^2-14x+1}{1-7x}$ ➪ ***Rpta.*** $2y-10x+1$

f) $\dfrac{x^2+4xy+4y^2}{2y+x}-\dfrac{36-12x+x^2}{x-6}+\dfrac{121-y^2}{y-11}$ ➪ ***Rpta.*** $3y+17$

g) $\dfrac{x^2+20x+100}{x+10}-\dfrac{x^3+64}{x+4}+\dfrac{x^3-8}{x-2}$ ⇨ ***Rpta.*** $7x-2$

2.6.2 FACTORIZACIÓN DE UN TRINOMIO DE LA FORMA

$$x^2+bx+c$$

Todo trinomio cuadrado perfecto se descompone en un producto de dos factores binomios $(x+p)(x+q)$ en los cuales el primer término "x" es la raíz cuadrada del primer término del **T.C.P.** (ya ordenado) y los segundos términos "p" y "q" son aquellos cuya suma algebraica sea igual al coeficiente del segundo término del trinomio cuadrado perfecto y el producto de ellos, osea "p" y "q" sea el último término, llamado término independiente (c) .

En resumen: $x^2+bx+c=(x+p)(x+q)$ ***Siendo:*** $\begin{cases} p+q=b & \text{y} \\ p\cdot q=c \end{cases}$

Ejemplo 1: Factorizar el trinomio: $x^2+9x+14$

Resolución:

$x^2+9x+14=(x+p)(x+q)$ ➧ **Siendo:** $\begin{cases} ^{*}\ p+q=9 \\ ^{**}\ p\cdot q=14 \end{cases}$

Escribimos los pares de los factores positivos de **14** tenemos que:

$14=1\cdot 14$
$14=2\cdot 7$

de estos pares de factores debemos elegir uno de los que cumpla la condición que: $\mathbf{p+q=9}$; este par como puede observarse, es el formado por los números **2 y 7**.

Luego: $x^2+9x+14=(x+2)(x+7)$

Ejemplo 2: Factorizar: $x^2+10x+24$

Resolución:

$x^2+10x+14=(x+p)(x+q)$ ➧ **Siendo:** $\begin{cases} ^{*}\ p+q=9 \\ ^{**}\ p\cdot q=14 \end{cases}$

Escribimos los pares de los factores positivos de **24** tenemos que:

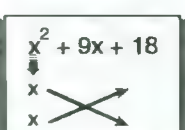
$24=1\cdot 24$
$24=2\cdot 12$
$24=3\cdot 8$
$24=4\cdot 6$

de estos pares de factores debemos elegir uno de los que cumpla la condición que: $\mathbf{p+q=10}$; este par como puede observarse, es el formado por los números **4 y 6**.

Luego: $x^2 + 10x + 24 = (x + 4)(x + 6)$

> ***Nota:***
>
> ***El proceso seguido en cad factorización anterior sobre trinomios cuadrados perfectos, se puede efectuar aplicando el método del aspa.***

Método del Aspa:



1º Se descompone el primer término del trinomio ($\mathbf{x^2}$) en dos factores. De cada factor sale una flecha y forma una equis (⤫)

2º Se descompone el término independiente (**18**) en dos factores, a estos factores llegan las flechas, para determinar el signo de dichos factores basta fijarse en el signo del segundo término del trinomio. Si el signo del segundo término es positivo los dos factores binomios son dos sumas y el signo del segundo, término es negativo, los dos factores binomios son dos diferencias. Ahora si el tercer término (término independiente) es negativo., los factores binomios serán uno suma y el otro diferencia. (Se coloca el signo del segundo término al mayor producto obtenido al multiplicar el aspa).

3º Por último se multiplican los factores obtenidos como indican las flechas. Si esta suma es igual al segundo término del trinomio entonces termina la factorización y los factores que correspondan al trinomio son los binomios considerados en su posición horizontal, (En caso que la suma es diferente al segundo término el trinomio , se ensaya por otros factores).

$x^2 + 9x + 18$

x	$+3$	$\Rightarrow$	$+3x$
x	$+6$	$\Rightarrow$	$+6x$
		+	$+9x$

$x^2 + 9x + 18 = (x + 3)(x + 6)$

Ejemplo 2: Factorizar: $x^2 - 7x + 12$

Resolución:

$x^2 - 7x + 12$

x	-6	$\Rightarrow$	$-6x$
x	-2	$\Rightarrow$	$-2x$
		+	$-8x$ **(No cumple)**

$\therefore$ $x^2 - 7x + 12 = (x - 6)(x - 2)$

$x^2 - 7x + 12$

x	-3	$\Rightarrow$	$-3x$
x	-4	$\Rightarrow$	$-4x$
		+	$-7x$ **(Si cumple)**

$\therefore$ $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$

Ejemplo 3: Factorizar: $x^2 - 6x - 16$

Resolución:

$$\begin{array}{lll} x^2 - 6x - 16 & & \\ x \quad +8 & \Rightarrow & +8x \\ x \quad -2 & \Rightarrow & \underline{-2x} \\ & & +6x \text{ (No cumple)} \end{array}$$

*** Como se obsevará:** $+6x \neq -6x$

$$\therefore \quad x^2 - 6x - 16 \neq (x+8)(x-2)$$

$$\begin{array}{lll} x^2 - 6x - 16 & & \\ x \quad -8 & \Rightarrow & -8x \\ x \quad +2 & \Rightarrow & \underline{+2x} \\ & & -6x \text{ (Si cumple)} \end{array}$$

$$\therefore \quad x^2 - 6x - 16 = (x-8)(x+2)$$

Ejemplo 4: Factorizar: $a^4 - 16a^2 + 64$

Resolución:

$$\begin{array}{lll} a^4 - 16a^2 + 64 & & \\ a^2 \quad -16 & \Rightarrow & -16a^2 \\ a^2 \quad -4 & \Rightarrow & \underline{-4a^2} \\ & & -20a^2 \text{ (No cumple)} \end{array}$$

$$\therefore \quad a^4 - 16a^2 + 64 \neq (a^2 - 16)(a^2 - 4)$$

$$\begin{array}{lll} a^4 - 16a^2 + 64 & & \\ a^2 \quad -8 & \Rightarrow & -8a^2 \\ a^2 \quad -8 & \Rightarrow & \underline{-8a^2} \\ & & -16a^2 \text{ (Si cumple)} \end{array}$$

$$\therefore \quad a^4 - 16a^2 + 64 = (a^2 - 8)(a^2 - 8)$$

Ejemplo 5: Factorizar: $x^{2n} + 2x^n - 15$

Resolución:

$$\begin{array}{lll} x^{2n} + 2x^n - 15 & & \\ x^n \quad +1 & \Rightarrow & +1x^n \\ x^n \quad -15 & \Rightarrow & \underline{-15x^n} \\ & & -14x^n \text{ (No cumple)} \end{array}$$

$$\therefore \quad x^{2n} + 2x^n - 15 \neq (x^n + 1)(x^n - 15)$$

$$\begin{array}{lll} x^{2n} + 2x^n - 15 & & \\ x^n \quad +5 & \Rightarrow & +5x^n \\ x^n \quad -3 & \Rightarrow & \underline{-3x^n} \\ & & +2x^n \text{ (Si cumple)} \end{array}$$

$$\therefore \quad x^{2n} + 2x^n - 15 = (x^n + 5)(x^n - 3)$$

Ejemplo 6: Factorizar: $x^2 + (2a + b)x + 2ab$

Resolución:

$$\begin{array}{lll} x^2 + (2a+b)x + 2ab & & \\ x \quad +2a & \Rightarrow & +2ax \\ x \quad +b & \Rightarrow & \underline{+bx} \\ & & +(2a+b)x \text{ (Si cumple)} \end{array}$$

$$\therefore \quad x^2 + (2a + b)x + 2ab = (x + 2a)(x + b)$$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 23

1. Hallar dos números cuya suma y producto sean respectivamente los que dan cada ejercicio siguiente:

a) 6 y 8

Resolución:

Buscamos dos números que sumados den **6** y multiplicados den **8**; estos números son: **2** y **4**

Verificación:	**Suma:** $2 + 4 = 6$	**Producto:** $2 \times 4 = 8$

b) 12 y 35	c) 10 y 24	d) 13 y 40	e) 17 y 72
f) 5 y –24	g) 7 y –18	h) 1 y –42	i) –4 y –60
j) –5 y –24	k) –2 y –48	l) –6 y –72	m) –15 y 36
n) 6 y –112	o) –8 y –65	p) –12 y 32	q) 4 y –77

2. Factorizar cada uno de los trinomios siguientes:

a) $x^2 + 11x + 24 =$	b) $x^2 + 13x + 22 =$
c) $x^2 + 9x + 20 =$	d) $x^2 + 14x + 13 =$
e) $x^2 + 15x + 54 =$	f) $x^2 + 16x + 28 =$
g) $x^2 + 2x - 8 =$	h) $x^2 + 5x - 24 =$
i) $x^2 + 8x - 48 =$	j) $x^2 + 5x - 16 =$
k) $x^2 + 6x - 72 =$	l) $x^2 + 5x - 36 =$
m) $x^2 + 13x - 48 =$	n) $x^2 + 6x - 40 =$
o) $x^2 - 14x - 32 = 0$	p) $x^2 - 7x - 44 = 0$
q) $x^2 - 11x - 132 =$	r) $x^2 - 12x - 64 =$
s) $x^2 - 15x + 56 =$	t) $x^2 - 13x + 40 =$
u) $x^2 + 5x - 36 =$	v) $x^2 + 6x - 72 =$
w) $x^2 + 13x - 68 =$	z) $x^2 - 12x - 45 =$

3. Factorizar cada uno de los trinomios siguientes:

a) $x^2 + 24 - 11x =$	b) $x^2 - 21 + 4x =$
c) $x^2 - 8x - 48 =$	d) $x^2 - 70 - 3x =$

e) $x^2 - 5x - 104 =$	f) $x^2 + 42 - 13x =$
g) $x^2 - 20 + 8x =$	h) $x^2 - 99 + 2x =$
i) $x^2 - 27 + 6x =$	j) $x^2 - 128 - 8x =$
k) $x^2 + 121 + 22x =$	l) $x^2 - 56 - x =$
m) $x^2 - 72 + 14x =$	n) $x^2 + 126 - 23x =$
o) $x^2 - 96 + 10x =$	

4. Factorizar los siguientes trinomios cuadrados perfectos:

a) $x^8 - 3x^4 - 18 =$	b) $x^6 - 5x^3 - 14 =$
c) $x^{10} + 9x^5 + 8 =$	d) $(ax)^2 - 3ax - 18 =$
e) $a^{4n} + 5a^{2n} - 6=$	f) $x^6 + 2x^3 - 24 =$
g) $x^8 - 3x^4 - 40 =$	h) $x^{12} - 7x^6 - 44 =$
i) $x^{16} - 15x^8 + 26 =$	j) $a^{6n} + 2a^{3n} - 24 =$
k) $x^{2n} + 3x^n - 54 =$	l) $x^4 + 9x^2 - 52 =$
m) $x^6 + 10x^3 + 16 =$	n) $x^{18} + x^9 - 30 =$
o) $x^{20} - 20x^{10} + 91 =$	p) $x^{2n} - 12x^n + 36 =$

5. Factorizar los siguientes trinomios cuadrados perfectos:

a) $(x+2)^2 + 12(x+2) + 27 =$	b) $(x-3)^2 + 3(x-3) - 28 =$
c) $(x-y)^2 - 7(x-y) - 18 =$	d) $(x-1)^2 + 13(x-1) + 36 =$
e) $x^2 + (3a-2b)x - 6ab =$	f) $(x+5)^2 + (x+5) - 72 =$
g) $(x-7)^2 + 7(x-7) + 6 =$	h) $(x+3y)^2 + 4(x+3y) - 21 =$
i) $x^2 - (a-5b)x - 5ab =$	j) $(x+4)^2 + 2(x+4) - 3 =$

2.6.3 FACTORIZACIÓN DE UN TRINOMIO DE LA FORMA:

$$ax^2 + bx + c\ ;\ (a \neq 1)$$

Cuando el coeficiente del primer término de un trinomio cuadrado perfecto no es la unidad para factorizar dichos trinomios perfectos se emplea el siguiente desarrollo.

Ejemplo 1: Factorizar: $2x^2 + 7x + 6$

Resolución:

Para factorizar, se hará como sigue:

1º) Se multiplica todo el trinomio por el coeficiente del primer término indicando dicha multiplicación en el segundo térimino, para conservar su coeficiente.

Osea:

Siendo: $2x^2 + 7x + 6$; se multiplica cada término por 2; obteniendo:

$$2 \cdot 2x^2 + 2 \cdot 7x + 2 \cdot 6$$
$$4x^2 + 2.7x + 12$$

2º) Se extrae la raíz cuadrada del primer término de esta última expresión lo cual nos servirá como primer témino de los dos factores binomios.

Osea: $\sqrt{4x^2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{x^2} = 2x$

3º) Se buscan dos números tales que multiplicados den el tercer término ya multiplicado y cuya suma sea el coeficiente no multiplicado del segundo miembro.

Producto = 12 = 4.3
Suma = 7 = 4 + 3

4º) Se forman los dos factores binomios con los términos así encontrados; osea con la raíz cuadrada como primer término de cada uno de los binomios y con los números encontrados como los segundos términos.

$$(2x + 4)(3x + 3)$$

5º) Se divide el producto indicado de dichos factores binomios entre el coeficiente del primer término para anular la multiplicación anterior:

$$\frac{(2x+4)(2x+3)}{2}$$; para lo cual

6º) Se extrae factor común en uno o en los dos factores binomios; según el caso; para la simplificación:

$$\frac{\cancel{2}(x+2)(2x+3)}{\cancel{2}}$$

7º) Se simplifica, el producto de los dos factores binomios que queda en la factorización del trinomio, es :

$$2x^2 + 7x + 6 = (x + 2)(2x + 3)$$

**** Otra forma:***

De factorizar estos trinomios es utilizando el **Método del aspa** estudiado en el caso anterior.

$2x^2 + 7x + 6$

$2x$	$+3$	$\Rightarrow$	$+3x$
x	$+2$	$\Rightarrow$	$+4x$
			$+7x$

$\therefore \quad 2x^2 + 7x + 6 = (2x + 3)(x + 2)$

Ejemplo 2: Factorizar: $3x^2 - 10x - 8$

Metodo: Multiplicando y dividiendo por el coeficiente del primer término.

1º) Multiplicamos por 3

$$3(3x^2) - 3(10x) - 3(8)$$
$$(3x)^2 - 10(3x) - 24$$

2º) Factorizando, obtenemos:

$$(3x)^2 - 10(3x) - 24 = (3x - 12)(3x + 2)$$

3º) Dividimos entre 3

$\dfrac{(3x-12)(3x+2)}{3}$; sacamos factor común "**3**" del primer paréntesis

$\dfrac{3(x-4)(3x+2)}{3}$ ➧ **Simplificando queda:** $(x - 4)(3x + 2)$

$$\therefore \; 3x^2 - 10x - 8 = (x - 4)(3x + 2)$$

Método del aspa:

$3x^2 - 10x - 8$

$3x \quad +2 \Rightarrow +2x$

$x \quad -4 \Rightarrow -12x$

$-10x$ ➧ $\therefore \; 3x^2 - 10x - 8 = (3x + 2)(x - 4)$

Ejemplo 3: Factorizar: $5x^2 - 17x - 12$

Resolución:

$5x^2 - 17x - 12$

$5x \quad +3 \Rightarrow +3x$

$x \quad -4 \Rightarrow -20x$

$-17x$ ➧ $\therefore \; 5x^2 - 17x - 12 = (5x + 3)(x - 4)$

Ejemplo 4: Factorizar: $3x^2 + 23x - 36$

Resolución:

$3x^2 + 23x - 36$

$3x \quad -4 \Rightarrow -4x$

$x \quad +9 \Rightarrow +27x$

$+23x$ ➧ $\therefore \; 3x^2 + 23x - 36 = (3x - 4)(x + 9)$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 24

1. Factoriza cada uno de los trinomios siguientes:

a) $2x^2 + x - 10 =$
b) $2x^2 + 13x - 24 =$
c) $3x^2 + 14x + 8 =$
d) $3x^2 + 35x - 12 =$
e) $4x^2 - 5x - 21 =$
f) $2x^2 + 5x - 3 =$
g) $5x^2 - 28x - 12 =$
h) $4x^2 + 25x + 6 =$
i) $3x^2 + 2x - 1 =$
j) $2x^2 - x - 15 =$
k) $5x^2 + 31x + 6 =$
l) $4x^2 + 5x - 21 =$
m) $6x^2 + 7x - 3 =$
n) $10x^2 + 17x + 6 =$
o) $4x^2 + 8x - 21 =$

2. Factoriza cada uno de los trinomios siguientes:

a) $3x^2 - 2 - 5x =$
b) $2x^2 - 18 - 9x =$
c) $4x^2 - 3 - 11x =$
d) $5x^2 - 4 - 8x =$
e) $2x^2 - 7 - 5x =$
f) $6x^2 + 3 + 19x =$
g) $8x^2 - 10 - 11x =$
h) $4x^2 + 3 + 13x =$
i) $7x^2 - 6 - 19x =$
j) $2x^2 - 54 - 3x =$
k) $3x^2 - 32 - 4x =$
l) $5x^2 - 16 - 38x =$
m) $6x^2 - 2 - x =$
n) $10x^2 - 3 - 13x =$
o) $12x^2 - 2 + 5x =$

Nota : *Para factorizar completamente un polinomio real en "x", se aconseja a seguir los pasos siguientes:*

1. *Analizar si tiene un factor común monomio.*
2. *Determinar si es una diferencia de cuadrados, una diferencia de cubos o una suma de cubos.*
3. *Analizar si es un trinomio cuadrado perfecto.*
4. *Si no es un trinomio cuadrado perfecto, determinar si es de la forma:* $x^2 + bx + c$ *; ó de la forma:* $ax^2 + bx + c$ *; siendo* $a \neq 1$
5. *Si el polinomio tiene cuatro o más términos determinar si es posible agrupar sus términos de modo que tengan un factor común.*
6. *Asegurarse que cada factor es primo, y luego comprobar el trabajo realizado multiplicando los factores.*

Polinomio Primo

Es aquel polinomio irreducible o no factorizable cuyo coeficiente principal es 1.

Ejemplo: $x + 7$; es un polinomio primo

Coeficiente principal es 1

> *Si un polinomio se expresa como el producto de sus factores primos entonces se dice que el polinomio está completamente factorizado.*

Ejemplo 1: Factorizar: $x^2 - 49$

Resolución:

$$x^2 - 49 = x^2 - 7^2 = (x + 7)(x - 7)$$

Cada uno de los factores: $(x + 7)$ y $(x - 7)$; es primo.

Coeficiente principal es 1

Ejemplo 2: Factorizar: $4x^2 - 25$

Resolución:

$$4x^2 - 25 = (2x)^2 - (5)^2 = (2x + 5)(2x - 5)$$

Los factores: $(2x + 5)$ y $(2x - 5)$ son irreducibles pero **no primos.**

Ahora, para convertir dichos factores:

$(2x + 5)$ y $(2x - 5)$ en primos se procede a escribir el **5** como: $\frac{2 \cdot 5}{2}$

Luego:

$$4x^2 - 25 = (2x)^2 - (5)^2 = (2x + 5)(2x - 5) = \left(2x + \frac{2 \cdot 5}{2}\right)\left(2x - \frac{2 \cdot 5}{2}\right)$$

$$= (2x + 5)(2x - 5) = 2\left(x + \frac{5}{2}\right) \cdot 2\left(x - \frac{5}{2}\right)$$

$$\therefore \quad 4x^2 - 25 = 4\left(x + \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right)$$

(El polinomio: $4x^2 - 25$; ha quedado factorizado en sus factores primos.)

Número Real (4)

Factor Primo $\left(x + \frac{5}{2}\right)$

Factor Primo $\left(x - \frac{5}{2}\right)$

Ejemplo 3: Factorizar completamente: $5x^3 - 180x$

Resolución:

* Factorizamos primero, sacando el factor común monomio "5x" ; así:

$$5x^3 - 180x = 5x \cdot x^2 - 5x \cdot 36 = 5x(x^2 - 36)$$

$$= 5x(x^2 - 6^2) \Rightarrow \boxed{\text{Diferencia de cuadrados}}$$

$\therefore$ $\boxed{5x^3 - 180x = 5x(x+6)(x-6)}$

Ejemplo 4: Factorizar completamente: $3x^4 - 192x$

Resolución:

* Factorizamos primero, sacando el factor común monomio "3x" ; así:

$$3x^4 - 192x = 3x \cdot x^3 - 3x \cdot 64 = 3x(x^3 - 64)$$

$$= 3x(x^3 - 4^3) \Rightarrow \boxed{\text{Diferencia de cubos}}$$

$$= 3x(x-4)(x^2 + 4x + 4^2)$$

$\therefore$ $\boxed{3x^4 - 192x = 3x(x-4)(x^2 + 4x + 16)}$

Ejemplo 5: Factorizar: $8x^2 - 8a^2 - 16x - 16a$

Resolución:

* Factorizamos los términos de la manera siguiente:

$$8x^2 - 8a^2 - 16x - 16a = (8x^2 - 8a^2) - (16x + 16a)$$

Sacamos factor común "16"

Sacamos factor común "8"

$$= 8(x^2 - a^2) - 16(x + a)$$

Diferencia de cuadrados

$$= 8(x+a)(x-a) - 16(x+a)$$

Sacamos factor común "8(x + a)"

$$= 8(x+a)[(x-a) - 2]$$

$\therefore$ $\boxed{8x^2 - 8a^2 - 16x - 16a = 8(x+a)(x-a-2)}$

Ejemplo 6: Factorizar: $3x^8y - 3y^9$

Resolución:

* Factorizamos primero, sacando el factor común monomio: "3y"; así:

$$3x^8y - 3y^9 = 3y(x^8 - y^8) = 3y(\quad + \quad)(\quad - \quad)$$

→ Extraemos $\sqrt{\ }$: $\sqrt{y^8} = y^4$

→ Extraemos $\sqrt{\ }$: $\sqrt{x^8} = x^4$

$$3x^8y - 3y^9 = 3y(x^4 + y^4)(x^4 - y^4)$$

→ Extraemos $\sqrt{\ }$: $\sqrt{y^4} = y^2$

→ Extraemos $\sqrt{\ }$: $\sqrt{x^4} = x^2$

$$= 3y(x^4 + y^4)(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$$

$$= 3y(x^4 + y^4)(x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$$

$$\therefore \quad \boxed{3x^8y - 3y^8 = 3y(x^4 + y^4)(x^2 + y^2)(x + y)(x - y)}$$

Ejemplo 7: Factorizar: $ax^2 - 5ax - 24a$

Resolución:

* Factorizamos primero; sacando el factor común "a"; así:

$$ax^2 + 5ax - 24a = a(x^2 - 5x - 24) = a(x - 8)(x + 3)$$

$$\begin{array}{ccccc} x & \searrow\!\!\!\!\nearrow & -8 & \Rightarrow & -8x \\ x & & +3 & \Rightarrow & +3x \\ & & & & \overline{-5x} \end{array} \; +$$

$$\therefore \quad \boxed{ax^2 - 5ax - 24a = a(x - 8)(x + 3)}$$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 25

1. Factoriza completamente cada uno de los polinomios siguientes:

a) $4xy^3 - 4xy$	b) $6a^3 + 6$	c) $x^8 - 16a^2x^2$
d) $x^4 - 81y^4$	e) $3ax^2 + 15ax + 18a$	f) $x^4 - (3y - 1)^4$
g) $9 - x^2 - 2ax - a^2$	h) $(x - y)^2 - 1$	i) $(a^2 - 1)x - (a - 1)y$
j) $(a^3 - 1)x - (a^2 + a + 1)y$	k) $(a + b)^3 + 1$	l) $x^2 + 6x + 9 - y^2$
m) $(x - 2)^2 - (y + 3)^2$	n) $ax^{2n} - a - x^n + 1$	o) $(x + y)^2 - (2x - y)^2$

2. Factoriza completamente cada uno de los polinomios siguientes:

a) $x^6 - 1$

b) $x^8 - y^8$

c) $4x^4 - 36y^4$

d) $x^5 - x$

e) $3ax^3 - 3ay^3$

f) $x^5 - xy^4 + x^4y - y^5$

g) $(2x-3)^2 - (3x-1)^2$

h) $x^2 + y^2 + 2xy - z^4$

i) $\frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{3}ax$

j) $x^4 - y^4 - 3x^2 + 3y^2$

k) $x^3 + x^2z - x^2 + xz - 2x + 2z$

l) $\frac{1}{5}ax^4 - \frac{1}{5}a$

m) $x^3 - x^2 - 16x + 16$

n) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18$

o) $x^2y - 3x^2 + xy - 3x - 2y + 6$

RESPUESTAS TALLER 25

1.

a) $4xy(y+1)(y-1)$

b) $6(a+1)(a^2-a+1)$

c) $x^2(x^3+4a)(x^3-4a)$

d) $(x^2+9y^2)(x+3y)(x-3y)$

e) $3a(x+2)(x+3)$

f) $[x^2+(3y-1)^2](x+3y-1)(x-3y+1)$

g) $(3+x+a)(3-x-a)$

h) $(x \boxtimes y+1)(x \boxtimes y \boxtimes 1)$

i) $(a-1)[(a+1)x-y]$

j) $(a^2+a+1)[(a \boxtimes 1)x \boxtimes y]$

k) $(a+b+1)[(a+b)^2-(a+b)+1]$

l) $(x+y+3)(x \boxtimes y+3)$

m) $(x+y+1)(x-y-5)$

n) $(x^n \boxtimes 1)[a(x^n+1) \boxtimes 1]$

o) $3x(2y-x)$

2.

a) $(x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

b) $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$

c) $4(x+\sqrt{3}\,y)(x-\sqrt{3}\,y)(x^2+3y^2)$

d) $x(x+1)(x-1)(x^2+1)$

e) $3a(x-y)(x^2+xy+y^2)$

f) $(x-y)(x+y)^2(x^2+y^2)$

g) $(x+2)(4-5x)$

h) $(x+y+z^2)(x+y-z^2)$

i) $\frac{1}{3}ax(x+1)(x-1)$

j) $(x+y)(x-y)(x^2+y^2-3)$

k) $(x-2)(x+1)(x-z)$

l) $\frac{1}{5}a(x+1)(x-1)(x^2+1)$

m) $(x-1)(x+4)(x-4)$

n) $(x-3)(x+2)(x+3)$

o) $(y-3)(x+2)(x-1)$

2.6.4 FACTORIZACIÓN DE UN TRINOMIO CUADRADO PERFECTO POR SUMA Y RESTA (QUITA Y PON)

Se basa en el siguiente principio: Si a una expresión se le suma y resta una misma expresión, la expresión inicial no varía.

Ejemplo 1: Factorizar: $x^4 + 4y^4$

Resolución:

1) Extraemos las raíces cuadradas de cada término así:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x^4} = \boxed{x^2} \\ \sqrt{4y^4} = \boxed{2y^2}\end{array}\right\}$$ Doble producto de las raíces halladas sería: $2(x^2)(2y^2) = 4x^2y^2$

2) Sumamos y restamos este doble producto para completar el trinomio cuadrado perfecto **(T.C.P)** y además obtener una diferencia de cuadrados.

Así: $$x^4 + 4y^4 = \underbrace{x^4 + \boxed{4x^2y^2} + 4y^4}_{\text{T.C.P}} - \boxed{4x^2y^2}$$

$$x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2$$; **por diferencia de cuadrados**

$$= [(x^2 + 2y^2) + (2xy)][(x^2 + 2y^2) - (2xy)]$$

$$\therefore \boxed{x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy)}$$

Ejemplo 2: Factorizar: $x^4 + 2x^2 + 9$

Resolución:

1) Extraemos las raíces cuadradas de los términos extremos, así:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x^4} = \boxed{x^2} \\ \sqrt{9} = \boxed{3}\end{array}\right\}$$ Doble producto de las raíces halladas sería: $2(x^2)(3) = 6x^2$

2) Como en la expresión: $\mathbf{x^4 + 2x^2 + 9}$; hay $\mathbf{2x^2}$, bastará sumar y restar: $\mathbf{4x^2}$ para así completar los $\mathbf{6x^2}$

Así: $$x^4 + 2x^2 + 9 = x^4 + 2x^2 + 4x^2 + 9 - 4x^2$$

$$x^4 + 2x^2 + 9 = \underbrace{x^4 + 6x^2 + 9}_{\text{T.C.P}} - 4x^2$$

$$x^4 + 2x^2 + 9 = (x^2 + 3)^2 - (2x)^2$$; **por diferencia de cuadrados**

$$x^4 + 2x^2 + 9 = [(x^2 + 3) + (2x)][(x^2 + 3) - (2x)]$$

$$\therefore \quad \boxed{x^4 + 2x^2 + 9 = (x^2 + 2x + 3)(x^2 - 2x + 3)}$$

Ejemplo 3: Factorizar: $x^4 + x^2 + 1$

Resolución:

En este caso los 3 términos son cuadrados perfectos, de modo que al escoger lo hacemos convenientemente:

1) Extraemos las raíces cuadradas de los términos extremos, así:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x^4} = \boxed{x^2} \\ \sqrt{1} = \boxed{1}\end{array}\right\}$$ Doble producto de las raíces halladas sería: $2(x^2)(1) = 2x^2$

2) Como en la expresión: $\mathbf{x^4 + x^2 + 1}$; tiene $\mathbf{x^2}$; bastará sumar: $\mathbf{x^2}$ para completar así los $\mathbf{2x^2}$ (Lógicamente también restamos)

Así: $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + x^2 + x^2 + 1 - x^2$

$$x^4 + x^2 + 1 = \underbrace{(x^4 + 2x^2 + 1)}_{\text{T.C.P}} - x^2$$

$= (x^2 + 1)^2 - x^2$; por **diferencia de cuadrados**

$= [(x^2 + 1) + x][(x^2 + 1) - x]$

$$\therefore \quad \boxed{x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)}$$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 26

1. Factorizar los polinomios siguientes:

a) $4x^4 + y^4$	b) $4a^4 + 81$	c) $a^4 + a^2b^2 + b^4$
d) $4m^4 + 3m^2 + 9$	e) $16x^4 + 4x^2 + 1$	f) $4x^4 + 3x^2 + 1$
g) $36m^4 + 15m^2n^2 + 4n^4$	h) $9x^4 + 2x^2 + 1$	i) $9x^4 + 8x^2y^2 + 4y^4$

RESPUESTAS TALLER 26

1.

a) $(2x^2 + y^2 + 2xy)(2x^2 + y^2 - 2xy)$	b) $(2a^2 + 6a + 9)(2a^2 - 6a + 9)$
c) $(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$	d) $(2m^2 + 3m + 3)(2m^2 - 3m + 3)$
e) $(4x^2 + 2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)$	f) $(2x^2 + x + 1)(2x^2 - x + 1)$
g) $(6m^2 + 3mn + 2n^2)(6m^2 - 3mn + 2n^2)$	h) $(3x^2 + 2x + 1)(3x^2 - 2x + 1)$
i) $(3x^2 + 2y^2 + 2xy)(3x^2 + 2y^2 - 2xy)$	

2.6.5 FACTORIZACIÓN EMPLEANDO ASPA DOBLE

Sirve para factorizar expresiones de la forma:

$$ax^{2m} + bx^{m}y^{n} + cy^{2n} + dx^{m} + ey^{n} + f$$

Ejemplo 1: Factorizar: $6x^2 + 3xy - 3y^2 + 19x + 13y + 10$

Resolución:

$$6x^2 + 3xy - 3y^2 + 19x + 13y + 10$$

$2x$	$-y$	$+5$
$3x$	$+3y$	$+2$

Comprobación:

Aspa Izquierda	Aspa Derecha	Aspa Punteda
$3x(-y) = -3xy$ $2x(3y) = +6xy$ } + $+3xy$ (Correcto)	$-y(2) = -2y$ $+3y(5) = +15y$ } + $+13y$ (Correcto)	$2x(2) = 4x$ $3x(5) = 15x$ } + $+19x$ (Correcto)

Luego: $6x^2 + 3xy - 3y^2 + 19x + 13y + 10 = (2x - y + 5)(3x + 3y + 2)$

Ejemplo 2: Factorizar: $15x^2 - 3y - 2y^2 + 7xy + 41x + 14$

Resolución:

Ordenando adecuadamente, obtenemos:

$$15x^2 - 3y - 2y^2 + 7xy + 41x + 14 = 15x^2 + 7xy - 2y^2 + 41x - 3y + 14$$

$5x$	$-y$	$+2$
$3x$	$+2y$	$+7$

Comprobación:

Aspa Izquierda	Aspa Derecha	Aspa Punteda
$5x(2y) = +10xy$ $3x(-y) = -3xy$ } + $+7xy$ (Correcto)	$-y(7) = -7y$ $+2y(2) = +4y$ } + $-3y$ (Correcto)	$5x(7) = +35x$ $3x(2) = +6x$ } + $+41x$ (Correcto)

Luego: $15x^2 - 3y - 2y^2 + 7xy + 41x + 14 = (5x - y + 2)(3x + 2y + 7)$

Ejemplo 3: Factorizar: $8x^2 + 4xy + 18x + 6y + 9$

Completamos con $\mathbf{0y^2}$ para aplicar **el Aspa Doble**:

$$8x^2 + 4xy + 18x + 6y + 9 = 8x^2 + 4xy + 0y^2 + 18x + 6y + 9$$

$$\begin{array}{ccccc} 4x & & 2y & & +3 \\ 2x & & 0y & & +3 \end{array}$$

Comprobación:

Aspa Izquierda	Aspa Derecha	Aspa Punteda
$4x(0y) = 0$ $2x(2y) = +4xy$ } + $+4xy$ **(Correcto)**	$+2y(3) = +6y$ $+0y(3) = 0$ } + $+6y$ **(Correcto)**	$4x(+3) = +12x$ $2x(+3) = +6x$ } + $+18x$ **(Correcto)**

Luego: $8x^2 + 4xy + 18x + 6y + 9 = (4x + 2y + 3)(2x + 3)$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 27

1. Factorizar los polinomios siguientes:

a) $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y - 63$	b) $15x^2 - 19xy + 6y^2 - 11y + 19x - 10$
c) $12x^2 - 6y^2 - 6xy + 7y + 23x + 5$	d) $6x^2 + 12 + 10y^2 - 23y - 16xy + 17x$
e) $7x^2 + 19xy - 6y^2 + 35x - 10y$	f) $15x^2 - 2y + 6xy - 2x - 1$
g) $8x^2 + 6xy + 24x - 9y^2 - 9y + 10$	h) $15x^2 + 6xy + 38x + 8y + 24$

RESPUESTAS TALLER 27

1. a) $(x + y - 9)(x + y + 7)$	b) $(5x - 3y - 2)(3x - 2y + 5)$
c) $(4x + 2y + 1)(3x - 3y + 5)$	d) $(3x - 5y + 4)(2x - 2y + 3)$
e) $(x+3y + 5)(7x - 2y)$	f) $(3x - 1)(5x + 2y + 1)$
g) $(4x - 3y + 2)(2x + 3y + 5)$	h) $(3x + 4)(5x + 2y + 6)$

2.7 FACTORIZACIÓN EMPLEANDO EL MÉTODO DE LOS DIVISORES BINOMIOS

Este método se emplea para factorizar polinomios de una sola variable y de cualquier grado, cuya única condición fundamental es que acepten al menos un factor de primer grado.

Determinación de los posibles ceros de un polinomio:

* Si el polinomio tiene como primer coeficiente la unidad los posibles ceros, estarán dados por los divisores del término independiente con su doble signo.

Ejemplo: Si: $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

Sus posibles ceros del polinomio estarán dados por los divisores del término independiente **6**, siendo dichos divisores: **±1 ; ±2 ; ±3 ; y ±6**.

Evaluando:

- Para: $\boxed{x = 1}$ $\Rightarrow$ $P(1) = (1)^3 + 2(1)^2 - 5(1) - 6$

$P(1) = 1 + 2 - 5 - 6 = \boxed{-8 \neq 0}$

- Para: $\boxed{x = -1}$ $\Rightarrow$ $P(-1) = (-1)^3 + 2(-1)^2 - 5(-1) - 6$

$P(-1) = -1 + 2 + 5 - 6 = 0$

Como: $\boxed{x = -1}$; anula al polinomio P(x), entonces: **x = –1** lo igualamos a cero;

Osea: $x + 1 = 0$; siendo "(x + 1)" un factor del polinomio P(x).

- Para: $x = 2$ $\Rightarrow$ $P(2) = (2)^3 + 2(2)^2 - 5(2) - 6$

$P(2) = 8 + 8 - 10 - 6 = 0$

Como: $\boxed{x = 2}$; anula al polinomio P(x), entonces: **x = 2** lo igualamos a cero,

Osea: $x - 2 = 0$; siendo "(x – 2)" un factor del polinomio P(x).

- Para: $\boxed{x = -2}$ $\Rightarrow$ $P(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 - 5(-2) - 6$

$P(-2) = -8 + 8 + 10 - 6 = \boxed{4 \neq 0}$

- Para: $\boxed{x = 3}$ $\Rightarrow$ $P(3) = (3)^3 + 2(3)^2 - 5(3) - 6$

$P(3) = 27 + 18 - 15 - 6 = \boxed{24 \neq 0}$

- Para: $\boxed{x = -3}$ $\Rightarrow$ $P(-3) = (-3)^3 + 2(-3)^2 - 5(-3) - 6$

$P(-3) = -27 + 18 + 15 - 6 = 0$

Como: $\boxed{x = -3}$; anula al polinomio P(x), entonces: **x = –3**, lo igualamos a cero,

Osea: $x + 3 = 0$; siendo "(x + 3)" un factor del polinomio P(x)

- Para: $\boxed{x = 6}$ $\Rightarrow$ $P(6) = (6)^3 + 2(6)^2 - 5(6) - 6 = \boxed{252 \neq 0}$

- Para: $\boxed{x = -6}$ $\Rightarrow$ $P(-6) = (-6)^3 + 2(-6)^2 - 5(-6) - 6 = \boxed{-180 \neq 0}$

Luego, los factores del polinomio:

$P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ son: "(x + 1)" ; "(x – 2)" y "(x + 3)"

$$\therefore \boxed{P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x+1)(x-2)(x+3)}$$

- Si el primer coeficiente del polinomio es diferente de la unidad, los posibles ceros estarán expresados por:

$$\text{Posibles ceros} = \frac{\text{Divisores del término independiente}}{\text{Divisores del término de mayor grado}}$$

Ejemplo: Si: $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$

Término independiente (2)

Coeficiente del término de mayor grado (2)

$$\text{Posibles ceros} = \pm\frac{1\ ;\ 2}{1\ ;\ 2} = \pm 1 ; \pm\frac{1}{2} ; \pm 2$$

Nota:

Para hallar los posibles valores de los divisores de un Polinomio se toma un divisor del numerador y se les combina con los del denominador.

Procedimientos a seguir para factorizar:

1º Se determinan los ceros del polinomio

2º Se deduce el factor que dá lugar al cero del polinomio, mediante el siguiente teorema de la divisibilidad Algebraica: Si un polinomio P(x) se anula para x = a ó P(a) = 0, entonces dicho polinomio tendrá un factor (x – a).

3º El otro factor se determina utilizando la Regla de Ruffini, que se ha de emplear tantas veces como ceros tenga el polinomio, por lo general se recomienda llevarlo hasta un cociente adecuado (cuarto gardo, para poder aplicar el aspa doble especial o de segundo grado que es más sencillo de factorizar).

Ejemplo 1: Factorizar: $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$

Resolución:

$$\text{Posibles ceros} = \pm\frac{1\ ;\ 2}{1\ ;\ 2} = \pm 1 ; \pm\frac{1}{2} ; \pm 2$$

Evaluando:

- **Para:** $x = 1$ $\Rightarrow$ $P(1) = 2(1)^3 - 5(1)^2 + (1) + 2$

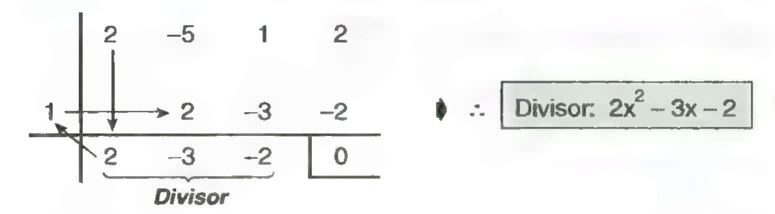
$P(1) = 2 - 5 + 1 + 2 = 0$

Como: $x = 1$; anula al polinomio P(x), entonces: $x = 1$, lo igualamos a cero,

Osea: $x - 1 = 0$; siendo "(x – 1)" un factor del polinomio P(x).

Luego, hallamos otro factor aplicando la Regla de Ruffini.

- Dividimos el polinomio: $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$ entre el factor hallado "(x – 1)".



Sabemos que:

Dividendo = divisor × cociente

$$2x^3 - 5x^2 + x + 2 = (2x^2 - 3x - 2)\cdot(x - 1)$$

$2x \quad 1$

$x \quad -2$

$$= (2x + 1)(x - 2)(x - 1)$$

$$\therefore \boxed{2x^3 - 5x^2 + x + 2 = (2x + 1)(x - 2)(x - 1)}$$

Ejemplo 2: Factorizar: $30x^3 + 19x^2 - 1$

Resolución:

$$\textit{Posibles ceros} = \pm\frac{1}{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 5\ ;\ 6\ ;\ 15\ ;\ 30} = \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{3}; \pm\frac{1}{5}; \pm\frac{1}{6}; \pm\frac{1}{15}; \pm\frac{1}{30}$$

Evaluando:

- **Para:** $x = 1$ $\Rightarrow$ $30(1)^3 + 19(1)^2 - 1 = 30 + 19 - 1 = \boxed{48 \neq 0}$

$\therefore$ (x – 1) no es factor del polinomio

- **Para:** $x = -1$ $\Rightarrow$ $= 30(-1)^3 + 19(-1)^2 - 1 = -30 + 19 - 1 = \boxed{-12 \neq 0}$

$\therefore$ (x + 1) no es factor del polinomio

- **Para:** $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow 30\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 19\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 30\left(\frac{-1}{8}\right) + 19\left(\frac{1}{4}\right) - 1$

$$\therefore \boxed{\left(x + \frac{1}{2}\right) \text{ si es un factor del polinomio}}$$

Luego, hallamos otro factor aplicando **La Regla de Ruffini:**

* **Dividimos el polinomio:**

$30x^3 + 19x^2 - 1$; entre el factor hallado $\left(x + \frac{1}{2}\right)$ ordenando y completando el polonomio dividiendo se obtiene:

$$\boxed{30x^3 + 19x^2 + 0x - 1}$$

	30	19	0	−1
$-\frac{1}{2}$		−15	−2	1
	30	4	−2	0

Divisor (30, 4, −2)

$\therefore$ $\boxed{\text{Divisor: } 30x^2 + 4x - 2}$

Sabemos que:

Dividendo = divisor × cociente

$$30x^3 + 19x^2 - 1 = (30x^2 + 4x - 2)\cdot\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Damos común denominador

Sacamos factor común 2

$$30x^3 + 19x^2 - 1 = 2(15x^2 + 2x - 1)\cdot\left(\frac{2x + 1}{2}\right)$$

$$\begin{array}{ccc} 3x & & +1 \\ 5x & & -1 \end{array}$$

$$\therefore \boxed{30x^3 + 19x^2 - 1 = (3x + 1)(5x - 1)(2x + 1)}$$

Ejemplo 3: Factorizar: $3x^4 + 2x^3 - x^2 + x + 1$

Resolución:

Posibles ceros $= \pm\dfrac{1}{1\;;\;3} = \pm 1; \pm\dfrac{1}{3}$

Evaluando:

- **Para:** $\boxed{x = 1}$ $\Rightarrow$ $3(1)^4 + 2(1)^3 - (1)^2 + (1) + 1 = 3 + 2 - 1 + 1 + 1 = 6 \neq 0$

$\therefore$ (x – 1) No es factor del polinomio.

- **Para:** $\boxed{x = -1}$ $\Rightarrow$ $3(-1)^4 + 2(-1)^3 - (-1)^2 + (-1) + 1 = 3 - 2 - 1 - 1 + 1 = 0$

$\therefore$ (x + 1) Si es factor del polinomio.

Luego, hallamos otro factor aplicando **La Regla de Ruffini.**

*** Dividimos el polinomio:**

$3x^4 + 2x^3 - x^2 + x + 1$; entre el factor hallado "(x + 1)"

	3	2	–1	1	1
–1		–3	1	0	–1
	3	–1	0	1	0

Divisor

$\therefore$ Divisor: $3x^3 - 1x^2 + 0x + 1 = 3x^3 - x^2 + 1$

Sabemos que:

Dividendo = divisor × cociente

$$3x^4 + 2x^3 - x^2 + x + 1 = (3x^3 - x^2 + 1)\cdot(x - 1)$$

$$\therefore\; 3x^4 + 2x^3 - x^2 + x + 1 = (3x^3 - x^2 + 1)(x - 1)$$

Ejemplo 4: Factorizar: $x^4 - 9x^2 + 4x + 12$

Resolución:

Posibles ceros $= \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 4;\ \pm 5;\ \pm 6;$ y ± 12

Evaluando:

- **Para:** $\boxed{x = 1}$ $\Rightarrow$ $(1)^4 - 9(1)^2 + 4(1) + 12 = 1 - 9 + 4 + 12 = 8 \neq 0$

- Para: $\boxed{x = -1} \Rightarrow \quad (-1)^4 - 9(-1)^2 + 4(-1) + 12 = 1 - 9 - 4 + 12 = 0$

$\therefore$ (x + 1) Si es factor del polinomio.

Luego, hallamos otro factor, del polinomio, aplicando **La Regla de Ruffini**

*** Dividimos el polinomio:**

$x^4 - 9x^2 + 4x + 12$; entre el factor hallado "(x + 1)" ordenando y completando el polinomio dividiendo se obtiene:

$$x^4 - 0x^3 - 9x^2 + 4x + 12$$

	1	0	–9	4	12
–1		–1	1	8	–12
	1	–1	–8	12	0

Divisor

$\therefore$ Divisor: $1x^3 - 1x^2 - 8x + 12 = x^3 - x^2 - 8x + 12$

Sabemos que:

Dividendo = divisor × cociente

$$x^4 - 9x^2 + 4x + 12 = (x^3 - x^2 - 8x + 12)\cdot(x + 1) \quad \text{.........} \ (\alpha)$$

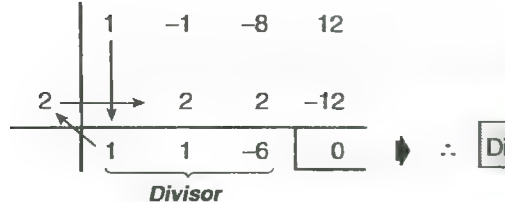
Este polinomio se anula para: x = 2 ; veamos:

$$(2)^3 - (2)^2 - 8(2) + 12 = 8 - 4 - 16 + 12 = 0$$

$\therefore$ (x – 2) es un factor del polinomio: $x^3 - x^2 - 8x + 12$

Luego, aplicamos **La Regla de Ruffini**; dividiendo:

$$x^3 - x^2 - 8x + 12 \text{ entre: } (x - 2)$$



	1	–1	–8	12
2		2	2	–12
	1	1	–6	0

Divisor

$\therefore$ Divisor: $1x^2 + 1x - 6 = x^2 + x - 6$

• *Sabemos que:* **Dividendo** = **divisor** × **cociente**

$$x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x^2 + x - 6)\ (x - 2)$$

$$\begin{matrix} x & +3 \\ x & -2 \end{matrix}$$

$$= (x + 3)(x - 2)(x - 2) = (x + 3)(x - 2)^2$$

$$\therefore \boxed{x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x + 3)(x - 2)^2} \ldots\ldots (\beta)$$

Reemplazamos (β) en (α) : $x^4 - 9x^2 + 4x + 12 = (x + 3)(x - 2)^2(x + 1)$

$$\therefore \boxed{x^4 - 9x^2 + 4x + 12 = (x + 1)(x + 3)(x - 2)^2}$$

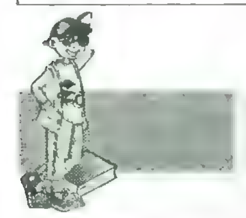
TALLER DE EJERCICIOS Nº 28

1. Factorizar los polinomios siguientes:

a) $x^3 + 6x - 7$	b) $x^3 - 8x^2 + 17x - 10$
c) $9x^3 + 3x^2 - 24x + 12$	d) $2x^3 - 16x^2 + 34x - 20$
e) $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$	f) $2x^3 + 3x + 5$
g) $x^4 - x^3 - 6x^2 + 4x + 8$	h) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$
i) $12x^5 - 8x^4 - 13x^3 + 9x^2 + x - 1$	j) $x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6$

RESPUESTAS TALLER 28

1. a) $(x - 1)(x^2 + x + 7)$	b) $(x - 1)(x - 2)(x - 5)$	c) $3(x - 1)(x + 2)(3x - 2)$
d) $2(x - 1)(x - 2)(x - 5)$	e) $(x - 1)(x + 2)(2x + 1)$	f) $(x + 1)(2x^2 - 2x + 5)$
g) $(x + 1)(x + 2)(x - 2)^2$	h) $(x + 1)(x - 2)(x + 3)$	i) $(x+1)(x-1)(3x+1)(2x-1)^2$
j) $(x - 2)(x + 3)(x + 1)^2$		



EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE FACTORIZACIÓN

1. Señale un factor de: $(x^2 + xy)^3 + (xy + y^2)^3$

A) $(xy - 1)$ **B)** $(xy + 1)$ **C)** $(x - y)$ **D)** $(x^2 - xy + y^2)$ **E)** $(x^2 + xy + y^2)$

Resolución:

$$(x^2 + xy)^3 + (xy + y^2)^3 = [x(x + y)]^3 + [y(x + y)]^3$$

$$= x^3(x + y)^3 + y^3(x + y)^3$$

$$= (x + y)^3[x^3 + y^3]$$

$$= (x + y)^3[(x + y)(x^2 - xy + y^2)]$$

$$(x^2 + xy)^3 + (xy + y^2)^3 = \underbrace{(x + y)^4}_{\text{Factor}}\underbrace{(x^2 - xy + y^2)}_{\text{Factor}}$$

Recuerda que:

* $(a\,.\,b)^n = a^n\,.\,b^n$
* $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$\therefore$ Uno de los factores del polinomio es: $x^2 - xy + y^2$ ***Rpta. D***

2 Factorizar: $1 + mn + p(m + n) - (m + n) - p(1 + mn)$; dando uno de los factores:

A) $m + mn + n$ **B)** $p - m - n$ **C)** $1 + mn + m - n$
D) $m + n + p$ **E)** $1 - m$

Resolución:

La expresión dada, se puede escribir así:

$$= (1 + mn) + p(m + n) - (m + n) - p(1 + mn)$$

$$= (1 + mn)(1 - p) + (m + n)(p - 1)$$

$$= (1 + mn)(1 - p) + (m + n)[-(1 - p)]$$

$$= (1 + mn)(1 - p) - (m + n)(1 - p)$$

$$= (1 - p)[(1 + mn) - (m + n)] = (1 - p)[1 + mn - m - n]$$

$$= (1 - p)[(1 - n) + m(n - 1)] = (1 - p)\,[(1 - n) - m(1 - n)]$$

$$= \underbrace{(1 - p)}_{\text{Factor}}[\underbrace{(1 - n)}_{\text{Factor}}\underbrace{(1 - m)}_{\text{Factor}}]$$

Recuerda que:

* $(p - 1) = -(1 - p)$
* $+m(n - 1) = -m(1 - n)$

$\therefore$ Uno de los factores del polinomio es: $(1 - m)$ **Rpta. E**

3. Uno de los factores de: $P(x) = x^6 + x^4 + x - 1$; es:

A) $x^2 + 1$ **B)** $x^2 - x + 1$ **C)** $x - 1$
D) $x^3 + x^2 - 1$ **E)** $x^3 + x + 1$

Resolución:

Sumando y restando x^3 al polinomio P(x); obtenemos:

$P(x) = x^6 + x^4 + x - 1 + x^3 - x^3$; agrupamos términos:

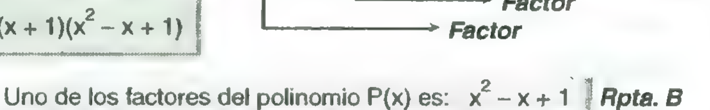
$$P(x) = \underbrace{x^6 + x^4} + \underbrace{x^3 + x} - \underbrace{(x^3 + 1)}$$

$$P(x) = x^4(x^2 + 1) + x(x^2 + 1) - (x^3 + 1)$$

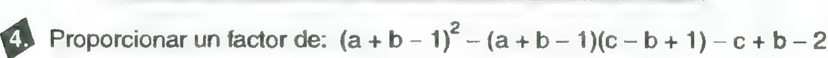
$$P(x) = (x^2 + 1)(x^4 + x) - (x^3 + 1)$$

$$P(x) = (x^2 + 1)x(x^3 + 1) - (x^3 + 1) = (x^3 + 1)[(x^2 + 1)x - 1]$$

$$P(x) = (x^3 + 1)[x^3 + x - 1] = (x + 1)(x^2 - x + 1)[x^3 + x - 1]$$



Recuerda que:
* $(x^3 + 1) = (x + 1)(x^2 - x + 1)$



$\therefore$ Uno de los factores del polinomio P(x) es: $x^2 - x + 1$ **Rpta. B**

4. Proporcionar un factor de: $(a + b - 1)^2 - (a + b - 1)(c - b + 1) - c + b - 2$

A) $a - b$ **B)** $a + b + c$ **C)** $c - a$
D) $a + 2b + 3c$ **E)** $a + 2b - c - 3$

Resolución:

$$= (a + b - 1)^2 - (a + b - 1)(c - b + 1) - (c - b + 2)$$

Hacemos: $\begin{cases} a + b = x \\ c - b = y \end{cases}$

$$= (x - 1)^2 - (x - 1)(y + 1) - (y + 2)$$

$$= (x^2 - 2x + 1) - [xy + x - y - 1] - (y + 2)$$

$$= x^2 - 2x + 1 - xy - x + y + 1 - y - 2 = x^2 - 3x - xy$$

$$= x(x - 3 - y)$$

Reemplazamos los valores de **x** é **y** en esta última expresión:

$= (a + b)[(a + b) - 3 - (c - b)]$

$= \underbrace{(a + b)}_{\text{factor}}\underbrace{[a + 2b - c - 3]}_{\text{factor}}$

$\therefore$ Uno de los factores del polinomio es: $a + 2b - c - 3$ **Rpta. E**

5. Después de factorizar: $x^4 - 6x^3 + 5x^2$; señale la suma de los términos independientes de los factores.

A) 5 **B)** 6 **C)** –5 **D)** –6 **E)** N.A.

Resolución:

$$x^4 - 6x^3 + 5x^2 = x^2(x^2 - 6x + 5)$$

$$\begin{array}{ll} x & -5 \\ x & -1 \end{array}$$

$$= x^2[(x - 5)(x - 1)] = x^2(x - 5)(x - 1)$$

Términos independientes

$\therefore$ Suma de los términos independientes es: $(-5) + (-1) = -6$ **Rpta. D**

6. Cuántos factores binomios tiene: $x^5 - x^4 - 13x^3 + 13x^2 + 36x - 36$

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

Resolución:

$$x^5 - x^4 - 13x^3 + 13x^2 + 36x - 36 = x^4(x - 1) - 13x^2(x - 1) + 36(x - 1)$$

$$= (x - 1)[x^4 - 13x^2 + 36]$$

$$= (x - 1)[(x^2 - 9)(x^2 - 4)]$$

$$= (x - 1)[(x^2 - 3^2)(x^2 - 2^2)]$$

$$x^5 - x^4 - 13x^3 + 13x^2 + 36x - 36 = (x - 1)[(x + 3)(x - 3)(x + 2)(x - 2)]$$

(Son 5 factores binomios)

Observa que:

$$x^4 - 13x^2 + 36$$

$$\begin{array}{ll} x & -9 \\ x & -4 \end{array}$$

$\Rightarrow \therefore$ $x^4 - 13x^2 + 36 = (x^2 - 9)(x^2 - 4)$

$\therefore$ El polinomio tiene 5 factores binomios **Rpta. E**

7. Indique un factor de: $(x^2 - 4x - 2)(x - 2)^2 + 5$

A) $x+1$ B) $x-2$ C) $x+4$ D) $x+3$ E) x^2-4x-1

Resolución:

$$(x^2-4x-2)(x-2)^2+5=(x^2-4x-2)(x^2-4x+4)+5 \quad \text{.......... (I)}$$

Hacemos: $x^2-4x=a$ .... (II)

Reemplazamos **(II)** en **(I)** :

$$(x^2-4x-2)(x^2-4x+4)+5=(a-2)(a+4)+5$$
$$=a^2+2a-8+5$$
$$=a^2+2a-3$$
$$=(a+3)(a-1) \quad \text{.......... (III)}$$

Observa que:

a^2+2a-3

a → +3

a → −1

$\Rightarrow \therefore$ $a^2+2a-3=(a+3)(a-1)$

Reemplazando **(II)** en **(III)**:

$$(a+3)(a-1)=(x^2-4x+3)(x^2-4x-1)$$
$$=(x-3)(x-1)(x^2-4x-1)$$

Factor ← $(x-3)$
Factor ← $(x-1)$
Factor ← (x^2-4x-1)

Observa que:

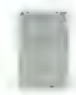
x^2-4x+3

x → −3

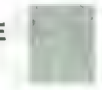
x → −1

$\therefore$ $x^2-4x+3=(x-3)(x-1)$

$\therefore$ Uno de los factores del polinomio es: x^2-4x-1 ***Rpta. E***



EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE FACTORIZACIÓN



Ejercicio 1: Después de factorizar: $a^2(b+c) - c^2(b+c) - b - c$; indique el factor trinomio .

A) $a^2 - c^2$ **B)** $b + c$ **C)** $a^2 - c^2 + 1$
D) $a^2 - c^2 - 1$ **E)** $a + c$

Ejercicio 2: Señale un factor común de: $3x^{m+2p}y^n + 6x^{m+p}y^{n+q} + 3x^m y^{n+2q}$

A) x^p **B)** y^q **C)** $x^m + y^n$
D) $x^p + y^q$ **E)** $x^p y^q$

Ejercicio 3: Señale un factor de: $x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$

A) $x + y$ **B)** $x^2 + y^2$ **C)** $(x - y)^3$
D) x **E)** y

Ejercicio 4: Señale un factor de: $x^{n+2} + x^3 - x^n - x + x^2 - 1$

A) $x^2 + 1$ **B)** $x^n + 1$ **C)** $x^n + x + 1$
D) $x^n - x - 1$ **E)** $x^n - 1$

Ejercicio 5: Un factor de:

$x^3 - 7x^2 - x + 7$ es:

A) $x + 7$ **B)** $x - 1$ **C)** $x^2 + 1$
D) $x^2 + 7$ **E)** $x^2 + 7x + 1$

Ejercicio 6: Señale un factor de:

$x^{2m} + 2x^m y^n + y^{2n}$

A) x^m **B)** y^n **C)** $x^m + y^{2n}$
D) $x^m y^n$ **E)** $x^m + y^n$

Ejercicio 7: Un factor de: $x^{3n} + 1$ es:

A) $x^{2n} + x^n + 1$ **B)** $x^{2n} + 2x^n + 1$
C) $x^{2n} - x^n + 1$ **D)** $x^{2n} - 2x^n + 1$
E) $x^n - 1$

Ejercicio 8: Al factorizar:

$(a+b)(a+b-c) - (c+a) . (c-a-b) + (a+b)^2 - c^2$; uno de los factores que se obtiene es:

A) $3a + 2b + 2c$ **B)** $a - 2b + c$
C) $2a + 3b + 2c$ **D)** $3a + 2b + 3c$
E) $a + 2b - 3c$

Ejercicio 9: Indique un factor de:

$$(x^2 + x + 1)^2 + 3x^2 + 3x - 15$$

A) $x + 1$ **B)** $x + 2$ **C)** $x - 2$
D) $x^2 + x - 7$ **E)** $x^2 - x + 7$

Ejercicio 10: Señale un factor de:

$$x^2 + 3xy + 2y^2 - xz^2 - yz^2$$

A) $x + 2y + z^2$ **B)** $x - 2y - z^2$
C) $x + y + z^2$ **D)** $x + 2y - z^2$
E) $x - y$

Ejercicio 11: Al factorizar:
$a^3e^{2x} + e^{2x} - a^3 - 1$; un factor es de grado:

A) $2x$ **B)** x **C)** 2^x **D)** e^x **E)** e^{2x}

Ejercicio 12: Uno de los factores de: $x^4 + 4$; es:

A) $x^2 - 2x + 2$ **B)** $x^2 + 2x + 1$

C) $x - 1 + \sqrt{2}$ **D)** $x^2 + x + 1$
E) No es factorizable

Ejercicio 13: Señale un factor de:

$$(x^2-1)(x^4+x^2+1)+1-x^3$$

A) x^3+x^2+x B) x^4+x^2+1
C) x^4-1 D) x^2+1
E) x^2+x+1

Ejercicio 14: Factorizar:
$a^2-b^2c+ab-abc+ac-bc^2$; indicando un factor:

A) $a-bc$ B) $a-b$ C) $a+b-c$
D) $ab+c$ E) $ac+b$

Ejercicio 15: Señale el factor primo repetido de: $x^6+x^4-x^2-1$

A) $x+1$ B) $x-1$ C) x^2+1
D) x^2+2 E) x

Clave de Respuestas

1. D	2. D	3. B	4. C	5. B
6. E	7. C	8. A	9. B	10. D
11. B	12. A	13. E	14. A	15. C

EJERCICIOS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA

Organizados por las Academias:
César Vallejo, Trilce, Pitágoras, Sigma, Alfa.

1. ¿Cuántos factores primos tiene: $a^{32}-b^{32}$?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Resolución:

*** Aplicando:** $A^{2n}-B^{2n}=(A^n+B^n)(A^n-B^n)$ **(Diferencia de cuadrados)**

Obtenemos:

$$a^{32}-b^{32}=(a^{16}+b^{16})(a^{16}-b^{16})$$

$(a^{16}-b^{16}) \rightarrow (a^8+b^8)(a^8-b^8)$

$$a^{32}-b^{32}=(a^{16}+b^{16})(a^8+b^8)(a^8-b^8)$$

$(a^8-b^8) \rightarrow (a^4+b^4)(a^4-b^4)$

$$a^{32}-b^{32}=(a^{16}+b^{16})(a^8+b^8)(a^4+b^4)(a^4-b^4)$$

$(a^4-b^4) \rightarrow (a^2+b^2)(a^2-b^2)$

$$a^{32}-b^{32}=(a^{16}+b^{16})(a^8+b^8)(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a^2-b^2)$$

$(a^2-b^2) \rightarrow (a+b)(a-b)$

$$a^{32} - b^{32} = \underbrace{(a^{16} + b^{16})}_{(1)}\underbrace{(a^{8} + b^{8})}_{(2)}\underbrace{(a^{4} + b^{4})}_{(3)}\underbrace{(a^{2} + b^{2})}_{(4)}\underbrace{(a + b)}_{(5)}\underbrace{(a - b)}_{(6)}$$

∴ La expresión: $a^{32} - b^{32}$; tiene 6 factores primos. *Rpta. D*

2. Sumar los factores primos de: $a^2 + ab + ac + bc$

A) $a + b + c$ B) $2a + b + c$ C) $a + 2b + c$
D) $a + b + 2c$ E) 0

Resolución:

- Agrupamos los términos dados de la manera siguiente:

$$(a^2 + ab) + (ac + bc) = a(a + b) + c(a + b)$$

Sacamos factor común "a" Sacamos factor común "c"

$$= (a + b)(a + c)$$

$(a + c)$ → Factor primo
$(a + b)$ → Factor primo

∴ Suma de los factores primos es: $(a + b) + (a + c) = 2a + b + c$ *Rpta. B*

3. Señale el factor, binomio de: $(a + b)(a + c) - (b + d)(c + d)$

A) $a - b$ B) $b - c$ C) $c - d$ D) $b + c$ E) $a - d$

Resolución:

- Efectuando los productos indicados, obtenemos:

$$(a + b)(a + c) - (b + d)(c + d) = (a^2 + ac + ab + bc) - (bc + bd + cd + d^2)$$

$$= a^2 + ac + ab + \cancel{bc} - \cancel{bc} - bd - cd - d^2$$

$$= (a^2 - d^2) + (ac + ab) - (bd + cd)$$

$$= (a + d)(a - d) + a(b + c) - d(b + c)$$

$$= (a + d)(a - d) + (b + c)(a - d)$$

$$= (a + d)(a - d) + (b + c)(a - d)$$

$$= (a - d)[(a + d) + (b + c)]$$

$$= (a - d)\,[a + b + c + d]$$

$(a - d)$ → Factor binomio

∴ Factor binomio pedido es: $(a - d)$ *Rpta. E*

4. Señalar un factor de: $4x^4 - 17x^2 + 4$

A) $2x - 3$ B) $3x - 1$ C) $2x + 1$ D) $4x + 3$ E) $4x - 1$

Resolución:

Factorizamos la expresión: $4x^4 - 17x^2 + 4$; aplicando el método del aspa; veamos:

$$4x^4 - 17x^2 + 4 = (4x^2 - 1)(x^2 - 4)$$

$$\begin{matrix} 4x^2 & & -1 \\ & \times & \\ x^2 & & -4 \end{matrix}$$

$$= [(2x)^2 - 1^2][x^2 - 2^2]$$

$$= \underbrace{(2x + 1)}_{(1)}\underbrace{(2x - 1)}_{(2)}\underbrace{(x + 2)}_{(3)}\underbrace{(x - 2)}_{(4)}$$

$\therefore$ Uno de los factores es: $(2x + 1)$ ***Rpta. C***

5. Factorizar: $-x^2 + x + a^2 + b^2 - a + b - 2ab$; señalar un factor:

A) $x + a$ B) $x + a - b$ C) $a - x - b + 1$
D) $-x + a - b$ E) $x + b$

Resolución:

- Agrupamos los términos de la manera siguiente:

$$[(\underbrace{a^2 - 2ab + b^2}) - x^2] + (x - a + b)$$

$$[(a - b)^2 - x^2] + (x - a + b) = [(a - b) + x][(a - b) - x] + (x - a + b)$$

$$= (a - b + x)(\overline{a - b - x}) - (\overline{a - b - x})$$

$$= (\overline{a - b - x})[(a - b + x) - 1]$$

$$= (a - b - x)[a - b + x - 1]$$

$\therefore$ El factor pedido es: $(a - b - x) = -x + a - b$ ***Rpta. D***

6. Factorizar, e indicar la suma de coeficientes de un factor primo:

$$a(a - 2c)(a^2 + ac - ab - bc) + 2b(a - 2c)(a^2 + ac - ab - bc)$$

A) 7 B) 3 C) 4 D) 5 E) 9

Resolución:

$$a(a - 2c)[(a^2 + ac) - (ab + bc)] + 2b(a - 2c)[(a^2 + ac) - (ab + bc)]$$

$$a(a - 2c)a(\underline{a + c}) - b(\underline{a + c})] + 2b(a - 2c)[a(\underline{a + c}) - b(\underline{a + c})]$$

$a(a-2c)[(a+c)(a-b)] + 2b(a-2c)[(a+c)(a-b)]$

Sacamos los factores comunes: $(a-2c)(a+c)(a-b)$; obteniendo:

$$(a-2c)(a+c)(a-b)[a+2b]$$

Luego: $(a-2c) \Rightarrow \Sigma$ de coeficientes de este factor: $1-2=-1$
$(a+c) \Rightarrow \Sigma$ de coeficientes de este factor: $1+1=2$
$(a-b) \Rightarrow \Sigma$ de coeficientes de este factor: $1-1=0$
$(a+2b) \Rightarrow \Sigma$ de coeficientes de este factor: $1+2=3$

$\therefore$ La suma de coeficientes de un factor primo es: 3 ***Rpta. B***

7. Señale uno de los factores de:

$$M(x,y,z) = x^3yz + 2x^2y^2z - x^2yz^2 + xy^3z - xy^2z^2$$

A) $x+y+z$ B) $y+z$ C) $x-y$ D) $x+y-z$ E) $x+z$

Resolución:

- Agrupamos términos de la manera siguiente:

$M(x,y,z) = (x^3yz + 2x^2y^2z + xy^3z) - (x^2yz^2 + xy^2z^2)$

$M(x,y,z) = xyz(\underbrace{x^2+2xy+y^2}) - xyz^2(x+y)$

$M(x,y,z) = xyz(x+y)^2 - xyz^2(x+y)$

$M(x,y,z) = xyz(x+y)[(x+y)-z] = \boxed{xyz(x+y)(x+y-z)}$

$\therefore$ Uno de los factores es: $(x+y-z)$ ***Rpta. D***

8. ¿Cuántos factores de primer grado tiene el polinomio:

$$x^2y + xy^2 + x^2 + y^2 + 2xy + x + y$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 0 E) 4

Resolución:

- Agrupamos los términos de la manera siguiente:

$(x^2y + xy^2) + (\underbrace{x^2+2xy+y^2}) + (x+y)$

$xy(x+y) + (x+y)^2 + (x+y) = (x+y)[xy + (x+y) + 1]$

$= (x+y)[\underbrace{xy+x} + \underbrace{y+1}]$

$= (x+y)[x(y+1) + (y+1)]$

$= (x + y)(y + 1)[x + 1]$

factores de primer grado

$\therefore$ El polinomio dado, tiene 3 factores de primer grado.

Rpta. C

9. Factorizar: $(a + 3)(a + 2)(a + 1) + (a + 2)(a + 1) + (a + 1)$ e indicar un factor

A) $a + 3$ B) $a + 2$ C) $a - 1$ D) $a + 4$ E) a

Resolución:

$$(a + 3)(a + 2)(a + 1) + (a + 2)(a + 1) + (a + 1) = (a + 1)[(a + 3)(a + 2) + (a + 2) + 1]$$

$$= (a + 1)[a^2 + 5a + 6 + a + 3]$$

$$= (a + 1)[a^2 + 6a + 9]$$

$$= (a + 1)[(a + 3)^2]$$

$$= (a + 1)(a + 3)^2$$

$a^2 + 6a + 9 = (a + 3)(a + 3)$

a +3

a +3

$\therefore$ Uno de los factores es: $(a + 3)$ ***Rpta. A***

10. Factorizar la siguiente expresión: $(x - 2)(x + 2)(x + 3)(x - 1) + 3$; e indicar la suma de coeficientes de uno de sus factores.

A) 5 B) 6 C) –3 D) 1/5 E) 2

Resolución:

- Agrupamos los términos de la manera siguiente:

$$(x - 2)(x + 3)(x + 2)(x - 1) + 3 = (x^2 + x - 6)(x^2 + x - 2) + 3$$

Hacemos cambio de variable; osea: $x^2 + x = a$

Luego: $(x - 2)(x + 3)(x + 2)(x - 1) + 3 = (a - 6)(a - 2) + 3$

$$= a^2 - 8a + 12 + 3$$

$$= a^2 - 8a + 15$$

$$= (a - 3)(a - 5)$$

$$= [(x^2 + x) - 3][(x^2 + x) - 5]$$

$$(x-2)(x+3)(x+2)(x-1)+3=(x^2+x-3)(x^2+x-5)$$

Σ coeficientes = −3

Σ coeficientes = −1

$a^2-8a+15=(a-3)(a-5)$

a ⟶ −3

a ⟶ −5

∴ La suma de coficientes de uno de los factores es : −3

Rpta. C

11. Al factorizar: m^4+4m^2-117 un factor de primer grado es:

A) $m+3$ B) $m-3$ C) m^2-9 D) m^2+15 E) $m+1$

Resolución:

- Factorizamos el polinomio dado, aplicando el método del aspa:

$$m^4-4m^2+117=(m^2-9)(m^2+13)$$

m^2 ⟶ -9 $\quad =(m^2-3^2)(m^2+13)$

m^2 ⟶ $+13$ $\quad =(m+3)(m-3)(m^2+13)$

Factor de 2^{do} grado

Factor de 1^{er} grado

∴ Un factor de primer grado es: $(m-3)$ ***Rpta. B***

12. Despues de factorizar: $(x-1)(x-2)(x-3)+(x-1)(x-2)-(x-1)$

Calcular el valor de un factor primo para: $x=5$

A) 14 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

Resolución:

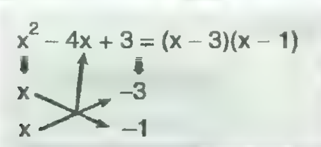
De la expresión: $(x-1)(x-2)(x-3)+(x-1)(x-2)-(x-1)$

Sacamos factor común: $(x-1)$, obteniendo:

$$(x-1)[(x-2)(x-3)+(x-2)-1]=(x-1)[x^2-5x+6+x-3]$$
$$=(x-1)(x^2-4x+3)$$
$$=(x-1)[(x-3)(x-1)$$
$$=((x-1))^2((x-3))$$

Valor de este factor primo, para: $x=5$; es: $x-1=5-1=4$

Valor de este factor primo, para: $x=5$; es: $x-3=5-3=2$



∴ El valor de un factor primo para $x = 5$; es: 2

Rpta. C

13. Indicar un factor de: $(x-4)(x-5)^4 + (5-x)^5 + x - 5$

A) $x + 5$ B) $x - 3$ C) $x - 4$ D) $2x + 3$ E) $x - 6$

Resolución:

- La expresión: $(x-4)(\underline{x-5})^4 + (\underline{5-x})^5 + (x-5)$

Se puede escribir asi: $(x-4)(x-5)^4 - (x-5)^5 + (x-5)$

Sacamos factor común $(x-5)^4$; en los dos primeros términos obteniendo:

$$(x-5)^4[\underbrace{(x-4)-(x-5)}_{1}] + (x-5) =$$

$$(x-5)^4 + (x-5) = (x-5)[(x-5)^3 + 1]$$

$$= (x-5)[(x-5)^3 + 1^3]$$

$$= (x-5)[(x-5)+1][(x-5)^2 - (x-5)\cdot 1 + 1^2]$$

$$= (x-5)(x-4)[x^2 - 10x + 25 - x + 5 + 1]$$

$$= (x-5)(x-4)(x^2 - 11x + 31)$$

(x − 5) → Factor; (x − 4) → Factor; ($x^2 - 11x + 31$) → Factor

∴ Uno de los factores es: $(x-4)$ *Rpta. C*

Recuerda que:

$(A-B)^{\#\text{ impar}} = -(B-A)^{\#\text{ impar}}$

Ejemplo:

$(4-2)^3 = -(2-4)^3$

$(2)^3 = -(-2)^3$

$(8) = -(-8)$

∴ $8 = 8$

14. La suma de coeficientes de uno de los factores primos de:

$$(a^2x^2 + a^2 - x^2 - 1)^2 + (2ax^2 + 2a)^2 \text{ ; es:}$$

A) 2 B) 3 C) 5 D) 6 E) 1

Resolución:

* Agrupamos los términos de la manera siguiente:

$[(a^2x^2 - x^2) + (a^2 - 1)]^2 + (2ax^2 + 2a)^2$

$[x^2(a^2 - 1) + (a^2 - 1)]^2 + [2a(x^2 + 1)]^2$

$[(a^2 - 1)(x^2 + 1)]^2 + [(2a)^2(x^2 + 1)^2]$

Recuerda que:

$(A \cdot B)^n = A^n \cdot B^n$

$(a^2 - 1)^2(x^2 + 1)^2 + 4a^2(x^2 + 1)^2 = (x^2 + 1)^2[(a^2 - 1)^2 + 4a^2]$

$= (x^2 + 1)^2[a^4 - 2a^2 + 1 + 4a^2]$

$= (x^2 + 1)^2[a^4 + 2a^2 + 1]$

$= (x^2 + 1)^2(a^2 + 1)^2$

$(a^2 + 1)$: **Factor primo** — **Σ de coeficientes: 1 + 1 = 2**

$(x^2 + 1)$: **Factor primo** — **Σ de coeficientes: 1 + 1 = 2**

∴ La suma de coeficientes de uno de los factores primos es: 2

Rpta. A

15. Uno de los factores de: $x^4 - 3x^2 + 1$; es:

A) $x^2 - x + 1$ B) $x^2 + x + 1$ C) $x^2 + x - 1$
D) $x^2 + 3x + 1$ E) $x^2 - 3x + 1$

Resolución:

La expresión: $x^4 - 3x^2 + 1$; se puede escribir de la manera siguiente:

$x^4 - 3x^2 + 1 = \underbrace{x^4 - 2x^2 + 1} - x^2$

$= (x^2 - 1)^2 - x^2$; **Por diferencia de cuadrados**

$= [(x^2 - 1) + x][(x^2 - 1) - x]$

$= (x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1)$

$(x^2 + x - 1)$ → **Factor**; $(x^2 - x - 1)$ → **Factor**

∴ Uno de los factores es: $(x^2 + x - 1)$ *Rpta. C*

16. dar un factor de: $2(a^2 + b^2 + c^2) - 5b(a + c) + 4ac$

A) $2a + c - b$ B) $2a - c - b$ C) $a - c - b$
D) $b - 2a - 2c$ E) $a + b + c$

Resolución:

La expresión se puede escribir de la manera siguiente:

$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 5b(a + c) + 4ac$; agrupamos los términos así:

$$\underbrace{2a^2 + 4ac + 2c^2} + 2b^2 - 5b(a + c)$$

$$2(\underbrace{a^2 + 2ac + c^2}) + 2b^2 - 5b(a + c)$$

$2(a + c)^2 - 5b(a + c) + 2b^2$; factorizamos esta expresión por el método del aspa.

$$\begin{array}{ccc} 2(a+c) & \times & -b \\ (a+c) & & -2b \end{array}$$

$$2(a + c)^2 - 5b(a + c) + 2b^2 = [2(a + c) - b][(a + c) - 2b]$$

$$= (2a + 2c - b)(a + c - 2b)$$

$$= (b - 2a - 2c)(2b - a - c)$$

Factor

Factor

Recuerda que:

* Para un par de factores $(a - b + c)(a + b - c)$, se cumple que si cambiamos de signo a sus términos el valor de la expresión no varía; osea:

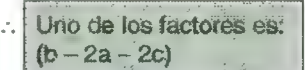
$$\boxed{(a - b + c)(a + b - c) = (b - a - c)(c - a - b)}$$

Ejemplo:

$$(6 - 4 + 2)(6 + 4 - 2) = (4 - 6 - 2)(2 - 6 - 4)$$

$$(4)(8) = (-4)(-8)$$

$$\therefore \boxed{32 = 32}$$

$\therefore$ 
Uno de los factores es: $(b - 2a - 2c)$

Rpta. D

17. Factorizar e indicar el número de factores primos: $a(b + c)^2 + b(c - a)^2$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Resolución:

De la expresión: $a(b + c)^2 + b(c - a)^2$; obtenemos:

$$a(b^2 + 2bc + c^2) + b(c^2 - 2ac + a^2)$$

$$ab^2 + 2abc + ac^2 + bc^2 - 2abc + a^2b$$

Agrupamos términos de la manera siguiente:

$\underbrace{(a^2b + ab^2)} + \underbrace{(ac^2 + bc^2)}$

$ab(\underline{a+b}) + c^2(\underline{a+b}) = \boxed{(\underline{a+b})[ab + c^2]}$

$\therefore$ **El número de factores primos es: 2** ***Rpta. B***

18. Factorizar: $(a + b)(a^2 + b^2) - 4a^2b$; e indicar un factor primo.

A) $a + b$ B) $a - b$ C) $a + 2b$ D) $2a + b$ E) $a^2 + b^2$

Resolución:

$(a + b)(a^2 + b^2) - 4a^2b = a^3 + ab^2 + a^2b + b^3 - 4a^2b$

$= a^3 - 3a^2b + ab^2 + b^3$; esta expresión se puede escribir así:

$= \underbrace{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3} - \underbrace{2ab^2 + 2b^3}$

$= (a - b)^3 - 2b^2(a - b)$

$= (a - b)[(a - b)^2 - 2b^2]$

$= (a - b)[a^2 - 2ab + b^2 - 2b^2]$

$= (a - b)[\underline{a^2 - 2ab - b^2}]$

$(a - b)$ → Factor; $a^2 - 2ab - b^2$ → Factor

$\therefore$ **Uno de los factores es: $(a - b)$** ***Rpta. B***

19. Factorizar: $(m + n)^2 - (m - 1)^2 - (n + 1)^2$; indicando uno de sus factores primos.

A) $m + 1$ B) $n - 1$ C) $m + n - 1$ D) $n + 1$ E) $m + n$

Resolución:

$(m + n)^2 - (m - 1)^2 - (n + 1)^2$

diferencia de cuadrados

> ***Recuerda que:***
>
> $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$

$[(m + n) + (m - 1)][(\cancel{m} + n) - (\cancel{m} + 1)] - (n + 1)^2$

$(2m + n - 1)(\underline{n+1}) - (\underline{n+1})^2$; sacamos factor común: $(\underline{n+1})$

$(\underline{n+1})[(2m + \cancel{n} - 1) - (\cancel{n} + 1)] = (n + 1)[2m - 2]$

$= (n + 1)\cdot 2[m - 1]$

$= 2(n + 1)(m - 1)$

(n + 1) → Factor primo; (m − 1) → Factor primo

∴ Uno de sus factores primos es: $(n + 1)$ **Rpta. D**

20. Un factor de: $(ab - 1)^2 - (a^2 + b^2 + 1)$ es:

A) $a + b + 1$ B) $a + b$ C) $a - b$ D) $a - b - ab$ E) $a + b + ab$

Resolución:

$$(ab - 1)^2 - (a^2 + b^2 + 1) = (ab)^2 - 2ab + \not{1} - a^2 - b^2 - \not{1}$$

$$= (ab)^2 - (a^2 + 2ab + b^2)$$

$$= (ab)^2 - (a + b)^2 \text{; diferencia de cuadrados}$$

$$= [ab + (a + b)][ab - a - b]$$

$$= (ab + a + b)(ab - a - b)$$

(ab + a + b) → Factor; (ab − a − b) → Factor

Recuerda que:

$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

∴ Uno de los factores es: $ab + a + b = a + b + ab$ **Rpta. E**

21. ¿Cuál no es factor de: $x^4 - 13x^2 + 36$

A) $x + 2$ B) $x - 2$ C) $x + 3$ D) $x - 3$ E) $x - 4$

Resolución:

La expresión dada; la factorizamos aplicando el método del aspa.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = (x^2 - 9)(x^2 - 4)$$

$x^2 \quad -9$

$x^2 \quad -4$

$$= (x^2 - 3^2)(x^2 - 2^2)$$

$$= (x + 3)(x - 3)(x + 2)(x - 2)$$

∴ De acuerdo a las alternativas: $(x - 4)$; no es factor del polinomio dado. **Rpta. E**

22. Señale un factor de: $ab(c + d)^2 + cd(a - b)^2$

A) $ab + cd$ B) $ac + bd$ C) $ad - bc$ D) $ab - cd$ E) $ac - bd$

Resolución:

$$ab(c + d)^2 + cd(a - b)^2 = ab(c^2 + 2cd + d^2) + cd(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$ab(c+d)^2 + cd(a-b)^2 = abc^2 + 2abcd + abd^2 + a^2cd - 2abcd + b^2cd$$

$$= (abc^2 + a^2cd) + (abd^2 + b^2cd)$$

$$= ac(bc + ad) + bd(ad + bc)$$

$$= (bc + ad)[ac + bd]$$

Factor

Factor

$\therefore$ Uno de los factores es: $(ac + bd)$ **Rpta. B**

(23.) Factorizar, e indicar un factor: $2(x^2 - 2x + 3)^2 + 5(x^2 - 2x) + 3$

A) $2x^2 - 2x + 3$ B) $x^2 - 2x - 7$ C) $x^2 - 2x + 2$

D) $2x^2 - 4x + 3$ E) $x^2 - 2x + 5$

Resolución:

$2(x^2 - 2x + 3)^2 + 5(x^2 - 2x) + 3$;hacemos cambio de variable: $x^2 - 2x = a$

Luego:

$$2(x^2 - 2x + 3)^2 + 5(x^2 - 2x) + 3 = 2(a+3)^2 + 5a + 3$$

$$= 2(a^2 + 6a + 9) + 5a + 3$$

$$= 2a^2 + 17a + 21$$

$$= (2a + 3)(a + 7)$$

$$= [2(x^2 - 2x) + 3][(x^2 - 2x) + 7]$$

$$= (2x^2 - 4x + 3)(x^2 - 2x + 7)$$

Factor

Factor

$2a^2 + 17a + 21 = (2a + 3)(a + 7)$

2a +3

a +7

$\therefore$ Uno de los factores es: $(2x^2 - 4x + 3)$

Rpta. D

2.8 MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

2.8.1 MÁXIMO COMÚN DIVISOR: (M.C.D).

Para calcular el máximo común Divisor **(M.C.D)** de dos o más expresiones, se factorizan estas y el **M.C.D** estará formado por los factores comunes, elevados a su menor exponente.

Ejemplo 1: Hallar el **M.C.D.** de: $24a^2b$; $18a^3bx$; $30a^4bx^2$

Resolución:

Se descomponen todos los coeficientes en sus factores primos; veamos:

24	2
12	2
6	2
3	3
1	

$24 = 2^3 \cdot 3$

18	2
9	3
3	3
1	

$18 = 2 \cdot 3^2$

30	2
15	3
5	5
1	

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

Luego:

$$24a^2b = 2^3 \cdot 3 \cdot a^2b$$
$$18a^3bx = 2 \cdot 3^2 \cdot a^3bx$$
$$30a^4bx^2 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a^4bx^2$$

* Los factores comunes con su menor exponente son: $\mathbf{2 \cdot 3 \cdot a^2 \cdot b = 6a^2b}$, siendo este el **M.C.D.**

∴ El **M.C.D.** de: $24a^2b$; $18a^3bx$; $30a^4bx^2$ es $6a^2b$

Ejemplo 2: Hallar el **M.C.D.** de: $72x^3y^4z^4$; $96x^2y^2z^3$; $120x^4y^5z^7$

Resolución:

Se descomponen todos los coeficientes en sus factores primos, veamos:

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$72 = 2^3 \cdot 3^2$

96	2
48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

$96 = 2^5 \cdot 3$

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

Luego:

$$72x^3y^4z^4 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot x^3y^4z^4$$
$$96x^2y^2z^3 = 2^5 \cdot 3x^2y^2z^3$$
$$120x^4y^5z^7 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^4y^5z^7$$

* Los factores comunes con su menor exponente son: $\mathbf{2^3 \cdot 3 \cdot x^2y^2z^3 = 24x^2y^2z^3}$, siendo este el **M.C.D.**

∴ El **M.C.D.** de: $72x^3y^4z^4$; $96x^2y^2z^3$; $120x^4y^5z^7$ es: $24x^2y^2z^3$

Ejemplo 3: Hallar el **M.C.D.** de: $x^2 - xy$; $3x^2 - 3y^2$; $xy - y^2$

Resolución:

- Factorizamos cada una de las expresiones dadas:

i) $x^2 - xy = x(x - y)$

ii) $3x^2 - 3y^2 = 3(x^2 - y^2) = 3(x + y)(x - y)$

* El factor común con su menor exponente es: $(x - y)$; siendo este el **M.C.D.**

iii) $xy - y^2 = y(x - y)$

∴ **El M.C.D. de:** $x^2 - xy$; $3x^2 - 3y^2$; $xy - y^2$ **es:** $(x - y)$

Ejemplo 4: Hallar el **M.C.D.** de: $x^2 + x - 12$; $x^2 - 9$; $x^2 - 4x + 3$

Resolución:

- Factorizamos cada una de las expresiones dadas:

i) $x^2 + x - 12 = (x + 4)(x - 3)$

ii) $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x + 3)(x - 3)$

iii) $x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$

* El factor común con su menor exponente es: $(x - 3)$; siendo este el **M.C.D.**

∴ **El M.C.D. de:** $x^2 + x - 12$; $x^2 - 9$; $x^2 - 4x + 3$ **es:** $(x - 3)$

Ejemplo 5: Hallar el **M.C.D.** de: $12(x - 2)^2$; $6(x^3 - 8)$; $15x^2 - 60$

Resolución:

- Factorizamos cada una de las expresiones dadas:

i) $12(x - 2)^2 = 3 \cdot 2^2 \cdot (x - 2)^2$

ii) $6(x^3 - 8) = 2 \cdot 3(x^3 - 2^3) = 2 \cdot 3(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

iii) $15x^2 - 60 = 15(x^2 - 4) = 3 \cdot 5(x + 2)(x - 2)$

* El factor común con su menor exponente es: $3 \cdot (x - 2)$; siendo este el **M.C.D.**

∴ **El M.C.D. de:** $12(x - 2)^2$; $6(x^3 - 8)$; $15x^2 - 60$ **es:** $3(x - 2)$

2.8.2 MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO: (M.C.M).

Para calcular el **M.C.M.** de dos o más expresiones se factorizan éstas y el **M.C.M.** se formará con los factores comunes y no comunes a su mayor exponente.

Ejemplo 1: Hallar el **M.C.M.** de: $72x^3y^4z^4$; $96x^2y^2x^3$; $120x^4y^5z^7$

Resolución:

Se descomponen todos los coeficientes en sus factores primos; veamos:

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$72 = 2^3 \cdot 3^2$

96	2
48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

$96 = 2^5 \cdot 3$

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

Luego:

i) $72x^3y^4z^4 = 2^3 \cdot 3^2\, x^3y^4z^4$

ii) $96x^2y^2z^3 = 2^5 \cdot 3 \cdot x^2y^2z^3$

iii) $120x^4y^5z^7 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^4y^5z^7$

* El **M.C.M.** será igual al producto de los factores comunes y no comunes con su mayor exponente, osea:

$$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot x^4y^5z^7 = 32 \cdot 9 \cdot 5 \cdot x^4y^5z^7$$
$$= \boxed{1\,440x^4y^5z^7}$$

$\therefore$ EL **M.C.M.** de: $72x^3y^4z^4$; $96x^2y^2z^3$; $120x^4y^5z^7$ es: $1\,440x^4y^5z^7$

Ejemplo 2: Hallar el **M.C.M.** de: $48a^3bc^4$; $108a^2b^2c^3$; $18a^4b^3c^2$

Resolución:

Se descomponen todos los coeficientes en sus factores primos, veamos:

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

$48 = 2^4 \cdot 3$

108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

$108 = 2^2 \cdot 3^3$

18	2
9	3
3	3
1	

$120 = 2 \cdot 3^2$

Luego:

i) $48a^3bc^4 = 2^4 \cdot 3 \cdot a^3bc^4$

ii) $108a^2b^2c^3 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot a^2b^2c^3$

iii) $18a^4b^3c^2 = 2 \cdot 3^2 \cdot a^4b^3c^2$

* El **M.C.M.** será igual al producto de los factores comunes y no comunes con su mayor exponente, osea:

$$2^4 \cdot 3^3 \cdot a^4b^3c^4 = 16 \cdot 27 \cdot a^4b^3c^4$$
$$= \boxed{432a^4b^3c^4}$$

$\therefore$ El **M.C.M.** de: $48a^3bc^4$; $108a^2b^2c^3$; $18a^4b^3c^2$ es: $432a^4b^3c^4$

Ejemplo 3: Hallar el **M.C.M.** de: $2x - 4$; $3x + 6$; $x^2 - 4$

Resolución:

- Factorizamos cada una de las expresiones dadas:

i) $2x - 4 = 2(x - 2)$

ii) $3x + 6 = 3(x + 2)$

iii) $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x + 2)(x - 2)$

* El **M.C.M.** será igual al producto de los factores comunes y no comunes con su mayor exponente, osea:

$$2 \cdot 3 \cdot (x - 2)(x + 2) = \boxed{6(x - 2)(x + 2)}$$

$\therefore$ El **M.C.M.** de: $2x - 4$; $3x + 6$; $x^2 - 4$ es: $6(x - 2)(x + 2) = 6(x^2 - 4)$

Ejemplo 4: Hallar el **M.C.M.** de: $3x - 15$; $x^2 + 5x + 25$; $x^3 - 125$

Resolución:

- Factorizamos cada una de las expresiones dadas:

i) $3x - 15 = 3(x - 5)$ **ii)** $x^2 + 5x + 25 = (x^2 + 5x + 25)$

iii) $x^3 - 125 = x^3 - 5^3 = (x - 5)(x^2 + 5x + 25)$

- El **M.C.M.** es: $3(x - 5)(x^2 + 5x + 25) = 3(x^3 - 5^3)$

∴ El **M.C.M.** de: $3x - 15$; $x^2 + 5x + 25$; $x^3 - 125$ es: $3(x^3 - 5^3) = 3(x^3 - 125)$

Ejemplo 5: Hallar el **M.C.M.** de: $x^2 + 5x + 6$; $x^2 - 4$; $x^2 + x - 2$

Resolución:

- Factorizamos cada una de las expresiones dadas:

i) $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$ **ii)** $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$

iii) $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$

- El **M.C.M.** es: $(x + 2)(x + 3)(x - 2)(x - 1)$

∴ El **M.C.M.** de: $x^2 + 5x + 6$; $x^2 - 4$; $x^2 + x - 2$ es: $(x + 2)(x + 3)(x - 2)(x - 1)$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 29

1. Halla el máximo común divisor **(M.C.D.)** de los siguientes monomios:

a) $2a$; $4ab$	b) x^2 ; $3ax$
c) xy ; x^2y^2	d) ab^2 ; a^2b ; a^2b^2
e) $3a^3b^3$; $5a^2bx$; $4ab^2z$	f) a^2x^3b ; a^5x^4y ; $a^4b^2x^3$
g) $12x^3y^4$; $18ax^2y^2$; $24bx^4y$	h) $20a^5b^4z$; $15a^3b^2$; $45a^4b^3x$
i) $28x^2y$; $42x^3z$; $14x^4y^3$	j) $3x^3y$; $5x^2y^2$; $2abxy$
k) $18x^4$; $54x^5$; $36x^2y$	l) $70ax^3$; $35a^2x^2$; $105a^3bx$
m) $15x^2y^2$; $75axy$; $60a^3x^2y$	n) $9x^4y$; $36x^2y^3$; $108xy^4$
o) $16x^3y$; $48x^8y^3$; $64x^5y^2$	p) $24x^5y^2$; $72x^3y^3$; $36x^2y^4$

2. Halla el **M.C.D.** de los siguientes Polinomios.

a) $3x+6;\ x^2-4;\ (x+2)^2$	b) $x^2-y^2\ ;\ 2x^2-2xy\ ;\ 3xy-3y^2$
c) $x^2+4x+3\ ;\ x^2-1\ ;\ x^2+5x+4$	d) $x^2-8x+15\ ;\ x^2-6x+5\ ;\ x^2-25$
e) $4x^2+4x-24\ ;\ 2x^2+18x+36$	f) $3x(a+3)\ ;\ 2x^2(a+3)\ ;\ 5x(a^2-9)$
g) $8abx-8ab\ ;\ 4a^2x-4a^2\ ;\ 6ax^2-6ax$	h) $(x+2)^2\ ;\ (4-x^2)\ ;\ (x^2+x-2)$
i) $8-x^3\ ;\ 4-x^2\ ;\ (2-x)^2$	j) $5x(x^3-b^3)\ ;\ 10a(x^2-b^2)\ ;\ 15a(x-b)^2$

3. Halla el mínimo común múltiplo **(M.C.M)** de los siguientes monomios:

a) $x^2\ ;\ 2xy$	b) $3ax\ ;\ 2x^2$
c) $4a^2y\ ;\ 6ay$	d) $ax^2\ ;\ bx\ ;\ abx$
e) $2x\ ;\ 3ab\ ;\ 5a^2bx$	f) $4a^2\ ;\ 6ab\ ;\ 8bx^2$
g) $x^2y^2\ ;\ ax^3\ ;\ by$	h) $6a^2b\ ;\ 8ab^2\ ;\ 12abx$
i) $16x^3z^2\ ;\ 48x^2y\ ;\ 80x^4y^2$	j) $55xy^3\ ;\ 5x^3\ ;\ 11a^2bx^4y^2$
k) $5x^3b^3\ ;\ 2ax^3\ ;\ 7ab^2$	l) $10a^3b^3\ ;\ 20abx\ ;\ 60a^2b^2x^2$
m) $15xy\ ;\ 25x^2b\ ;\ 35y^3$	n) $12abx\ ;\ 18a^2y\ ;\ 8b^2x$
o) $16x^2yz^2\ ;\ 8xy^2z^4\ ;\ 24x^3y^4z$	p) $36x^3y^2\ ;\ 24x^2y^5\ ;\ 28x^4y^3$

4. Halla el mínimo común múltiplo **(M.C.M)** de los siguientes polinomios:

a) $3x^2\ ;\ 3x^2-6bx$	b) $8ab\ ;\ 4ax+12a$
c) $5b^2\ ;\ 6ax-2bx$	d) $12ax\ ;\ 2a+x\ ;\ 8ab^2$
e) $18x^2\ ;\ 4ab-2a\ ;\ 9a^2x$	f) $a^2\ ;\ 3ax+6x\ ;\ 3a$
g) $a^2+2a+1\ ;\ a^2-1\ ;\ 3a^2+3a$	h) $4x^2-4y^2\ ;\ 6x^2+12xy+6y^2\ ;\ 12x+12y$
i) $9-x^2\ ;\ 6x-2x^2\ ;\ 9-6x+x^2$	j) $a^2+2ab+b^2\ ;\ a^2-2ab+b^2\ ;\ a^2-b^2$
k) $x^2+5x+6\ ;\ x^2+x-2\ ;\ x^2+3x+2$	l) $x^3+y^3\ ;\ x^2-y^2\ ;\ x^2-xy+y^2$
m) $a^3-8\ ;\ a^2-4\ ;\ a^2+2a+4$	
n) $3x^2(27+a^3)\ ;\ 6x(9-a^2)\ ;\ x^3(9-3a+a^2)$	

5. Halla el máximo común divisor **(M.C.D.)** y el Mínimo Común Múltiplo **(M.C.M.)** de los siguienes polinomios:

a) $P=4x^4-y^2\ ;\ Q=(2x^2-y)^2$
b) $A=(x^2-1)^2\ ;\ B=x^2-4x-5\ ;\ C=x^4-1$
c) $M=5x^2-10x\ ;\ N=x^3-4x\ ;\ R=x^2y-2xy\ ;\ S=x^2-x-2$
d) $A=x^3+x^2y+xy^2+y^3\ ;\ B=x^3-x^2y+xy^2-y^3\ ;\ C=x^4-y^4$
e) $A=12ax-6ay+24bx-12by\ ;\ B=3a^3+24b^3\ ;\ C=9a^2+9ab-18b^2$
f) $A=x^3-10x^2+31x-30\ ;\ B=x^3-5x^2-4x+20$

RESPUESTAS TALLER 29

1.

a) $2a$	b) x	c) xy	d) ab
e) ab	f) a^2x^3	g) $6x^2y$	h) $5a^3b^2$
i) $14x^2$	j) xy	k) $18x^2$	l) $35ax$
m) $15xy$	n) $9xy$	o) $16x^3y$	p) $12x^2y^2$

2.

a) $(x + 2)$	b) $(x - y)$	c) $(x + 1)$	d) $(x - 5)$
e) $2(x + 3)$	f) $x(a + 3)$	g) $2a(x - 1)$	h) $(x + 2)$
i) $2 - x$	j) $5(x - 6)$		

3.

a) $2x^2y$	b) $6ax^2$	c) $12a^2y$	d) abx^2
e) $30a^2bx$	f) $24a^2bx^2$	g) abx^3y^2	h) $24a^2b^2x$
i) $240x^4y^2z^2$	j) $55a^2bx^4y^3$	k) $70ab^3x^3$	l) $60a^3b^3x^2$
m) $525bx^2y^3$	n) $72a^2b^2xy$	o) $48x^3y^4z^4$	p) $504x^4y^5$

4.

a) $3x^2(x-2b)$	b) $8ab(x + 3)$	c) $10b^2x(3a - b)$
d) $24ab^2x(2a + x)$	e) $18a^2x^2(2b - 1)$	f) $3a^2x(a + 2)$
g) $3a(a - 1)(a + 1)^2$	h) $12(x + y)2(x - y)$	i) $2x(3 + x)(3 - x)^2$
j) $(a + b)^2(a - b)^2$	k) $(x + 2)(x^2 - 1)(x + 3)$	l) $(x - y)(x^3 + y^3)$
m) $(a^3 - 8)(a + 2)$	n) $6x^3(3 - a)(27 + a^3)$	

5.

a) M.C.D. $= (2x^2 - y)$
M.C.M. $= (2x^2 + y)(2x^2 - y)^2$

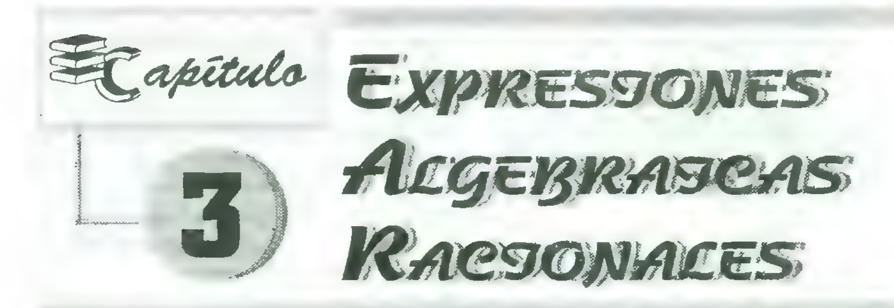
b) M.C.D. $= (x + 1)$
M.C.M. $= (x + 1)^2(x - 1)^2(x - 5)(x^2 + 1)$

c) M.C.D. $= (x - 2)$
M.C.M. $= 5xy(x - 2)(x + 2)(x + 1)$

d) M.C.D. $= x^2 + y^2$
M.C.M $= x^4 - y^4$

e) M.C.D. $= 3(a + 2b)$
M.C.M. $= 18(a + 2b)(a - b)(2x - y)(a^2 - 2ab + 4b^2)$

f) M.C.D. $= (x - 2)\,(x - 5)$
M.C.M. $= (x - 2)(x - 5)(x - 3)(x + 2)$



Una expresión algebraica es racional, si tiene la forma de una fracción. Llámese fracción algebraica al cociente indicado de dos expresiones Algebraicas, donde el denominador debe tener al menos una letra o variable.

Ejemplos:

$$\frac{x+3y}{x^2} \; ; \; \frac{5x-8}{x^3} \; ; \; \frac{x^3+y^3-z^3}{x+y+z} \; ; \; \frac{6x}{y} \; ; \; \frac{x^5-1}{x-2}$$

* El dividendo es el **Numerador** de la fracción y el divisor es el **denominador.**

3.1 CLASIFICACIÓN

3.1.1 FRACCIONES PROPIAS

Cuando el numerador es de menor grado que el denominador.

Ejemplos: $$\frac{x+1}{x^2+1} \; ; \; \frac{xy-3}{xy^2+1} \; ; \; \frac{x+6}{x^3-2} \; ; \; \frac{x^2+5x-2}{x^3-3x+1}$$

3.1.2 FRACCIONES IMPROPIAS

Cuando el numerador es de mayor grado que el **denominador.**

Ejemplos: $$\frac{x^3-1}{x^2-1} \; ; \; \frac{x^5+x^2-3}{x^3+x-2} \; ; \; \frac{x^2+1}{x} \; ; \; \frac{x^6+x^4+x^2-8}{x^2+3x-6}$$

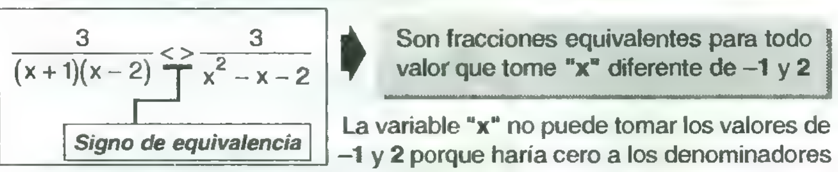
3.1.3 FRACCIONES HOMOGÉNEAS

Son aquellos que tienen igual denominador.

$$\frac{x}{y^3+2} \; ; \; \frac{5x^2}{y^3+2} \; ; \; \frac{-3x^4}{y^3+2} \; ; \; \frac{2x^6}{y^3+2}$$

3.1.4. *Fracciones Equivalentes:*

Dos fracciones algebraicas son **equivalentes** cuando tienen el mismo valor numérico para los mismos valores otorgados a sus variables, a excepción de aquellos que hagan cero su denominador como por ejemplo:



$$\frac{3}{(x+1)(x-2)} <> \frac{3}{x^2-x-2}$$

Son fracciones equivalentes para todo valor que tome **"x"** diferente de **–1** y **2**

La variable **"x"** no puede tomar los valores de **–1** y **2** porque haría cero a los denominadores y la división de un número conocido entre cero no está definido o no existe.

3.1.5 FRACCIONES COMPLEJAS O COMPUESTAS

Cuando tiene como numerador y/o denominador otras fracciones algebraicas.

Ejemplos:

i) $\dfrac{\dfrac{x}{x+1}-1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x+1}}}$	ii) $\dfrac{\dfrac{2}{x+1}+2}{2+\dfrac{2}{2+\dfrac{2}{x+1}}}$

3.1.6 FRACCIONES IRREDUCTIBLES

Son todas aquellas en que sus numeradores y denominadores son expresiones primas entre si, es decir,no tienen factor común.

Ejemplos: $\dfrac{x-2}{x+3}$; $\dfrac{x^2-7}{x+4}$; $\dfrac{x^3+1}{x-1}$; etc, son fracciones irreductibles

3.2 SIGNOS DE UNA FRACCIÓN

Los signos de toda fracción son tres: el signo de la fracción; el signo del numerador y el signo del denominador.

Ejemplo:

Signo de la fracción (+)
Signo del numerador (–)
Signo del denominador (+)

$$+\frac{-5x}{9x}$$

3.2.1 CAMBIOS DE UNA FRACCIÓN

Podemos anotar que:

$$\frac{x}{y}=-\frac{-x}{y}=-\frac{x}{-y}=\frac{-x}{-y}$$

é indicar que el resultado es el mismo si se cambian dos de los tres signos de la fracción.

Ejemplo 1: Dada la fracción: $\dfrac{b-a}{y-x}$

Cambiamos de signo a los términos del numerador y al denominador; obteniendo:

$$\frac{b-a}{y-x}=\frac{-b+a}{-y+x}=\frac{a-b}{x-y}$$

Ejemplo 2: Dada la fracción: $\dfrac{5}{1-x^2}$

Cambiamos de signo a la fracción a los términos del denominador, obteniendo:

$$\frac{5}{1-x^2}=-\frac{5}{-1+x^2}=-\frac{5}{x^2-1}$$

3.2.2 CAMBIOS DE SIGNOS A LOS FACTORES DEL NUMERADOR Y/O DENOMINADOR

1º) caso: Cuando se cambia de signo a un número par de factores, la fracción **No** cambia de signo.

Ejemplo 1: $\dfrac{x\cdot y}{z\cdot w}=\dfrac{x\cdot(-y)}{z\cdot(-w)}$

Ejemplo 2: $\dfrac{x\cdot y}{z\cdot w}=\dfrac{(-x)\cdot(-y)}{(-z)\cdot(-w)}$

2º) caso: Cuando se cambia de signo a un número impar de factores, la fracción SI cambia de signo.

Ejemplo 1: $\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{-x}$

Ejemplo 2: $\dfrac{x}{yz}=-\dfrac{x}{(-y)z}$

Ejemplo 3: $\dfrac{x}{yzw}=-\dfrac{x}{(-y)(-z)(-w)}$

3.2.3 PRINCIPIOS ACERCA DE LAS FRACCIONES

1. Al multiplicar el numerador de una fracción por un término cualquiera la fracción queda multiplicada por dicho término.

   Ejemplo: Sea la fracción: $\dfrac{3x}{5y}$

   Multiplico al numerador por "2z", obteniendo: $\dfrac{2z\cdot 3x}{5y}=\dfrac{6xz}{5y}$

2. Al dividir el numerador de una fracción por un término cualquiera , la fracción queda dividida entre dicho término.

   Ejemplo: Sea la fracción: $\dfrac{16x^3}{3x}$

Divide al numerador entre "4x", obteniendo: $\dfrac{16x^3 : 4x}{3x} = \dfrac{4x^2}{3x}$

3. Al multiplicar el denominador de una fracción por un término cualquiera, la fracción queda dividida entre dicho término.

Ejemplo: Sea la fracción: $\dfrac{4x}{5y^2}$

Multiplico al denominador por "3z", obteniendo: $\dfrac{4x}{5y^2 \cdot 3z} = \dfrac{4x}{15y^2z}$

4. Al dividir el denominador de una fracción entre un término cualquiera , la fracción queda multiplicada por dicho término.

Ejemplo: Sea la fracción: $\dfrac{6x}{8y^3}$

Divide al denominador entre "4y", obteniendo: $\dfrac{6x}{8y^3 : 4y} = \dfrac{6x}{2y^2}$

5. Al multipicar los dos términos de una fracción por un mismo número , tendremos como resultado otra fracción equivalente.

Ejemplo: Sea la fracción: $\dfrac{3x}{5y}$

Multiplico los dos términos de la fracción por "2x"; obteniendo:

$$\frac{3x \cdot 2x}{5y \cdot 2x} = \frac{6x^2}{10yx}$$

6. Al dividir los dos términos de una fracción entre un mismo término, tendremos como resultado otra fracción equivalente.

Ejemplo: Sea la fracción: $\dfrac{12xy}{15xz}$

Divide los dos términos de la fracción entre "3x"; obteniendo:

$$\frac{12xy : 3x}{15xz : 3x} = \frac{4y}{5z}$$

3.3 SIMPLIFICACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Simplificar una fracción algebraica es transformarla en otra equivalente e irreductible. Para simplificar una fracción se sugiere lo siguiente:

1) Factorizar el numerador y denominador de la fracción.
2) Se elimina los factores comunes (se cancelan)

Ejemplo 1: Simplificar: $\dfrac{6x^3 - 9x^2}{3ax^2}$

Resolución:

- Factorizamos el numerador: $6x^3 - 9x^2 = 3x^2(2x-3)$

Entonces:

$$\frac{6x^3-9x^2}{3ax^2} = \frac{3x^2(2x-3)}{3ax^2} = \frac{2x-3}{a}$$

Recuerda que:

$$\frac{A-Bx}{Cx} \neq \frac{A-B}{C}$$

* $\frac{2x-3}{a}$ es la fracción irreductible equivalente a $\frac{6x^3-9x^2}{3ax^2}$ para todo valor de "x" diferente a $\frac{3}{2}$ y para rodo valor de "a" diferente de cero.

i) $2x-3 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{3}{2}$	**ii)** $a \neq 0$

Ejemplo 2: Simplificar: $\frac{x^2+5x+6}{x^2+x-2}$

Resolución:

- Factorizamos el **numerador:** $x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$
- Factorizamos el **denominador:** $x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$

Entonces:

$$\frac{x^2+5x+6}{x^2+x-2} = \frac{\cancel{(x+2)}(x+3)}{\cancel{(x+2)}(x-1)} = \boxed{\frac{x+3}{x-1}}$$

$\boxed{\frac{x+3}{x-1}}$ **es la fracción irreductible equivalente a** $\boxed{\frac{x^2+5x+6}{x^2+x-2}}$

Para todo valor de **"x"** diferente a **1** y **–3** estos valores resultan de igualar al numerador y denominador de la fracción $\frac{x+3}{x-1}$ a cero, veamos:

i) $x+3=0 \Rightarrow \boxed{x=-3}$	**ii)** $x-1=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$

Ahora decimos que el valor de "x" es diferente a **1** y **–3**; porque si **"x"** toma estos valores la fracción $\frac{x+3}{x-1}$ seria de la forma $\frac{0}{0}$; siendo esta una forma **indeterminada** que lo estudiaremos en el capítulo sobre **límites.**

Ejemplo 3: Simplificar: $\frac{x^2-9}{x^2-x-6}$

Resolución:

- Factorizamos el **numerador:** $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x+3)(x-3)$
- Factorizamos el **denominador:** $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$

Entonces: $\dfrac{x^2-9}{x^2-x-6} = \dfrac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{(x+2)\cancel{(x-3)}} = \boxed{\dfrac{(x+3)}{(x+2)}}$

Ejemplo 4: Simplificar: $\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$

Resolución:

- Factorizamos el **numerador:** $x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x-2)(x^2+2x+2^2)$
- Factorizamos el **denominador:** $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x+2)(x-2)$

Entonces: $\dfrac{x^3-8}{x^2-4} = \dfrac{\cancel{(x-2)}\left(x^2+2x+2^2\right)}{(x+2)\cancel{(x-2)}} = \dfrac{x^2+2x+4}{x+2}$

Ejemplo 5: Simplificar: $\dfrac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2+c^2-b^2+2ac}$

Resolución:

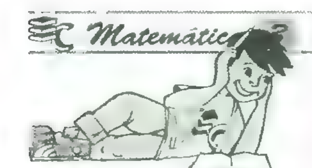
- Ordenamos términos tanto en el numerador como en el denominador; obteniendo:

$$\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2+c^2-b^2+2ac} = \frac{\left(a^2+2ab+b^2\right)-c^2}{\left(a^2+2ac+c^2\right)-b^2} = \frac{(a+b)^2-c^2}{(a+c)^2-b^2}$$

Por diferencia de cuadrados: $\boxed{A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)}$; se tiene:

$$\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2+c^2-b^2+2ac} = \frac{[(a+b)+c][(a+b)-c]}{[(a+c)+b][(a+c)-b]} = \frac{\cancel{(a+b+c)}(a+b-c)}{[\cancel{(a+b+c)}][(a-b+c)]}$$

$$\therefore \boxed{\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2+c^2-b^2+2ac} = \frac{a+b-c}{a-b+c}}$$



TALLER DE EJERCICIOS Nº

1. Simplificar las siguientes fracciones:

a) $\frac{ab}{3ax}$	b) $\frac{2a^2}{12ax^2}$	c) $\frac{a^2x}{5a^3bx^2}$
d) $\frac{6bx^2}{12b^2y}$	e) $\frac{8x^3y^3}{32x^5by^4}$	f) $\frac{-6b^3y^3}{-18b^3y^2x}$
g) $\frac{-9a^2b^2}{-27a^3b^3}$	h) $\frac{9xy^2-2x^3y^5}{xy^2}$	i) $\frac{3ab^2}{3a+6ab}$
j) $\frac{-5x^2y}{15x^2y^2-10x^3y}$	k) $\frac{x^2y^2}{3x^3y^3-2x^4y^4}$	l) $\frac{25a^3b^4+30a^4b^3}{10a^3b^2x}$

2. Factoriza el numerador y el denominador de cada fracción siguiente y luego simplifícala.

a) $\frac{x^2+5x+6}{x+2}$	b) $\frac{x^2+6x+9}{x+3}$	c) $\frac{y^2+7y+12}{y+4}$
d) $\frac{x^2-6x+8}{x-4}$	e) $\frac{x^2-7x+6}{x-6}$	f) $\frac{x^2-8x+15}{x-3}$
g) $\frac{x^2-9}{(x-3)^2}$	h) $\frac{(x+5)^2}{x^2-25}$	i) $\frac{x^2-1}{x^3-1}$
j) $\frac{2+a}{4-a^2}$	k) $\frac{(1/4)\ a^2-(1/9)\ b^2}{(1/2)\ a+(1/3)\ b}$	l) $\frac{9a^2-25x^2}{3a+5x}$
m) $\frac{\frac{a^2}{b^2}-16x^2}{\frac{a}{b}+4x}$	n) $\frac{1-\frac{x}{2}}{1-\frac{x^2}{4}}$	o) $\frac{125x^3-64y^3}{25x^2-16y^2}$

3. Factoriza el numerador y el denominador de cada fracción siguiente y luego simplifícala.

a) $\frac{x^3+3x^2}{x^2+6x+9}$	b) $\frac{x^2-(y-z)^2}{(x-y)^2-z^2}$	c) $\frac{3a^2-6a+3}{21a^2-63a+42}$
d) $\frac{y^3-6y^2+8y}{y^4-y^3-2y^2}$	e) $\frac{x^3-2x^2-3x}{(x^5-9x^3)(x+1)}$	f) $\frac{30x^2-18x-12}{16x^2+4x-20}$

g) $\dfrac{(x+a)^2-(b+c)^2}{(x+a)+(b+c)}$

h) $\dfrac{(x+2)+(a+1)}{(x+2)^2-(a+1)^2}$

i) $\dfrac{a(a+c)+b(c-b)}{c(a+c)+b(a-b)}$

j) $\dfrac{3ax^3+3a^3x-6a^2x^2}{ax^3-a^3x}$

k) $\dfrac{6(2x+2)}{12\left(x^2-1\right)}$

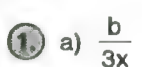
l) $\dfrac{\left(x^3+2x^2\right)\left(x^2-4\right)}{(3x+6)\left(x^3-8\right)}$

m) $\dfrac{ab\left(x^2+y^2\right)+xy\left(a^2+b^2\right)}{ab\left(x^2-y^2\right)+xy\left(a^2-b^2\right)}$

n) $\left[\dfrac{x^2-(m+n)x+mn}{x^2-(m+p)x+mp}\right]\left[\dfrac{x^2-p^2}{x^2-n^2}\right]$

o) $\dfrac{\left(x^2+2x+1\right)^2-\left(x^2+1\right)^2}{\left(x^2+1\right)^2-\left(x^2+2x+1\right)^2}$

RESPUESTAS TALLER 30



1.

a) $\dfrac{b}{3x}$ b) $\dfrac{a}{6x^2}$ c) $\dfrac{1}{5}abx$ d) $\dfrac{x^2}{2by}$

e) $\dfrac{1}{4}x^2by$ f) $\dfrac{-y}{3x}$ g) $\dfrac{1}{3}ab$ h) $9-2x^2y^3$

i) $\dfrac{b^2}{(1+2b)}$ j) $\dfrac{1}{(2x-3y)}$ k) $\dfrac{1}{xy}(3-2xy)$ l) $\dfrac{b(6a+5b)}{2x}$

2.

a) $x+3$ b) $x+3$ c) $y+3$

d) $x-2$ e) $x-1$ f) $x-5$

g) $\dfrac{x+3}{x-3}$ h) $\dfrac{x+5}{x-5}$ i) $\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$

j) $\dfrac{1}{2-a}$ k) $\dfrac{a}{2}-\dfrac{b}{3}$ l) $3a-5b$

m) $\dfrac{a}{b}-4x$ n) $\dfrac{2}{x+2}$ o) $\dfrac{25x^2+20xy+16y^2}{5x+4y}$

(3.) a) $\frac{x^2}{x+3}$	b) $\frac{x+y-z}{x-y-z}$	c) $\frac{(a-1)}{7(a-2)}$
d) $\frac{(y-4)}{y(y+1)}$	e) $\frac{1}{x^2(x+3)}$	f) $\frac{3(5x+2)}{2(4x+5)}$
g) $x+a-b-c$	h) $\frac{1}{(x-a+1)}$	i) $\frac{a+b}{b+c}$
j) $\frac{3(a-x)}{(a+x)}$	k) $\frac{1}{x-1}$	l) $\frac{x^2(x+2)}{3\left(x^2+2x+4\right)}$
m) $\frac{ax+by}{ax-by}$	n) $\frac{x+p}{x+n}$	o) -1

3.4 LÍMITES

Resolver un límite consiste en levantar una indeterminación utilizando operaciones convenientes de tal manera, que la expresión que se analiza tome un valor determinado.

Formas Indeterminadas

a) $\frac{0}{0}$ = **Indeterminada**

b) $\frac{\infty}{\infty}$ = **Indeterminada**

c) 0^0 = **Indeterminada**

d) $(\infty)^0$ = **Indeterminada**

e) $\infty-\infty$ = **Indeterminada**

f) 1^∞ = **Indeterminada**

Formas Determinadas

a) $\frac{0}{N}=0$	**d)** $\frac{N}{0}=\infty$
b) $\frac{N}{\infty}=0$	**e)** $\frac{\infty}{N}=\infty$
c) $\frac{0}{\infty}=0$	**f)** $\frac{\infty}{0}=\infty$

Donde: N = es un número diferente de cero

Ejemplo: Qué valor toma la expresión: $E=\frac{x^2-4}{x-2}$; cuando: $x=2$

Resolución:

Si reemplazamos x = 2, tendremos: $E=\frac{2^2-4}{2-2}=\frac{0}{0}$

Luego: E = Indeterminado

Por lo que si nos pidieran resolver:

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$; debemos levantar la indeterminación que se produce al reemplazar: **x = 2**

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}} = \lim_{x \to 2} (x+2)$$

Por lo que reemplazando x = 2, en la expresión resultante se obtiene:

$$\lim_{x \to 2} (x+2) = 2+2 = 4$$

$$\therefore \boxed{\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4}$$

La simbología: $\boxed{\lim\limits_{x \to n} \dfrac{E}{F} = k}$

Se lee:

El límite de $\dfrac{E}{F}$ cuando "x" tiende a "n" es igual a k.

* **De las cuatro formas indeterminadas sólo estudiaremos dos de ellas, los otros dos se estudiarán más adelante.**

Caso 1: **Forma** $\dfrac{0}{0}$

En este caso se deberá tomar en cuenta que si una expresión toma la forma $\dfrac{0}{0}$ para x = a, entonces; (x – a) deberá aparecer en el numerador y denominador de dicha expresión:

Ejemplo 1: Calcular: $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2-16}{x-4}$

Resolución:

Factorizando el numerador, se tiene: $\boxed{x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x+4)(x-4)}$

Luego:

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2-16}{x-4} = \lim_{x \to 4} \frac{(x+4)\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}} = \lim_{x \to 4} (x+4) = 4+4 = 8$$

$$\therefore \boxed{\lim_{x \to 2} \frac{x^2-16}{x-4} = 8}$$

Ejemplo 2: Calcular: $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3+8}{x+2}$

Resolución:

Factorizando el numerador, se tiene: $x^3+8=x^3+2^3=(x+2)(x^2-2x+4)$

Luego:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}\left(x^2-2x+4\right)}{\cancel{(x+2)}}$$

$$=\lim_{x\to -2}\left(x^2-2x+4\right)=(-2)^2-2(-2)+4=4+4+4=12$$

$$\therefore\ \boxed{\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2}=12}$$

Ejemplo 3: Calcular: $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^3+6x^2+12x+8}{x^2+4x+4}$

Resolución:

Factorizando el **numerador**:

$x^3+6x^2+12x+8=x^3+3x^2(2)+3x(2)^2+2^3=(x+2)^3$

Factorizando el **denominador**:

$x^2+4x+4=x^2+2x(2)+(2)^2=(x+2)^2$

Luego:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x^2+4x+4}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)^3}{(x+2)^2}$$

$$=\lim_{x\to -2}(x+2)=-2+2=0$$

$$\therefore\ \boxed{\lim_{x\to -2}\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x^2+4x+4}=0}$$

Ejemplo 4: Calcular: $\lim_{x\to -3}\dfrac{x^2+x-6}{x^2+8x+15}$

Resolución:

Factorizando el **numerador**: $x^2+x-6=(x+3)(x-2)$

Factorizando el **denominador**: $x^2+8x+15=(x+3)(x+5)$

Luego:

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2+x-6}{x^2+8x+15} = \lim_{x \to -3} \frac{\cancel{(x+3)}(x-2)}{\cancel{(x+3)}(x+5)}$$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{(x-2)}{(x+5)} = \frac{(-3)-2}{(-3)+5} = \frac{-5}{2}$$

$$\therefore \quad \boxed{\lim_{x \to -3} \frac{x^2+x-6}{x^2+8x+15} = \frac{-5}{2}}$$

Ejemplo 5: Calcular: $\lim_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

Resolución:

- Al sustituir la **x** por el número **1**, resulta de la forma $\frac{0}{0}$ = indeterminada.

  Veamos: $\boxed{\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{1-1}{\sqrt{1}-1} = \frac{0}{0} = \textbf{indeterminada}}$

- Para evitar esta indeterminada, racionalizamos el denominador, así:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)}{(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{\left(\sqrt{x}^2-1^2\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{(x-1)}}$$

$$= \lim_{x \to 1} (\sqrt{x}+1) = \sqrt{1}+1 = 2$$

$$\therefore \quad \boxed{\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = 2}$$

Otra Forma:

Calcular: $\lim_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

Resolución:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-1^2}{\sqrt{x}-1}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x}+1)\cancel{(\sqrt{x}-1)}}{\cancel{(\sqrt{x}-1)}}$$

Por artificio:

$$\boxed{x = \left(\sqrt{x}\right)^2}$$

Por diferencia de cuadrados:

$$\boxed{\sqrt{x^2}-1=\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x}+1\right)=\sqrt{1}+1=2$$

$$\therefore\quad \boxed{\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=2}$$

Ejemplo 6: Calcular: $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}$

Resolución:

- Al sustituir la **x** por el número **5**, resulta:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}=\frac{5^2-25}{2-\sqrt{4}}=\frac{25-25}{2-\sqrt{4}}=\frac{0}{0}=\textbf{Indeterminada}$$

- Para evitar esta indeterminada, racionalizamos el denominador, así:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}=\frac{\left(x^2-25\right)}{\left(2-\sqrt{x-1}\right)}\cdot\frac{\left(2+\sqrt{x-1}\right)}{\left(2+\sqrt{x-1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{\left(x^2-25\right)\left(2+\sqrt{x-1}\right)}{2^2-\left(\sqrt{x-1}\right)^2}$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to 5}\frac{\left(x^2-25\right)\left(2+\sqrt{x-1}\right)}{4-(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{\left(x^2-25\right)\left(2+\sqrt{x-1}\right)}{5-x}$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to 5}\frac{(x+5)\cancel{(x-5)}\left(2+\sqrt{x-1}\right)}{-\cancel{(x-5)}}$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to 5}\frac{(5+5)\left(2+\sqrt{5-1}\right)}{-1}=\frac{(10)(4)}{-1}$$

$$\therefore\quad \boxed{\lim_{x\to 1}\frac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}=-40}$$

Ejemplo 7: Calcular: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

Resolución:

- Al sustituir la **x** por el número **1**, resulta:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \frac{1-1}{\sqrt[3]{1}-1} = \frac{0}{0} = \textbf{indeterminada}$$

- Para evitar esta indeterminada, se procede de la siguiente manera:

Hacemos cambio de variable:

$$\sqrt[3]{x} = a \Rightarrow x = a^3 \text{ ; como: } \boxed{x=1}\text{; entonces } \sqrt[3]{1} = a \Rightarrow \boxed{1=a}$$

Luego: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \lim\limits_{a \to 1} \dfrac{a^3-1}{a-1}$

Pero: $a^3 - 1 = a^3 - 1^3 = (a-1)(a^2+a+1)$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \lim_{a \to 1} \frac{a^3-1}{a-1} = \lim_{a \to 1} \frac{\cancel{(a-1)}\left(a^2+a+1\right)}{\cancel{(a-1)}}$$

Reemplazamos el valor de a = 1; obtenemos:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \lim_{a \to 1} \left(a^2+a+1\right) = \left(1^2+1+1\right) = 3$$

$$\therefore \quad \boxed{\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \lim_{a \to 1} \frac{a^3-1}{a-1} = 3}$$

Ejemplo 8: Calcular: $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

Resolución:

- Al sustituir **x** por el número **9**; resulta:

$$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \frac{\sqrt{9}-3}{9-9} = \frac{3-3}{9-9} = \frac{0}{0}$$

- Para evitar esta indeterminada racionalizamos el numerador y luego simplificamos la fracción; veamos:

$$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \lim_{x \to 9} \frac{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}{(x-9)\left(\sqrt{x}+3\right)} = \lim_{x \to 9} \frac{\left(\sqrt{x}^2-3^2\right)}{(x-9)\left(\sqrt{x}+3\right)}$$

$$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \lim_{x \to 9} \frac{(x-9)}{(x-9)\left(\sqrt{x}+3\right)} = \lim_{x \to 9} \frac{1}{\sqrt{x}+3}$$

$$= \lim_{x \to 9} \frac{(x-9)}{(x-9)\left(\sqrt{x}+3\right)} = \lim_{x \to 9} \frac{1}{\sqrt{x}+3}$$

Ahora sustituimos el valor de **x = 9**

$$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \frac{1}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad \boxed{\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \frac{1}{6}}$$

Ejemplo 9: Calcular: $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

Resolución:

- Al sustituir **x** por cero; resulta:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{\sqrt{0+1}-1}{0} = \frac{0}{0} = \textbf{indeterminados}$$

- Para evitar esta indeterminada, racionalizamos el numerador, así:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-(1)^2}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x+1-1)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{x+1}+1\right)}$$

Una vez simplificada la fracción; reemplazamos el valor de **x = 0**; así:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{0+1}+1\right)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad \boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}+1}{x} = \frac{1}{2}}$$

Otra Forma:

Calcular: $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

Resolución:

Hacemos cambio de variable o sea:

$$\sqrt{x+1} = a \Rightarrow x+1 = a^2$$

$$\boxed{x = a^2-1} \text{ ; como: } \boxed{x=0} \text{; entonces } \sqrt{0+1} = a \Rightarrow \boxed{1=a}$$

Luego:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{a\to 1}\frac{(a-1)}{a^2-1}=\lim_{a\to 1}\frac{\cancel{(a-1)}}{(a+1)\cancel{(a-1)}}=\lim_{a\to 1}\frac{1}{(a+1)}$$

Reemplazando; a = 1, obtenemos:

$$\lim_{a\to 1}\frac{1}{(a+1)}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}\Rightarrow\therefore\ \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{a\to 1}\frac{a-1}{a^2-1}=\frac{1}{2}}$$

Caso 2: **Forma $\frac{\infty}{\infty}$**

En este caso, se debe proceder a dividir numerador y denominador por x^a donde "**a**" es el mayor exponente que afecta a la variable "**x**" en dicha expresión:

Ejemplo 1: Calcular: $\lim_{a\to\infty}\frac{5x^2+3x+2}{2x^2+5x+8}$

Resolución:

- Al sustituir la **x** por "**∞**", resulta:

$$\frac{5(\infty)^2+3(\infty)+2}{2(\infty)^2+5(\infty)+8}=\frac{\infty+\infty+2}{\infty+\infty+8}=\frac{\infty}{\infty}=\textbf{Indeterminado}$$

- Para evitar ésta indeterminada, habrá que dividir numerador y denominador entre x^2; pues **2** es el mayor exponente que afecta a la variable "**x**" en la expresión dada:

Luego:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+3x+2}{2x^2+5x+8}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^2+3x+2}{x^2}}{\frac{2x^2+5x+8}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}+\frac{8}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{2+\frac{5}{x}+\frac{8}{x^2}}$$; Reemplazando $x=\infty$, obtenemos:

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{3}{\infty}+\frac{2}{(\infty)^2}}{2+\frac{5}{\infty}+\frac{8}{(\infty)^2}}=\frac{5+\frac{3}{\infty}+\frac{2}{\infty}}{2+\frac{5}{\infty}+\frac{8}{\infty}}$$

Pero: $\frac{N}{\infty}=0$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5+0+0}{2+0+0}=\frac{5}{2}$$

$$\therefore \boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+3x+2}{2x^2+5x+8}=\frac{5}{2}}$$

Ejemplo 2: Calcular: $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+2x^2+5x+7}{\sqrt[3]{x^5+x^2+1}}$

Resolución:

Dividiendo el **numerador** y **denominador** entre $\mathbf{x^3}$; obtenemos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\dfrac{2x^3+2x^2+5x+7}{x^3}\right)}{\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^5+x^2+1}}{x^3}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\dfrac{2x^3}{x^3}+\dfrac{2x^2}{x^3}+\dfrac{5x}{x^3}+\dfrac{7}{x^3}\right)}{\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^5+x^2+1}}{\sqrt[3]{\left(x^3\right)^3}}\right)}$$

Por artificio:

$$x^3=\sqrt[3]{\left(x^3\right)^3}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(2+\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{7}{x^3}\right)}{\left(\sqrt[3]{\dfrac{x^5+x^2+1}{\left(x^3\right)^3}}\right)}$$

Recuerda que:

•) $\dfrac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}=\sqrt[n]{\dfrac{A}{B}}$

••) $\left(A^n\right)^m=A^{n\cdot m}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(2+\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{7}{x^3}\right)}{\left(\sqrt[3]{\dfrac{x^5}{\left(x^3\right)^3}+\dfrac{x^2}{\left(x^3\right)^3}+\dfrac{1}{\left(x^3\right)^3}}\right)}$$

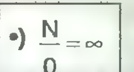
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(2+\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{7}{x^3}\right)}{\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^7}+\dfrac{1}{x^9}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2+\dfrac{2}{\infty}+\dfrac{5}{(\infty)^2}+\dfrac{7}{(\infty)^3}}{\sqrt[3]{\dfrac{1}{(\infty)^4}+\dfrac{1}{(\infty)^7}+\dfrac{1}{(\infty)^9}}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+2x^2+5x+7}{\sqrt[3]{x^5+x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+0+0+0}{\sqrt[3]{0+0+0}} = \frac{2}{0} = \infty$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+2x^2+5x+7}{\sqrt[3]{x^5+x^2+1}} = \infty$$

Recuerda que:



TALLER DE EJERCICIOS Nº 31

(1.) Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 4} \frac{3x-12}{x-4} =$

b) $\lim_{x\to -2} \frac{8+4x}{2+x} =$

c) $\lim_{x\to 2} \frac{x^4-4x^2}{x-2} =$

d) $\lim_{x\to 2/3} \frac{9x^2-4}{3x-2} =$

e) $\lim_{x\to -8} \frac{64-x^2}{x+8} =$

f) $\lim_{x\to 0} \frac{3x^2-2x}{x^2-5x} =$

g) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x+2} =$

h) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1} =$

i) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2-x-6}{x^2-4} =$

j) $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-3x-10}{x-5} =$

k) $\lim_{x\to 1/3} \frac{3x^2+7x+2}{3x+1} =$

l) $\lim_{x\to 1/2} \frac{2x^2+7x-4}{2x^2-3x+1}$

(2.) Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 4} \frac{4-x}{2-\sqrt{x}} =$

b) $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} =$

c) $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{2x}-2} =$

d) $\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{1-\sqrt{5-x}} =$

e) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2} =$

f) $\lim_{x\to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} =$

g) $\lim_{x\to 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} =$

h) $\lim_{x\to 16} \frac{4-\sqrt{x}}{x-16} =$

i) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} =$

j) $\lim_{x\to 8} \frac{1-\sqrt{4x-7}}{3x-6} =$

k) $\lim_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} =$

l) $\lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{2x}-\sqrt{x+2}}{x-2} =$

3. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2+2x-3}{3x^2-6x+2} =$

b) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{5x^3-x^2+x-1}{3x^2-6x+2} =$

c) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{4x^3+2x^2-5}{x+2-8x^3} =$

d) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{3x^5+2x^4-x^2+6}{x^3-2x^2+4x} =$

e) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^6-5x^2+3x^3-2}{7x^3-4x^2+3} =$

f) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{3x^2-8x+5}}{2x^3-6x+3} =$

g) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^6-2x^4+3x-1}}{3x^3-4x^2+6} =$

h) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{4x^2-6x+5}{3x^3-4x+2} =$

i) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^6-5x^2+x-6}{\sqrt[5]{x^4-3x^2+8}} =$

4. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 4} \dfrac{4x^2-25x+36}{3x^2-17x+20} =$

b) $\lim_{x \to -2} \dfrac{3x^2+3x-6}{x^3-2x^2-4x+8} =$

c) $\lim_{x \to 2} \left(\dfrac{12}{x^3-8}-\dfrac{1}{x-2}\right) =$

d) $\lim_{x \to a} \dfrac{x^2-a^2}{2x^2-ax-a^2} =$

e) $\lim_{x \to 0} \dfrac{(x+h)^3-x^3}{h} =$

f) $\lim_{x \to a} \dfrac{x^2-(a-2)x-2a}{x^2-(a-1)x-a} =$

g) $\lim_{x \to 4} \dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}} =$

h) $\lim_{x \to 1} \dfrac{(1+ax)^2-(a+x)^2}{1-x^2} =$

i) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x} =$

j) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt[3]{x+1}-1} =$

k) $\lim_{x \to a} \dfrac{\sqrt{b^2-x}-\sqrt{b^2-a}}{x-a} =$

l) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+a+b}-\sqrt{a+b}}{x} =$

CLAVE DE RESPUESTAS: GRUPO 32

1. a) 3 e) 16 i) 5/4	b) 4 f) 2/5 j) 7	c) 16 g) 12 k) 5/3	d) 4 h) 4 l) −9
2. a) 4 e) 16 i) $\sqrt{2}/4$	b) $2\sqrt{3}$ f) 6 j) − 4/15	c) 2 g) 12 k) 1/4	d) 2 h) -1/8 l) 1/4
3. a) 1/3 e) ∞ i) ∞	b) ∞ f) 0	c) − 1/2 g) 0	d) ∞ h) 0
4. a) 1 e) $3x^2$ i) 1/2	b) − 3/16 f) $\dfrac{a+2}{a+1}$ j) 3	c) − 1/2 g) − 1/3 k) $-\dfrac{1}{2\sqrt{b^2-a}}$	d) 2/3 h) $1-a^2$ l) $\dfrac{1}{2\sqrt{a+b}}$

3.5 REDUCCIÓN DE FRACCIONES A COMÚN DENOMINADOR

Para transformar varias fracciones en otras del mismo denominador, se halla el m.c.m. de todos los denominadores y se multiplican los dos términos de cada fracción por el cociente que resulta de dividir el **m.c.m.** por el denominador respectivo.

Ejemplo 1: Reduce al mínimo común denominador las fracciones:

$$\frac{3}{5x}\ ;\ \frac{8}{3xy}\ ;\ \frac{9}{6x^2y^2}$$

Resolución:

- Primero se busca el **m.c.m.** de: $5x$; $3xy$; $6x^2y^2$

$5x$	$3xy$	$6x^2y^2$	2
$5x$	$3xy$	$3x^2y^2$	3
$5x$	xy	x^2y^2	5
x	xy	x^2y^2	x
1	y	xy^2	x
1	y	y^2	y
1	1	y	y
1	1	1	

$$\text{m.c.m.} = 2\cdot3\cdot5\cdot x\cdot x\cdot y\cdot y = \boxed{30x^2y^2}$$

Donde:

1.) $\boxed{30x^2y^2} : ⑤x = 6xy^2 \;\blacktriangleright\; \dfrac{3}{5x} = \dfrac{3\cdot 6xy^2}{5x.6xy^2} = \dfrac{18xy^2}{30x^2y^2}$

2.) $\boxed{30x^2y^2} : (3xy) = 10xy \;\blacktriangleright\; \dfrac{8}{3xy} = \dfrac{8\cdot 10xy}{3xy\cdot 10xy} = \dfrac{80xy}{30x^2y^2}$

3.) $\boxed{30x^2y^2} : (6x^2y^2) = 5 \;\blacktriangleright\; \dfrac{9}{3xy} = \dfrac{9\cdot 5}{6x^2y^2\cdot 5} = \dfrac{45}{30x^2y^2}$

Luego, las fracciones: $\dfrac{3}{5x};\ \dfrac{8}{3xy};\ \dfrac{9}{6x^2y^2}$ son respectivamente equivalentes a:

$$\boxed{\dfrac{18xy^2}{30x^2y^2};\ \dfrac{80xy}{30x^2y^2};\ \dfrac{45}{30x^2y^2}}$$

Ejemplo 2: Reduce al mínimo común denominador las fracciónes:

$$\frac{2}{x};\ \frac{5}{x+1};\ \frac{x+4}{x^2-1}$$

Resolución:

- Se busca el **m.c.m.** de: $\boxed{x}$; $(x+1)$; $\boxed{x^2-1=(x+1)(x-1)}$

$$\begin{array}{ccccc|l} x & - & (x+1) & - & (x+1)(x-1) & x \\ 1 & - & (x+1) & & (x+1)(x-1) & (x+1) \\ 1 & - & 1 & - & (x-1) & (x-1) \\ 1 & - & 1 & - & 1 & \end{array} \Bigg\} \quad \text{m.c.m.} = \boxed{x(x+1)(x-1)}$$

Donde:

1.) $\boxed{x(x+1)(x-1)} : \boxed{x} = (x+1)(x-1) \;\blacktriangleright\; \dfrac{2}{x} = \dfrac{2(x+1)(x-1)}{x(x+1)(x-1)} = \dfrac{2(x^2-1)}{x(x^2-1)}$

2.) $\boxed{x(x+1)(x-1)} : (x+1) = x(x-1) \;\blacktriangleright\; \dfrac{5}{x+1} = \dfrac{5\cdot x\cdot(x-1)}{(x+1)x(x-1)} = \dfrac{5x(x-1)}{x(x^2-1)}$

3.) $\boxed{x(x+1)(x-1)} : \boxed{(x^2-1)} = x \;\blacktriangleright\; \dfrac{x+4}{x^2-1} = \dfrac{(x+4)\cdot x}{(x+1)(x-1)\cdot x} = \dfrac{x(x+4)}{x(x^2-1)}$

Luego las fracciones $\dfrac{x}{2};\ \dfrac{5}{x+1};\ \dfrac{x+4}{x^2-1}$; son equivalentes a:

$$\boxed{\dfrac{2(x^2-1)}{x(x^2-1)};\ \dfrac{5x(x-1)}{x(x^2-1)};\ \dfrac{x(x+4)}{x(x^2-1)}}$$

Ejemplo 3: Reduce al mínimo común denominador las fracciones:

$$\frac{2x}{x^2-4x+3} \; ; \; \frac{5x^2}{x^2+x-12}$$

Resolución:

- En primer lugar, factorizamos los denominadores:

$* \; x^2-4x+3=(x-3)(x-1)$ $* \; x^2+x-12=(x+4)(x-3)$

El **m.c.m.** es igual al producto de los factores primos comunes y no comunes con su mayor exponente, siendo en este caso:

El común denominador: $(x-3)(x-1)(x+4)$

Luego:

$$\frac{2x}{x^2-4x+3}=\frac{2x}{(x-3)(x-1)}=\frac{2x(x+4)}{(x-3)(x-1)(x+4)}$$

$$\frac{5x^2}{x^2+x-12}=\frac{5x^2}{(x-3)(x+4)}=\frac{5x^2(x-1)}{(x-3)(x-1)(x+4)}$$

Ejemplo 4: Reduce al mínimo común denominador las fracciones:

$$\frac{ax}{a-x} \; ; \; \frac{2a^2x^2}{a^2-2ax+x^2}=\frac{2a^2+x^2}{a^2-x^2}$$

Resolución:

- En primer lugar, factorizamos los denominadores:

$* \; a^2-2ax+x^2=(a-x)(a-x)=(a-x)^2$ $* \; a^2-x^2=(a+x)(a-x)$

- En segundo lugar, hallamos el **m.c.m. de los denominadores:**

$$(a-x) \; ; \; a^2-2ax+x^2=(a-x)^2 \; ; \; a^2-x^2=(a+x)(a-x)$$

El **m.c.m.** es igual al producto de los factores primos comunes y no comunes con su mayor exponente, siendo en este caso

El común denominador: $(a-x)^2(a+x)$

Luego: $\dfrac{ax}{(a-x)} = \dfrac{ax\ (a-x)(a+x)}{(a-x)^2\,(a+x)} = \dfrac{ax\ (a^2-x^2)}{(a-x)^2\,(a+x)}$

$$\frac{2a^2x^2}{a^2-2ax+x^2} = \frac{2a^2x^2}{(a-x)^2} = \frac{2a^2x^2(a+x)}{(a+x)(a-x)^2}$$

$$\frac{2a^2x^2}{a^2-x^2} = \frac{2a^2x^2}{a^2-x^2} = \frac{(2a^2+x^2)(a-x)}{(a+x)(a-x)^2}$$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 32

1. Reducir al común denominador las siguientes fracciones:

a) $\dfrac{3}{x}$; $\dfrac{2}{y}$; $\dfrac{5xy}{z}$

b) $\dfrac{a}{3x}$; $\dfrac{3x}{4x^2}$; $\dfrac{5}{2x^3}$

c) $\dfrac{3a}{2x}$; $\dfrac{4b}{3x}$; $\dfrac{6}{9x}$

d) $\dfrac{4x}{3xy}$; $\dfrac{5x}{xy}$; $\dfrac{3a}{6}$

e) $\dfrac{3a}{2x^2y^3}$; $\dfrac{2b}{3x^3y^2}$; $\dfrac{ab}{xy}$

f) $\dfrac{3}{7x^2}$; $\dfrac{5b}{14y^2}$; $\dfrac{8ab}{21xy}$

2. Reducir al común denominador las siguientes fracciones:

a) $\dfrac{x}{x+y}$; $\dfrac{xy}{x-y}$; $\dfrac{3x^2-2xy}{x^2-y^2}$

b) $\dfrac{ab}{3+x}$; $\dfrac{3ab}{3-x}$; $\dfrac{1}{9-x^2}$

c) $\dfrac{3x}{x+2}$; $\dfrac{5x}{x-2}$; $\dfrac{6c^3-10}{x^2-4}$

d) $\dfrac{2}{2x+2}$; $\dfrac{5}{3x-3}$; $\dfrac{12}{6x^2-6}$

e) $\dfrac{2a}{(x+1)^2}$; $\dfrac{3b}{x^2-1}$; $\dfrac{5x}{2x+2}$

f) $\dfrac{3a}{x^2-16}$; $\dfrac{8}{3x+12}$; $\dfrac{3}{4x-16}$

3. Completar el numerador de cada grupo de fracciones; sabiendo que en cada grupo las fracciones son homogéneas (el mismo denominador).

a) $\dfrac{3a}{5xy^2}=\dfrac{3a\square}{10x^2y^2}$

$\dfrac{5b}{10x^2y}=\dfrac{5b\square}{10x^2y^2}$

$\dfrac{7c}{2xy}=\dfrac{7c\square}{10x^2y^2}$

b) $\dfrac{5x}{12x^3y^2}=\dfrac{5x\square}{36x^3y^4}$

$\dfrac{3yz}{6xy^4}=\dfrac{3yz\square}{36x^3y^4}$

$\dfrac{11y}{18x^2y^3}=\dfrac{11y\square}{36x^3y^4}$

c) $\dfrac{3ab}{2x^2y^3}=\dfrac{3ab\square}{42x^3y^4}$

$\dfrac{2b^2c}{14x^3y^4}=\dfrac{2b^2c\square}{42x^3y^4}$

$\dfrac{5ac^3}{21x^2y^3}=\dfrac{5ac^3\square}{42x^3y^4}$

d) $\dfrac{3x}{x^2-4}=\dfrac{3x\square}{y(x+2)(x-2)}$

$\dfrac{5y}{x+2}=\dfrac{5y\square}{y(x+2)(x-2)}$

$\dfrac{8xy^2}{y(x-2)}=\dfrac{8xy^2\square}{y(x+2)(x-2)}$

e) $\dfrac{5x}{x^2+2x-3}=\dfrac{5x\square}{(x-1)(x-2)(x+3)}$

$\dfrac{2(x+5)}{x^2+x-2}=\dfrac{2(x+5)\square}{(x-1)(x-2)(x+3)}$

$\dfrac{3(x-2)}{(x+2)(x+3)}=\dfrac{3(x-2)\square}{(x-1)(x+2)(x+3)}$

f) $\dfrac{3x}{x^2-x-2}=\dfrac{3x\square}{\left(x^2-4\right)(x+1)}$

$\dfrac{(x+2)}{x^2-4}=\dfrac{(x+2)\square}{\left(x^2-4\right)(x+1)}$

$\dfrac{(x+5)}{x-2}=\dfrac{(x+5)\square}{\left(x^2-4\right)(x+1)}$

4. Reducir el común denominador las siguientes fracciones:

a) $\dfrac{x+1}{x-1}\ ;\ \dfrac{x-1}{x+1}\ ;\ \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

b) $\dfrac{x+2}{x^2-25}\ ;\ \dfrac{x-3}{x^2-10x+25}\ ;\ \dfrac{5x^2}{x+5}$

c) $\frac{2}{a+1}$; $\frac{6}{a^3+1}$; $\frac{4}{a^2-a+1}$

d) $\frac{x}{x+2}$; $\frac{x-1}{x^2-x-2}$; $\frac{x+1}{x^2-4}$

e) $\frac{3}{x^2+4x+3}$; $\frac{4}{x^2-2x-3}$; $\frac{5}{x^2+2x+1}$

f) $\frac{x+2}{x^2-2x-3}$; $\frac{x-4}{x^2+5x+6}$; $\frac{x-1}{x^2-x-12}$

3.6 OPERACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS

3.6.1 SUMA DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

Sumar dos o más fracciones es hallar una nueva fracción; veamos los siguientes casos:

1er Caso: Suma de Fracciones Algebraicas con Iguales Denominadores

Para sumar dos o más fracciones que tienen iguales denominadores, se suman solamente sus numeradores, dejando el mismo denominador.

Ejemplo 1: Sumar: $\frac{2a}{7x}+\frac{y}{7x}+\frac{3b}{7x}$

Resolución:

$$\frac{2a}{7x}+\frac{y}{7x}+\frac{3b}{7x}=\frac{2a+y+3b}{7x}$$

Ejemplo 2: Sumar: $\frac{3}{x+3}+\frac{5n}{x+3}+\frac{8m}{x+3}$

Resolución:

$$\frac{3}{x+3}+\frac{5n}{x+3}+\frac{8m}{x+3}=\frac{3+5n+8m}{x+3}$$

2do Caso: Suma de Fracciones con Distintos Denominadores

Para sumar dos o más fracciones con distintos denominadores, se proceoe de la siguiente manera:

1º) Se simplifica cada fracción dada, si fuera posible
2º) Se halla el **m.c.m.** de los denominadores
3º) Se divide el **m.c.m.** hallado entre cada uno de los denominadores y el resultado se multiplica por el respectivo numerador

4º) Se reducen los términos semejantes en el numerador y en el denominador

5º) Se simplifica la fracción resultante, si fuera posible.

Ejemplo 1: Sumar: $\frac{2a}{3x}+\frac{4b}{6y}+\frac{a^2+b^2}{2xy}$

Resolución:

- Simplificamos en la segunda fracción, obteniendo:

$$\frac{2a}{3x}+\frac{4b}{6y}+\frac{a^2+b^2}{2xy}=\frac{2a}{3x}+\frac{2b}{3y}+\frac{a^2+b^2}{2xy}$$

- Hallamos el **m.c.m.** de los denominadores:

$$\begin{array}{ccc|c} 3x & 3y & 2xy & 3 \\ x & y & 2xy & 2 \\ x & y & xy & x \\ 1 & y & y & y \\ 1 & 1 & 1 & \end{array} \quad \text{m.c.m.} = 3\cdot 2\cdot x\cdot y = \boxed{6xy}$$

Luego, dividimos **6xy** entre cada denominador y el resultado se multiplica por el respectivo numerador, veamos:

$$\frac{2a}{3x}+\frac{4b}{6y}+\frac{a^2+b^2}{2xy}=\frac{2a}{3x}+\frac{2b}{3y}+\frac{a^2+b^2}{2xy}=\frac{2a(2y)+2b(2x)+\left(a^2+b^2\right)3}{6xy}$$

$$\boxed{\frac{2a}{3x}+\frac{4b}{6y}+\frac{a^2+b^2}{2xy}=\frac{4ay+4bx+3\left(a^2+b^2\right)}{6xy}}$$

Ejemplo 2: Sumar: $\frac{x+3}{x^2-xy}+\frac{3x-2}{xy+y^2}+\frac{5}{2xy}$

Resolución:

- Factorizamos los dos primeros denominadores:

$\boxed{*\ x^2-xy=x(x-y)}$; $\boxed{*\ xy+y^2=y(x+y)}$

- Hallamos el **m.c.m.** de los denominadores:

i) $x^2-xy=x(x-y)$

ii) $xy+y^2=y(x+y)$

iii) $2xy=2xy$

Recuerda que:

El **m.c.m.** es igual al producto de los factores primos comunes y no comunes con su mayor exponente.

$\boxed{\text{m.c.m.}=2xy(x+y)(x-y)}$

Luego:

$$\frac{x+3}{x^2-xy}+\frac{3x-2}{xy+y^2}+\frac{5}{2xy}=\frac{x+3}{x(x-y)}+\frac{3x-2}{y(x+y)}+\frac{5}{2xy}$$

$$=\frac{(x+3)[2y(x+y)]+(3x-2)[2x(x-y)]+5[(x+y)(x-y)]}{2xy(x+y)(x-y)}$$

$$=\frac{(x+3)\left(2xy+2y^2\right)+(3x-2)\left(2x^2+2xy\right)+5\left(x^2-y^2\right)}{2xy(x+y)(x-y)}$$

$$=\frac{2x^2y+2xy^2+6xy+y^2+6x^3-6x^2y-4x^2+4xy+5x^2-5y^2}{2xy(x+y)(x-y)}$$

$$=\boxed{\frac{6x^3+x^2-4x^2y+10xy+2xy^2+y^2}{2xy\left(x^2-y^2\right)}}$$

Ejemplo 3: Sumar: $\frac{x+3}{x+1}+\frac{x-2}{x^2-1}$

Resolución:

$$\frac{x+3}{x+1}+\frac{x-2}{x^2-1}=\frac{x+3}{(x+1)}+\frac{x-2}{(x+1)(x-1)}$$

Damos común denominador siendo este: $\boxed{(x+1)(x-1)}$

$$\frac{x+3}{x+1}+\frac{x-2}{x^2-1}=\frac{(x+3)(x-1)+(x-2)(1)}{\boxed{(x+1)(x-1)}}$$

$$=\frac{x^2+2x-3+x-2}{\boxed{(x+1)(x-1)}}=\boxed{\frac{x^2+3x-5}{x^2-1}}$$

Ejemplo 4: Sumar: $M=\frac{1}{x-5}+\frac{2}{x^2-8x+15}+\frac{1}{x^2-5x+6}$

Resolución:

- Factorizando los denominadores, se tiene:

$$M=\frac{1}{x-5}+\frac{2}{(x-3)(x-5)}+\frac{1}{(x-3)(x-2)}$$

- Hallamos el **m.c.m.** de los denominadores, siendo este: $\boxed{(x-5)(x-3)(x-2)}$

$$M=\frac{1[(x-3)(x-2)]+2[(x-2)]+1[(x-5)]}{(x-5)(x-3)(x-2)}$$

$$M=\frac{\left(x^2-5x+6\right)+(2x-4)+(x-5)}{(x-5)(x-3)(x-2)}$$

$$M=\frac{x^2-2x-3}{(x-5)(x-3)(x-2)}=\frac{\cancel{(x-3)}(x+1)}{(x-5)\cancel{(x-3)}(x-2)}=\frac{x+1}{(x-5)(x-2)}$$

$$\therefore\quad \boxed{M=\frac{x+1}{x^2-7x+10}}$$

3.6.2 RESTA DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

1er Caso: Resta de Fracciones que tienen Iguales Denominadores

Para restar una fracción de otra y teniendo ambas iguales denominadores, se busca la diferencia entre sus numeradores, dejando el mismo denominador.

Ejemplo 1: De $\frac{3a}{4x^2}$ restar: $\frac{2b}{4x^2}$

Resolución:

$$\frac{3a}{4x^2}-\frac{2b}{4x^2}=\frac{3a-2b}{4x^2}$$

Ejemplo 2: De $\frac{4x}{5y^3}$ restar: $\frac{6z}{5y^3}$

Resolución:

$$\frac{4x}{5y^3}-\frac{6z}{5y^3}=\frac{4x-6z}{5y^3}$$

El Signo Negativo Delante de una Fracción: Cuando delante de una expresión hay el signo (–), este signo afecta a todos los términos del numerador osea al efectuar la resta se cambian los signos en el numerador.

Ejemplo:

$$\frac{2x-5}{y+2}-\frac{x-3}{y+2}=\frac{(2x-5)-(x-3)}{y+2}=\frac{2x-5-x+3}{y+2}=\frac{x-2}{y+2}$$

2do Caso: Resta de Fracciones que tienen Distintos Denominadores

Para restar una fracción de otra que tienen distintos denominadores, se procede de la siguiente manera:

1º) Se simplifica cada fracción dada, si fuera posible.
2º) Se halla el **m.c.m.** de los denominadores
3º) Se divide el **m.c.m.** hallado entre cada uno de los denominadores y el resultado se multiplica por el respectivo numerador.
4º) Se reducen los términos semejantes en el numerador y en el denominador.
5º) Se simplifica la fraccion resultante, si fuera posible.

Ejemplo 1: Efectuar la resta: $\dfrac{5x-3}{x+1}-\dfrac{2x^2-4x+2}{x^2-1}$

Resolución:

- Factorizamos el numerador y denominador de la segunda fracción:

Numerador: $2x^2-4x+2=2(x^2-2x+1)=2(x-1)(x-1)$

Denominador: $x^2-1=(x+1)(x-1)$

Donde:

$$\frac{5x-3}{x+1}-\frac{2x^2-4x+2}{x^2-1}=\frac{5x-3}{x+1}-\frac{2(x-1)\cancel{(x-1)}}{(x+1)\cancel{(x-1)}}$$

Como se observará estas dos últimas fracciones son homogéneas

Luego: $$\frac{5x-3}{x+1}-\frac{2x^2-4x+2}{x^2-1}=\frac{5x-3-2(x-1)}{x+1}=\frac{5x-3-2x+2}{x+1}$$

$$\therefore \frac{5x-3}{x+1}-\frac{2x^2-4x+2}{x^2-1}=\frac{3x-1}{x+1}$$

Nota:

En este ejercicio no se ha dado común denominador, pues al simplificar la segunda fracción a resultado una fracción de denominador igual a la primera osea homogéneas.

Ejemplo 2: Efectuar la resta: $\dfrac{3x}{x^2+4x+3}-\dfrac{4(x+1)}{x^2-2x-3}$

Resolución:

- Factorizamos los denominadores de las dos fracciones:

* $x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$; * $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$

Donde:

$$\frac{3x}{x^2+4x+3}-\frac{4(x+1)}{x^2-2x-3}=\frac{3x}{(x+1)(x+3)}-\frac{4\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x-3)}$$

$$=\frac{3x}{(x+1)(x+3)}-\frac{4}{(x-3)}$$

- Hallamos el **m.c.m.** de los denominadores, siendo este:

$$(x+1)(x+3)(x-3)$$

$$\frac{3x}{x^2+4x+3}-\frac{4(x+1)}{x^2-2x-3}=\frac{}{(x+1)(x+3)(x-3)}$$

- Dividimos el **m.c.m.** hallado entre cada uno de los denominadores y el resultado se multiplica por el respectivo numerador.

$$\frac{3x}{x^2+4x+3}-\frac{4(x+1)}{x^2-2x-3}=\frac{3x(x-3)-4x(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+3)(x-3)}$$

$$=\frac{3x^2-9x-4\left(x^2+4x+3\right)}{(x+1)(x+3)(x-3)}$$

$$=\frac{3x^2-9x-4x^2-16x-12}{(x+1)(x+3)(x-3)}$$

$$\therefore \boxed{\frac{3x}{x^2+4x+3}-\frac{4(x+1)}{x^2-2x-3}=\frac{-x^2-25x-12}{(x+1)(x+3)(x-3)}}$$

3.6.3. SUMA Y RESTA DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

Con frecuencia se presentan casos en los cuales hay las operaciones de suma y resta en un mismo ejercicio, en este caso se trata tan sólo de la reducción de sus términos.

Si dichas fracciones tienen distintos denominadores se les reduce al común denominador y luego se efectuan las operaciones indicadas.

Ejemplo 1: Reducir: $\frac{2a^2-x^2}{3x^3}-\frac{4x}{6x^2}+\frac{5}{8x}$

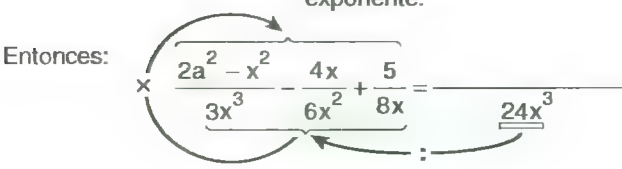
Resolución:

$$\frac{2a^2-x^2}{3x^3}-\frac{4x}{6x^2}+\frac{5}{8x}=\frac{2a^2-x^2}{3x^3}-\frac{2}{3x}+\frac{5}{8x}$$

Luego, hallamos el **m.c.m.** de los denominadores, siendo este:

$3\cdot8\cdot x^3=24x^3$; pues el **m.c.m.** es igual al producto de los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

Entonces:



$$\frac{2a^2-x^2}{3x^3}-\frac{4x}{6x^2}+\frac{5}{8x}=\frac{}{24x^3}$$

- Ahora dividimos el **m.c.m.** hallado **($24x^3$)** entre cada uno de los denominadores y el resultado se multiplica por el respectivo numerador.

$$\frac{2a^2-x^2}{3x^3}-\frac{4x}{6x^2}+\frac{5}{8x}=\frac{8\left(2a^2-x^2\right)-4x(4x)+3x^2(5)}{24x^3}$$

$$=\frac{16a^2-8x^2-16x^2+15x^2}{24x^3}=\frac{16a^2-9x^2}{24x^3}$$

$$\therefore\quad \boxed{\frac{2a^2-x^2}{3x^3}-\frac{4x}{6x^2}+\frac{5}{8x}=\frac{16a^2-9x^2}{24x^3}}$$

Ejemplo 2: Reducir: $E=\dfrac{x+3}{4-x^2}-\dfrac{x-2}{4-2x}+\dfrac{4}{4+2x}$

Resolución:

- Factorizamos los denominadores:

$$\boxed{*\ 4-x^2=2^2-x^2=(2+x)(2-x)}$$

$$\boxed{*\ 4-2x=2(2-x)}\ ;\ \boxed{*\ 4+2x=2(2+x)}$$

$$E=\frac{x+3}{4-x^2}-\frac{x-2}{4-2x}+\frac{4}{4+2x}=\frac{x+3}{(2+x)(2-x)}-\frac{(x-2)}{2(2-x)}+\frac{4}{2(2+x)}$$

Recuerda que:

$$\boxed{-(x-2)=+(2-x)}$$

$$E=\frac{x+3}{(2+x)(2-x)}+\frac{\cancel{(2-x)}}{2\cancel{(2-x)}}+\frac{4}{2(2+x)}$$

$$E=\frac{x+3}{(2+x)(2-x)}+\frac{1}{2}+\frac{4}{2(2+x)}$$

Damos común denominador, siendo este: $\boxed{2(2+x)(2-x)}$

$$E=\frac{x+3}{(2+x)(2-x)}+\frac{1}{2}+\frac{4}{2(2+x)}=\frac{2(x+3)+1(2+x)(2-x)+4(2-x)}{2(2+x)(2-x)}$$

$$E=\frac{(2x+6)+\left(2^2-x^2\right)+(8-4x)}{2(2+x)(2-x)}=\frac{2x+6+4-x^2+8-4x}{2\left(4-x^2\right)}$$

$$\therefore\quad \boxed{E=\frac{-x^2-2x+18}{2\left(4-x^2\right)}}$$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 33

1. Efectuar las siguientes sumas:

a) $\dfrac{3}{x+4}+\dfrac{2}{x+4}+\dfrac{8}{x+4}$

b) $\dfrac{3ab}{2+x}+\dfrac{ab}{2+x}+\dfrac{5ab}{2+x}$

c) $\dfrac{3C}{5x+2y}+\dfrac{C}{5x+2y}+\dfrac{6C}{5x+2y}$

d) $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x-1}{x-1}+\dfrac{3x+8}{x-1}$

e) $\dfrac{8-x}{x+5}+\dfrac{2x+6}{x+5}+\dfrac{5x-3}{x+5}$

f) $\dfrac{2a^2-b^2}{1+x}+\dfrac{8a^2\ \ 2b^2}{1+x}+\dfrac{5b^2-12}{1+x}$

2. Efectuar las siguientes sumas:

a) $\dfrac{3a}{5}+\dfrac{8a}{3}+\dfrac{a}{2}$

b) $\dfrac{2xy}{3}+\dfrac{6xy}{4}+\dfrac{xy}{6}$

c) $\dfrac{5a}{8x}+\dfrac{3a}{4x}+\dfrac{a}{2x}$

d) $\dfrac{x+5}{8}+\dfrac{x+3}{4}+\dfrac{x\ \ 5}{6}$

3. Efectuar las siguientes sumas:

a) $\dfrac{2xy}{x-y}+\dfrac{3y^3}{x^2-y^2}+\dfrac{4xy}{x+y}$

b) $\dfrac{3}{(1-2x)}+\dfrac{6}{(1+2x)}+\dfrac{4\ \ 20x}{1-4x^2}$

c) $\dfrac{2a}{(a+x)}+\dfrac{3x}{(a-x)}+\dfrac{5x^2+2a^2}{a^2-x^2}$

d) $\dfrac{2ax+x^2}{(a\ \ x)^2}+\dfrac{3x}{(a-x)}+\dfrac{5x^2+2a^2}{a^2-x^2}$

e) $\dfrac{5}{3\,(1+5x)}+\dfrac{2}{2-10x}+\dfrac{10\,(5x^2-2x)}{1-25x^2}$

f) $\dfrac{3x^2+2xy+y^2}{x+y}+\dfrac{4x^2-3xy+2y^2}{x-y}+\dfrac{2y^3-3y^2+4x^2}{x^2-y^2}$

4. Efectuar las siguientes sumas:

a) $\dfrac{2(x+2)}{2x-1}-\dfrac{3(x+1)}{2x-1}$

b) $\dfrac{5(2+x)}{x+1}-\dfrac{2(3x-1)}{x+1}$

c) $\dfrac{4-2x}{1+2x}-\dfrac{3(-2+6x)}{1+2x}$

d) $\dfrac{2x}{x^2-y^2}-\dfrac{1}{x+y}$

e) $\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{5-x^2}{x^2-1}$

f) $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}$

g) $\frac{3(x-5)}{4x-12}-\frac{2x-15}{6x-18}$

h) $\frac{2x+3y}{2x-3y}-\frac{2x-3y}{2x+3y}$

i) $\frac{x+a}{4x-8}-\frac{2x-a}{2x+4}$

j) $\frac{3x+1}{3x-1}-\frac{3x-1}{3x+1}$

5. Efectuar las siguientes restas:

a) $\frac{x-2y}{x+y}-\frac{xy+3y^2}{x^2+2xy+y^2}$

b) $\frac{5x+2}{x-3}-\frac{15x}{x^2-3x}$

c) $\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}-\frac{3xy-3y^2}{2x^2+4xy+2y^2}$

d) $\frac{1}{x^2-2x+1}-\frac{1}{x^2+2x+1}$

e) $\frac{x+2}{x^2+8x+15}-\frac{x-3}{x^2-2x-15}$

f) $\frac{2x+1}{x^2-4x+3}-\frac{3x-2}{x^2-5x+4}$

6. Halla el resultado de cad una de las operaciones siguientes:

a) $\frac{3a}{2}+\frac{5a}{7}-\frac{a}{14}-\frac{15a}{6}$

b) $\frac{2x+1}{4}-\frac{x-1}{5}+\frac{8x}{10}-\frac{12x}{20}$

c) $\frac{x^2+2x}{4}-\frac{x^2-3x}{6}-\frac{x^2}{3}-\frac{x}{12}$

d) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-\frac{x+y}{y}$

e) $\frac{3}{1+x}-\frac{5}{1-x}-\frac{2x}{1-x^2}$

f) $\left(\frac{x-1}{10a}+\frac{x-2}{15a}\right)-\left(\frac{x+3}{4a}-\frac{x-6}{6a}\right)$

g) $\frac{x^2-2x-1}{3}-\frac{x-3}{42}+\frac{5}{14}-\frac{x^2+2x-3}{4}$

h) $\frac{4-x}{2x-3}+\frac{3(x-1)}{2x+3}-\frac{5\left(x^2-2x\right)}{4x^2-9}$

i) $\frac{x^2-2x+1}{4x^2-8x+4}-\frac{x^2+2x+1}{4x^2+8x+4}+\frac{2x^4-3}{2}$

j) $\frac{x-3}{3x-3}-\frac{x+4}{2x+2}+\frac{x+1}{x-1}$

7. Halla el resultado de cad una de las operaciones siguientes:

a) $\frac{2x}{3x^2-12}-\frac{5x-1}{6x^2-12}+\frac{x+1}{4x^2+8x}$

b) $\frac{3x+2}{x-1}-\frac{x-3}{x+2}+\frac{x+2}{x-3}$

c) $\dfrac{x^3}{x-1}-\dfrac{x^2}{x+1}+\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}$

d) $\dfrac{3}{2x-4}-\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{x+10}{2x^2-8}$

e) $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{b-2a}{a^2-b^2}-\dfrac{a}{a^2+b^2}+\dfrac{2a^3}{a^4-b^4}$

f) $\dfrac{1}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{1}{(a+b)(b+c)}-\dfrac{1}{(c+a)(c+b)}$

g) $\dfrac{2x-y}{x-y}-\dfrac{12x^2-4xy-2y^2}{3x^2-3y^2}+\dfrac{7x}{3x+3y}$

h) $\dfrac{x}{x^2+2x-3}+\dfrac{x-3}{(1-x)(x+2)}-\dfrac{x}{(1-x)(x+2)(x+3)}+\dfrac{1}{x+2}$

RESPUESTAS TALLER 33

1. d) $\dfrac{5x+8}{x-1}$ e) $\dfrac{6x+11}{x+5}$ f) $\dfrac{10a^2+2b^2-12}{1+x}$

2. a) $\dfrac{113a}{30}$ b) $\dfrac{7}{3}xy$ c) $\dfrac{15a}{8x}$ d) $\dfrac{13(x+1)}{24}$

3. a) $\dfrac{y(6x^2-2xy+3y^2)}{(x+y)(x-y)}$ b) $\dfrac{13}{1+2x}$

c) $\dfrac{8x^2+ax+4a^2}{(a+x)(a-x)}$ d) $\dfrac{-7x^3+8ax^2-3a^2x+2a^3}{(a+x)(a-x)^2}$

e) $\dfrac{2\left(75x^2-35x+4\right)}{3\left(1-25x^2\right)}$ f) $\dfrac{7x^3+4x^2-8xy^2-2xy^2-3y^2+3y^3}{x^2-y^2}$

4. a) $\dfrac{1-x}{2x-1}$ b) $\dfrac{12-x}{x+1}$ c) $\dfrac{10(1-2x)}{1+2x}$ d) $\dfrac{1}{x-y}$

e) $\dfrac{3x-5}{x-1}$ f) $\dfrac{4x}{x^2-1}$ g) $\dfrac{5}{12}$ h) $\dfrac{24xy}{4x^2-9y^2}$

i) $\dfrac{-3x^2+3ax+10x-2a}{4\left(x^2-4\right)}$ j) $\dfrac{12x}{9x^2-1}$

5. a) $\dfrac{x^2-2xy-5y^2}{(x+y)^2}$	b) $\dfrac{5x-13}{x-3}$	c) $\dfrac{2x-5y}{2(x+y)}$
d) $\dfrac{4x}{\left(x^2-1\right)^2}$	e) $\dfrac{5(1-x)}{(x+3)\left(x^2-25\right)}$	f) $\dfrac{-x^2+4x-10}{(x-1)(x-3)(x-4)}$

6. a) $-\dfrac{5}{14}a$	b) $\dfrac{10x+9}{20}$	c) $\dfrac{9x^2-x}{12}$
d) $\dfrac{y-x}{x}$	e) $\dfrac{8}{1-x^2}$	f) $\dfrac{5x-119}{60a}$
g) $\dfrac{7x^2-100x+71}{84}$	h) $\dfrac{-x^2+21}{4x^2-9}$	i) $\dfrac{2x^4-3}{2}$
j) $\dfrac{4x^2+3x-19}{6\left(x^2-1\right)}$		

7. a) $\dfrac{x-3}{12x(x-2)}$	b) $\dfrac{3x^3+15x^2-35x-7}{(x-1)(x+2)(x-3)}$	c) x^2+1
d) 0	e) 0	f) $\dfrac{2c}{(a+b)(b+c)(a+c)}$
g) $\dfrac{1}{3}$	h) $\dfrac{1}{(x-1)}$	

3.6.4 PRODUCTOS DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

Se procede como sigue:

1º) Se factorizan los numeradores y denominadores de las fracciones que se van a multiplicar.

2º) Se suprimen (cancelan) los factores comunes en el numerador y denominador.

3º) Se multiplican todos los factores que quedan en los numeradores, el resultado es el numerador del producto y de igual forma se multiplican todos los factores que queden en los denominadores, el resultado es el denominador del producto.

Ejemplo 1: Efectuar: $\dfrac{x^2-9}{x^2-x-6}\cdot\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1}$

Resolución:

* Factorizando los numeradores y denominadores de cada fracción se obtiene:

$$\frac{x^2-9}{x^2-x-6}\cdot\frac{x^2+3x+2}{x^2-1}=\frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)(x+2)}\cdot\frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-1)}$$

* Cancelando los factores comunes tanto en el numerador y denominador se obtiene:

$$\frac{x^2-9}{x^2-x-6}\cdot\frac{x^2+3x+2}{x^2-1}=\boxed{\frac{x+3}{x-1}}$$

Ejemplo 2: Efectuar: $\frac{x^2-x-12}{x^2+3x-10}\cdot\frac{x^2-3x+2}{x^2-3x-4}\cdot\frac{x^2-25}{x^2-1}$

Resolución:

* Factorizando los numeradores y denominadores de cada fracción se obtiene:

$$\frac{x^2-x-12}{x^2+3x-10}\cdot\frac{x^2-3x+2}{x^2-3x-4}\cdot\frac{x^2-25}{x^2-1}=\frac{\cancel{(x-4)}(x+3)}{\cancel{(x+5)}\cancel{(x-2)}}\cdot\frac{\cancel{(x-1)}\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-4)}(x+1)}\cdot\frac{\cancel{(x+5)}(x-5)}{(x+1)\cancel{(x-1)}}$$

* Cancelando los factores comunes tanto en el numerador y denominador se obtiene:

$$\frac{x^2-9}{x^2-x-6}\cdot\frac{x^2+3x+2}{x^2-1}\cdot\frac{x^2-25}{x^2-1}=\frac{(x+3)(x-5)}{(x+1)(x+1)}$$

* Efectuamos los productos indicados tanto en el numerador como denominador, obtenemos:

$$\frac{x^2-x-12}{x^2+3x-10}\cdot\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x-4}\cdot\frac{x^2-25}{x^2-1}=\frac{(x+3)(x-5)}{(x+1)(x+1)}=\boxed{\frac{x^2-2x-15}{x^2+2x+1}}$$

Ejemplo 3: Efectuar: $\frac{x^2-81}{2x^2+10x}\cdot\frac{x+11}{x^2-36}\cdot\frac{x^3+5x^2}{2x+22}\cdot\frac{2x-12}{2x+18}$

Resolución:

* Factorizando los numeradores y denominadores de cada fracción se obtiene:

$$\frac{\cancel{(x+9)}(x-9)}{2x\cancel{(x+5)}}\cdot\frac{\cancel{(x+11)}}{(x+6)\cancel{(x-6)}}\cdot\frac{x^2\cancel{(x+5)}}{2\cancel{(x+11)}}\cdot\frac{2\cancel{(x-6)}}{2\cancel{(x+9)}}$$

* Cancelando los factores comunes tanto en el numerador y denominador se obtiene:

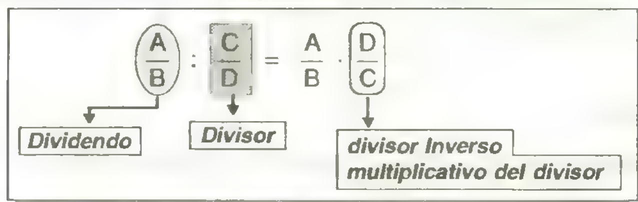
$$\frac{(x-9)\cdot x}{2\cdot(x+6)\cdot 2}$$

* Se efectuan los productos indicados tanto en el numerador como denominador, obteniendo:

$$\boxed{\frac{x^2 - 9x}{4x + 24}}$$

3.6.5 COCIENTES DE DOS FRACCIONES ALGEBRAICAS

El cociente de dos fracciones algebraicas se obtiene multiplicando la fracción dividiendo por el inverso Multiplicativo de la fracción divisor.



Ejemplo 1: Efectuar: $\frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + x - 2} : \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - x - 6}$

Resolución:

Inverso multiplicativo

$$\frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + x - 2} : \boxed{\frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - x - 6}} = \frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + x - 2} \cdot \boxed{\frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 4x + 3}}$$

* Factorizando los numeradores y denominadores de cada fracción, se obtiene:

$$\frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + x - 2} : \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - x - 6} = \frac{\cancel{(x+3)}(x+4)}{\cancel{(x+2)}(x-1)} \cdot \frac{(x-3)\cancel{(x+2)}}{(x+1)\cancel{(x+3)}}$$

* Cancelando los factores comunes, tanto en el numerador como denominador, se obtiene:

$$\frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + x - 2} : \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - x - 6} = \frac{(x+4)(x-3)}{(x-1)(x+1)}$$

* Efectuamos los productos indicados tanto en el numerador como denominador, obtenemos

$$\frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + x - 2} : \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - x - 6} = \boxed{\frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 1}}$$

Ejemplo 2: Efectuar: $R = \left(\frac{x+2}{2} - \frac{x+1}{6}\right) : \frac{2x+5}{3}$

Resolución:

* Damos común denominador a las fracciones que estan entre paréntesis.

$$R=\left(\frac{3(x+2)-1(x+1)}{6}\right):\boxed{\frac{2x+5}{3}}=\frac{\cancel{2x+5}}{6}\cdot\boxed{\frac{3}{\cancel{2x+5}}}$$

$$R=\frac{\cancel{3}}{\cancel{6}}\Rightarrow\ \therefore\ \boxed{R=\frac{1}{2}}$$

Ejemplo 3: Efectuar: $Q=\cfrac{1}{x-\cfrac{x}{x-\cfrac{x^2}{x+1}}}$

Resolución:

* Para este ejercicio se empieza a operar de abajo hacia arriba

$$Q=\cfrac{1}{x-\cfrac{x}{\cfrac{x}{1}-\cfrac{x^2}{x+1}}}=\cfrac{1}{x-\cfrac{x}{\cfrac{x(x+1)-x^2}{x+1}}}$$

$$Q=\cfrac{1}{x-\cfrac{\cfrac{x}{1}}{\cfrac{x(x+1)-x^2}{(x+1)}}}=\cfrac{1}{x-\cfrac{x(x+1)}{x(x+1)-x^2}}$$

Recuerda que:

- $\frac{A}{B}-\frac{C}{D}=\frac{A\cdot D-B\cdot C}{B\cdot D}$
- $\cfrac{\cfrac{E}{F}}{\cfrac{M}{N}}=\frac{E\cdot N}{F\cdot M}$

$$Q=\cfrac{1}{\cfrac{x}{1}-\cfrac{\left(x^2+x\right)}{x}}=\cfrac{1}{\cfrac{x^2-\left(x^2+x\right)}{x}}=\cfrac{1}{\cfrac{-x}{x}}=\frac{1}{-1}=-1\ \Rightarrow\ \therefore\ \boxed{Q=-1}$$

Ejemplo 4: Efectuar: $M=\left(1-\frac{a^3}{x^3}\right):\left(\frac{1}{x^2}-\frac{a}{x^3}\right)$

Resolución:

$$M=\left(\frac{1}{1}-\frac{a^3}{x^3}\right):\left(\frac{1}{x^2}-\frac{a}{x^3}\right)$$; damos común denominador a las fracciones que estan entre paréntesis

$$M=\left(\frac{x^3-a^3}{x^3}\right):\left(\frac{x-a}{x^3}\right)$$

Recuerda que:

$$\boxed{x^3-a^3=(x-a)(x^2+xa+a^2)}$$

$$M = \frac{\cancel{(x-a)}\left(x^2+xa+a^2\right)}{\cancel{x^3}} \cdot \frac{\cancel{x^3}}{\cancel{(x-a)}} \Rightarrow \therefore \boxed{M = x^2+xa+a^2}$$

Ejemplo 5: Efectuar: $P = \dfrac{x-1+\dfrac{6}{x-6}}{x-2+\dfrac{3}{x-6}}$

Resolución:

La expresión dada, se puede escribir así:

$$P = \frac{\dfrac{x-1}{1}+\dfrac{6}{x-6}}{\dfrac{x-2}{1}+\dfrac{3}{x-6}} \text{ ; Aplicamos: } \boxed{\frac{A}{1}+\frac{B}{C}=\frac{A\cdot C+B}{C}}$$

Obteniendo: $P = \dfrac{\left[\dfrac{(x-1)(x-6)+6}{x-6}\right]}{\left[\dfrac{(x-2)(x-6)+3}{x-6}\right]}$; Aplicamos: $\boxed{\dfrac{\left(\dfrac{M}{\cancel{N}}\right)}{\left(\dfrac{K}{\cancel{N}}\right)} = \dfrac{M}{K}}$

$$P = \frac{\left(x^2-7x+6\right)+6}{\left(x^2-8x+12\right)+3} = \frac{x^2-7x+12}{x^2-8x+15}$$; factorizamos el numerador y el denominador:

$$P = \frac{\cancel{(x-3)}(x-4)}{\cancel{(x-3)}(x-5)} \Rightarrow \therefore \boxed{P = \frac{(x-4)}{(x-5)}}$$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 34

1. Multiplicar las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{3(x+y)}{2(x-y)} \cdot \dfrac{x^2-y^2}{6x}$	b) $\dfrac{2a}{x-y} \cdot \dfrac{x^2-y^2}{8ax}$
c) $\dfrac{15x-30}{2x} \cdot \dfrac{3x}{5x-10}$	d) $\dfrac{(a-1)^2}{2y^2} \cdot \dfrac{4y(a+1)}{a^2-1}$
e) $\dfrac{5a+5}{2a^2+4a+2} \quad \dfrac{2a^2-2}{10\ (a^2-1)}$	f) $\dfrac{4a^2+4a}{x^2-2xy+y^2} \cdot \dfrac{x^2-y^2}{8(a+1)}$

g) $\dfrac{x^2+11x+30}{x^2+7x+10}\cdot\dfrac{x^2-25}{x^2+10x+25}$

h) $\dfrac{2a^2+5a+3}{3a^2+8a+4}\cdot\dfrac{3a^2-a-2}{2a^2+a-3}$

i) $\dfrac{6a^2+12ab}{5x^2+15xy}\cdot\dfrac{15x\left(x^2+6xy+9y^2\right)}{12a^2(a+2b)}$

2. Multiplicar las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x^2y^2}{y}\cdot\dfrac{xy}{a(x+y)}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{axy}$

b) $\dfrac{x^2+3x+2}{x+3}\cdot\dfrac{x^2+6x+9}{x^2+4x+4}\cdot\dfrac{x+2}{x^2+4x+3}$

c) $\dfrac{a+x}{(b+y)^2}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{18(b+y)}\cdot\dfrac{(b+y)^2}{b-y}\cdot\dfrac{6\left(b^2-y^2\right)}{x+y}$

d) $\dfrac{a^2-b^2}{16-x^2}\cdot\dfrac{64-x^3}{a^3-b^3}\cdot\dfrac{a^2+ab+b^2}{16+4x+x^2}$

e) $\dfrac{a^2+ax+x^2}{ax^2-x^3}\cdot\dfrac{a^2x^2-x^4}{a^3-x^3}\cdot\dfrac{3x^3}{9(a+x)}$

f) $\left(\dfrac{a+b}{2a-2b}-\dfrac{a-b}{2a+2b}+\dfrac{2b^2}{a^2-b^2}\right)\left(\dfrac{a-b}{2b}\right)$

g) $\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2x^2}{1-x^2}\right)\left(\dfrac{1-x}{x}\right)\left(\dfrac{x+x^2}{2x}\right)$

h) $\dfrac{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}{6\left(x^2-y^2\right)}\cdot\dfrac{3x+3y}{(a-b)^2}$

i) $\left(\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{x+y}{x-y}\right)\left(\dfrac{x^2+2xy+y^2}{2xy}\right)\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)$

j) $\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}\cdot\dfrac{2x^2+x-1}{5x^2+11x+2}\cdot\dfrac{3x^2+8x+4}{6x-3}$

3. Dividir las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x^2+10x+16}{x^2+9x+20}:\dfrac{x^2+9x+8}{x^2+6x+5}$

b) $\dfrac{2a^2+7a+5}{a^2+3a+2}:\dfrac{2a^2+3a-5}{4a^2-4}$

c) $\dfrac{36-a^2}{a^2-7a+12}:\dfrac{36+12a+a^2}{a^2-5a+6}$

d) $\left(\dfrac{2a^2b}{a+b}+\dfrac{2ab^2}{a-b}\right):\left(\dfrac{2ab}{a^2+2ab+b^2}\right)$

e) $\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}\right):\left(\dfrac{2x}{1-2x+x^2}\right)$

f) $\left(\dfrac{2a+2}{4}+\dfrac{a}{5}\right):\left(\dfrac{a+3}{3}-\dfrac{a-2}{2}\right)$

g) $\left(\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{x}{6}\right):\left(\dfrac{x+1}{3}+\dfrac{x}{6}\right)$

h) $\left(\dfrac{6-6x}{x-1}\right):\left(\dfrac{6}{5x-2}+\dfrac{4}{3x-1}\right)$

i) $\left(\dfrac{a^2+2a+1}{a^2-1}\right):\left(\dfrac{a+1}{a-1}:\dfrac{a^2+3a+2}{(a-1)^2}\right)$

j) $\left(\dfrac{3x^2+8x+4}{2x+1}:\dfrac{5x^2+11x+2}{(2x)^2-1}\right):\left(\dfrac{3x+2}{2x-1}\right)$

4. Efectuar las siguientes operaciones indicadas:

a) $\left(1-x^2\right)\left(1+x+\dfrac{3+x^3}{1-x}\right)$

b) $\left(1-\dfrac{1}{a+1}\right)\left(1+\dfrac{1}{a}\right)$

c) $\left(a-x+\dfrac{2x^2}{a+x}\right)\left(a^2-x^2\right)$

d) $\left(x+\dfrac{2xy}{x-y}\right)\left(y-\dfrac{2xy}{x+y}\right)$

e) $\left(\dfrac{a+b}{4x}-a-b\right)\left(\dfrac{2x^2}{a+b}\right)$

f) $\left(a^4-\dfrac{1}{a^2}\right)\left(a^2+\dfrac{1}{a}\right)$

g) $\left(a-\dfrac{b-a}{1+ab}\right)\left(1-\dfrac{ab-a^2}{1+ab}\right)$

h) $\left(x^2-x+\dfrac{2x^2+x}{4}\right):\left(2x-1+\dfrac{2x-1}{5}\right)$

i) $\left(1-\dfrac{2+a^2+2a}{2a+3}\right):\left(\dfrac{a+1}{6a+9}\right)$

j) $\left(\dfrac{9-x^2}{9+6x+x^2}:\dfrac{3-x}{3+x}\right):\left(\dfrac{2+x}{3x}-1\right)$

5. Efectuar las operaciones y reducirlas a su mínima expresión:

a) $\dfrac{x+\dfrac{x}{x-1}}{x-\dfrac{x}{x-1}}$ b) $\dfrac{1-\dfrac{a-b}{a+b}}{\dfrac{a+b}{a-b}-1}$ c) $1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$

d) $1-\dfrac{x}{1+x+\dfrac{2x^2}{1-x}}$ e) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$ f) $\dfrac{\dfrac{x}{x-a}+\dfrac{a}{x+a}}{\dfrac{x}{x-a}-\dfrac{a}{x+a}}$

g) $\dfrac{\dfrac{x^2}{2a^2}-4+\dfrac{6a^2}{x^2}}{\dfrac{x}{2a}-\dfrac{3a}{x}}$ h) $\dfrac{\dfrac{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}{x^3-y^3}}{\dfrac{(x+y)^2}{x^2+xy+y^2}}$

i) $\dfrac{\dfrac{a-1}{a}+\dfrac{b-1}{b}+\dfrac{c-1}{c}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}$ j) $\dfrac{\dfrac{a-1}{a}+\dfrac{b-1}{b}+\dfrac{c-1}{c}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}$

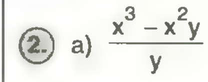
k) $\dfrac{1+\dfrac{x+y}{x-y}}{1-\dfrac{x+y}{x-y}}:\dfrac{1+\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}{1-\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$ l) $\dfrac{\dfrac{ax+a}{ax+1}-\dfrac{a+1}{ax+1}+1}{\dfrac{a+1}{ax+1}-\dfrac{ax+a}{ax+1}+1}$

RESPUESTAS TALLER 34

1. a) $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{4x}$ b) $\dfrac{x+y}{4x}$ c) 9/2

d) $\dfrac{2(a-1)}{y}$ e) $\dfrac{1}{2(a+1)}$ f) $\dfrac{a(x+y)}{2(x-y)}$

g) $\dfrac{x^2+x-30}{x^2+7x+10}$ h) $\dfrac{a+1}{a+2}$ i) $\dfrac{3x+9y}{2a}$



2. a) $\dfrac{x^3-x^2y}{y}$ b) 1 c) $\dfrac{x^2+ax-ay-xy}{3}$

d) $\dfrac{a+b}{x+4}$ e) $\dfrac{x^3}{3a-3x}$ f) 1

g) $\dfrac{2x^2-x+1}{2x}$ h) $\dfrac{a-b}{2x-2y}$ i) $\dfrac{x+y}{x-y}$

j) $\dfrac{3x+2}{3}$

3. a) $\dfrac{x+2}{x+4}$ b) $\dfrac{a^2-8a+12}{a^2+2a-24}$ c) $\dfrac{4a+4}{a+2}$

d) $\dfrac{a^3+a^2b+ab^2+b^3}{a-b}$ e) $\dfrac{1-x}{1+x}$ f) $\dfrac{21a+15}{60-5a}$

g) $\dfrac{2x+3}{3x+2}$ h) $\dfrac{45x^2-33x+6}{x-1}$ i) $\dfrac{a^2+3a+2}{a^2-2a+1}$

j) $\dfrac{4x^2-4x+1}{5x+1}$

4. a) x^4-x^2+4x+4 b) 1 c) $a^3-a^2x+ax^2-x^3$

d) $-xy$ e) $\dfrac{-4x^2+x}{2}$ f) $a^2-\dfrac{1}{a}$

g) $\dfrac{a^2b+2a-b}{1+a^2}$ h) $\dfrac{5x}{8}$ i) $3-3a$

j) $\dfrac{3x}{2-2x}$

5. a) $\dfrac{x}{x-2}$ b) $\dfrac{a-b}{a+b}$ c) $\dfrac{1}{x+1}$

d) $\dfrac{x^2-x+1}{1+x^2}$ e) $x+1$ f) $\dfrac{x^2+2ax-a^2}{x^2+a^2}$

g) $\dfrac{x^2-2a^2}{ax}$ h) $\dfrac{x+y}{x-y}$ i) $\dfrac{3abc-(ab+bc+ac)}{ab+bc+ac}$

j) $\dfrac{ab+b^2}{b-a}$ k) $\dfrac{y^2-xy}{x^2}$ l) ax

EJERCICIOS DE REFORZAMIENTO SOBRE SIMPLIFICACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Ejercicio 1: Después de simplificar: $\dfrac{x^2-y^2}{xy} - \dfrac{xy-y^2}{xy-x^2}$; resulta:

A) x/y **B)** y/x **C)** 0 **D)** 1 **E)** x^2/y

Ejercicio 2: Señalar el resultado de efectuar:

$$R=\frac{8}{(x^2+3)(x^2-1)}+\frac{2}{x^2+3}+\frac{1}{x+1}$$

A) 1 **B)** $x-1$ **C)** 0 **D)** $\dfrac{1}{x-1}$ **E)** $x+2$

Ejercicio 3: Sumar: $Q = \dfrac{xy}{ab} + \dfrac{(x-a)(y-a)}{a(a-b)} + \dfrac{(x-b)(y-b)}{b(b-a)}$

A) 1 **B)** $x-a$ **C)** $y-a$ **D)** $x-b$ **E)** $y-b$

Ejercicio 4: Reducir: $M = \dfrac{x-\dfrac{x-1}{x+1}}{1+\dfrac{x\,(x-1)}{x+1}}$

A) 0 **B)** 1 **C)** x **D)** $-x$ **E)** $x+1$

Ejercicio 5: Simplificar: $T = \dfrac{(x+y)^2-(xy+1)^2}{x^2-1}$

A) x^2-1 **B)** $1-x^2$ **C)** y^2-1 **D)** $1-y^2$ **E)** x^2

Ejercicio 6: Al reducir:

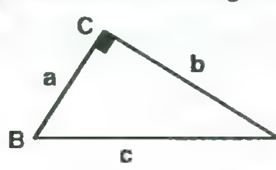
$$\frac{1}{x^2-3+2x}+\frac{1}{1-3x^2+2x}-\frac{2}{3x^2+10x+3}$$; se obtiene:

A) 1 **B)** x **C)** 0 **D)** $x-1$ **E)** $x+1$

Ejercicio 7: Simplificar: $k = \dfrac{(x+y)^4-(x-y)^4}{8x^3y+8xy^3}$

A) 0 B) 1 C) x D) y E) xy

Ejercicio : Si se tiene el triángulo rectángulo:



Entonces: $E = \dfrac{c^2 - b^2}{a} - \dfrac{a^2 - c^2}{b}$

Se reduce a:

A) $E = a - b$ B) $E = a + b$ C) $E = b^2 - a^2$
D) $E = a^2 + b^2$ E) ab

Ejercicio : Reducir: $R = \dfrac{\left(a^3 + b^3\right)^2 - \left(a^2 + b^2\right)^3}{(a+b)^2 - 4\left(a^2 + b^2\right)}$

A) $ab(a^2 + b^2)$ B) $\dfrac{a^2 + b^2}{ab}$ C) $\dfrac{ab\,(a+b)}{a^2 + b^2}$

D) a^2b^2 E) $\dfrac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2}$

Ejercicio : Señale el numerador resultante al efectuar y reducir a su mínima expresión:

$$\frac{x^2 + 5x + 6}{2x^3 + 6x^2 + 4x} + \frac{x^2 + x - 6}{2x^3 - 6x^2 + 4x}$$

A) $x(x + 1)$ B) $x(x + 2)$ C) $x(x + 3)$ D) $x(x + 4)$ E) $x(x + 5)$

Clave de Respuestas

1. A 2. D 3. A 4. B 5. D 6. C 7. B 8. B 9. D 10. C

3.6.6 RADICACIÓN ALGEBRAICA

Así como la potencia es el producto de varios factores iguales, de igual manera la radicación tiene por objeto encontrar los factores conociendo su producto, de aquí la potencia y la radicación son dos operaciones correspondientes entre si, osea:

$$(3x)^2 = (3x)(3x) = 9x^2 \quad y \quad \sqrt{9x^2} = \sqrt{(3x)^2} = 3x$$

El cuadrado de 3x es igual a $9x^2$; ($3x \,.\, 3x = 9x^2$) y la raíz cuadrada de $9x^2$ es igual a 3x; ($\sqrt{9x^2} = 3x$).

Así mismo el cubo de **5z** es igual a **$125z^3$** y la raíz cúbica de **$125z^3$** es igual a **5z** y así análogamente.

Sabemos que la raíz n-ésima de x; denotado por $\sqrt[n]{x}$ es el número "r" si se cumple que: $r^n = x$

$$\sqrt[n]{x} = r \Rightarrow r^n = x$$

Se dice que:

- $\sqrt[n]{x}$ ***: Es el radical, x: cantidad subradical o radicando***
- n ***: Es el índice; r: es la raíz***

* ***Radical es la raíz indicada de un número***
* ***Signo radical es el símbolo mediante el cual se indica la operación:***
* ***Radicando o cantidad subradical es el número cuya raíz se quiere hallar***
* ***Indice de la raíz es igual al exponente a que hay que elevar la raíz para obtener el radicando.***

RADICAL es la raíz indicada de un número en general de una expresión algebraica como por ejemplo:

$$\sqrt{x} \ ; \ \sqrt[3]{6z} \ ; \ \sqrt[4]{y^6}$$

* En la expresión: $\sqrt[n]{x}$

Si: n = 2, es la raíz cuadrada, y se acostumbra a omitir el índice ⇨ Así: $\sqrt[n]{x} = \sqrt[2]{36} = \sqrt{36}$

Si: n = 3, es la raíz cúbica ⇨ Así: $\sqrt[n]{x} = \sqrt[3]{27}$

Si: n = 4, es la raíz cuarta y así sucesivamente. ⇨ Así: $\sqrt[n]{x} = \sqrt[4]{16}$

3.6.6.1. Clasificación de los Radicales:

I. Considerando la naturaleza de los radicales éstos pueden ser:

a) Racionales: Son aquellos, de cuyos subradicales se extraen raíces exactas.

Por ejemplo; son racionales: $\sqrt{9x^2} = 3x \ ; \ \sqrt[3]{8x^3} = 2x$

b) Irracionales: Son aquellos de cuyos subradicales no se extraen raíces exactas.

Por ejemplo. Son irracionales: $\sqrt{7ab} \ ; \ \sqrt[3]{9x^2}$

c) ***Reales:*** Son aquellos cuyos subradicales son positivos y cuyos índices son números pares.

Por ejemplo, son reales: $\sqrt{33}$; $\sqrt[4]{14x^2}$

d) ***Imaginarios:*** Son aquellos cuyos índices son números pares y cuyos subradicales son negativos.

Por ejemplo, son imaginarios: $\sqrt{-4x^2}$; $\sqrt[4]{-9x^4}$

II. Con respecto a su especie los radicales pueden ser:

a) ***Homogeneos:*** Son aquellos radicales que tienen el mismo índice.

Por ejemplo, son homogéneos:

i) $3\sqrt{5x}$ y $7\sqrt{8z}$	ii) $9a\sqrt[3]{x^2y}$ y $2b\sqrt[3]{z}$

b) ***Heterogéneas:*** Son dos o más radicales con distintos índices.

Por ejemplo, son heterogéneos: $3x\sqrt{8a}$; $5z\sqrt[3]{2x^2}$; $\sqrt[5]{2y^3}$

c) ***Semejantes:*** Son dos o más radicales que tienen iguales índices y la misma parte subradical; sólo se diferencian por los coeficientes.

Por ejemplo, son semejantes:

1) $3ab\sqrt[3]{2x}$; $-5m\sqrt[3]{2x}$; $2p\sqrt[3]{2x}$ ⇨
- Parte subradical: **2x**
- Indices: **3**
- Coeficientes: **3ab ; –5m ; 2p**

2) $x^2\sqrt{4b^2}$; $2x\sqrt{4b^2}$; $-\frac{1}{3}z\sqrt{4b^2}$ ⇨
- Parte subradical: $\mathbf{4b^2}$
- Indices: **2**
- Coeficientes: $\mathbf{x^2}$; **2x** ; $\mathbf{-\frac{1}{3}z}$

3.6.6.2. Propiedades de los radicales:

1º) No cambia de valor el radical al multiplicar el exponente o exponentes del subradical y el índice del radical por una misma cantidad.

Ejemplos:

a) $\sqrt[3]{x^4} = \sqrt[3\cdot2]{x^{4\cdot2}} = \sqrt[6]{x^6}$

b) $\sqrt{z} = \sqrt[2\cdot5]{x^{1\cdot5}} = \sqrt[10]{z^5}$

c) $\sqrt[5]{a^3} = \sqrt[5\cdot4]{a^{3\cdot4}} = \sqrt[20]{a^{12}}$

2º) No cambia de valor el radical al dividir el exponente o exponentes del subradical y el índice del radical por una misma cantidad.

Ejemplos: a) $\sqrt[6]{x^4}=\sqrt[6:2]{x^{4:2}}=\sqrt[3]{x^2}$

b) $\sqrt[18]{x^6y^9}=\sqrt[18:3]{x^{6:3}y^{9:3}}=\sqrt[6]{x^2y^3}$

3º) Cuando el exponente del subradical y el índice del radical son números primos entre sí, se dice que el radical ha quedado reducido a su mínima expresión. (Los exponentes de los subradicales deben ser menores que el índice)

Ejemplos: a) $\sqrt[7]{x^3}$ b) $\sqrt[5]{(xy)^2}$ c) $\sqrt[3]{5x^2y}$

3.6.6.3. Signos de los Radicales:

Con respecto a los signos en los radicales hay que tener presente que:

I. Las raíces extraídas de cantidades positivas, siendo el índice impar son siempre positivas.

Ejemplo: $\sqrt[3]{64x^3}=+4x$; porque: $64x^3=(+4x)^3$

$\sqrt[5]{32y^{10}}=+2y^2$; porque: $32y^{10}=(+2y^2)^5$

$\sqrt[n]{x}=r \Rightarrow x=r^n$

$\sqrt[m]{A^p}=A^{p/m}$

II. Las raíces extraídas de cantidades negativas siendo el índice impar son siempre negativas.

Ejemplo: $\sqrt[3]{-8x^3}=-2x$; porque: $-8x^3=(-2x)^3$

$\sqrt[5]{-32x^{15}}=-2x^3$; porque: $-32x^{15}=(-2x^3)^5$

III. Las raíces extraídas de cantidades positivas siendo el índice par pueden ser o positivas o negativas.

Ejemplo: $\sqrt{49x^2}=\pm 7x$; porque: $49x^2=(\pm 7x)^2$

Donde: $(7x)(+7x)=49x^2$

$(-7x)(-7x)=49x^2$

$\sqrt[4]{16x^8}=\pm 2x^2$; porque: $16x^8=(\pm 2x)^4$

Donde: $(+2x^2)(+2x^2)(+2x^2)(+2x^2)=16x^8$

$(-2x^2)(-2x^2)(-2x^2)(-2x^2)=16x^8$

IV. Las raíces extraídas de cantidades negativas siendo el índice par son imaginarias; quiere decir que no son ni positivas ni negativas.

Ejemplos: a) $\sqrt{-4x^2}=\sqrt{4x^2(-1)}=\sqrt{4x^2}\cdot\sqrt{-1}=2x\sqrt{-1}=\pm 2xi$

b) $\sqrt{-9x^4}=\sqrt{9x^4(-1)}=\sqrt{9x^4}\cdot\sqrt{-1}=3x^2\sqrt{-1}=\pm 3x^2i$

Números Imaginarios:

Llamamos números imaginarios aquellos radicales, con subradicales negativos e índices pares.

Ejemplos a) $\sqrt{-1}$ b) $\sqrt{-8}$ c) $\sqrt[4]{-10}$

Unidad Imaginaria:

La expresión algebraica $\sqrt{-1}$ cuya aceptación se ha convenido por la letra ($\sqrt{-1}=i$) la llamamos unidad imaginaria .

Luego:

$\sqrt{-4}=\sqrt{4(-1)}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}=\pm2\sqrt{-1}=\pm2i$ **(Se lee ±2 imaginario)**

$\sqrt{-100}=\sqrt{100(-1)}=\sqrt{100}\cdot\sqrt{-1}=\pm10\sqrt{-1}=\pm10i$ **(Se lee ±10 imaginario)**

3.6.6.4. Raíz de un Producto de un Cociente y de una Potencia:

1. **Raíz de un producto:** La raíz de un producto es igual al producto de las raíces extraídas de sus factores:

Donde: $\boxed{\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}}$ $n\in\mathbb{N}$ y $a;b\in\mathbb{R}^+$

Ejemplos: a) $\sqrt{12x^3}=\sqrt{4\cdot3\cdot x^2\cdot x}=\sqrt{4x^2}\cdot\sqrt{3x}=\boxed{2x\sqrt{3x}}$

b) $\sqrt[3]{64a^9b^6}=\sqrt[3]{64}\cdot\sqrt[3]{a^9}\cdot\sqrt[3]{b^6}=\boxed{4a^3b^2}$

2. **Raíz de un cociente:** (División o fracción) la raíz de un cociente es igual al cociente de las raíces de sus términos.

Donde: $\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$ $\forall\, b\neq0$ y $n\in\mathbb{N}$; además: $a;b\in\mathbb{R}^+$

Ejemplos:

a) $\sqrt{\dfrac{16x^2}{9z^2}}=\dfrac{\sqrt{16x^2}}{\sqrt{9z^2}}=\dfrac{4x}{3z}=4x:3x$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{125a^7b^5}{8x^4}}=\dfrac{\sqrt[3]{125a^7b^5}}{\sqrt[3]{8x^4}}=\dfrac{\sqrt[3]{125a^6\cdot a\cdot b^3\cdot b^2}}{\sqrt[3]{8x^3\cdot x}}=\dfrac{\sqrt[3]{125a^6b^3\cdot ab^2}}{\sqrt[3]{8x^3}\cdot\sqrt[3]{x}}$

$=\dfrac{\sqrt[3]{125a^6b^3}\sqrt[3]{ab^2}}{2x\sqrt[3]{x}}=\dfrac{5a^2b\sqrt[3]{ab^2}}{2x\sqrt[3]{x}}$

3. **Raíz de una potencia:** Para extraer la raíz de una potencia se divide el exponente de los factores literales del subradical entre el índice

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

Ejemplos: a) $\sqrt[4]{x^{12}y^8} = x^{12/4} \cdot y^{8/4} = x^3y^2$

b) $\sqrt[3]{z^9a^3b^6} = z^{9/3} \cdot a^{3/3} \cdot b^{6/3} = z^3ab^2$

4. **Raíz de un radical:** Para hallar la raíz de un radical basta hallar la raíz del mismo radicando con un índice igual al producto de los índices.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$ ***Donde:*** $n, m \in \mathbb{N}$

De esta expresión, se deduce otra propiedad: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

Donde el orden de los índices no altera la igualdad

Ejemplos:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{x^6y^{12}}} = \sqrt[3 \cdot 2]{x^6y^{12}} = \sqrt[6]{x^6y^{12}} = x^{6/6} \cdot y^{12/6} = xy^2$

b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^{24}y^{36}}} = \sqrt[4 \cdot 3]{a^{24}y^{36}} = \sqrt[12]{a^{24}y^{36}} = a^{24/12} \cdot y^{36/12} = a^2y^3$

c) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[5]{x^{30}y^{60}}}} = \sqrt[2 \cdot 3 \cdot 5]{x^{30}y^{60}} = \sqrt[30]{x^{30}y^{60}} = x^{30/30} \cdot y^{60/30} = xy^2$

3.6.6.5. Exponente Fraccionario:

Si al extraer una raíz cualquiera de una potencia indicada, el índice del radical y el exponente del subradical son números primos entre sí, al efectuar dicha radicación se obtiene una raíz con exponente fraccionario (expresión irracional).

Ejemplos a) $\sqrt{x} = x^{1/2}$ b) $\sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$ c) $\sqrt[4]{a^3b^5} = a^{3/4} \cdot b^{5/4}$

3.6.6.6. Transformación de Expresiones Irracionales en Radicales:

En una expresión irracional, siendo el, exponente una fracción cuyo numerador indica la potencia a que fue elevado el subradical, y el denominador la extracción de la raíz del mismo, entonces toda expresión irracional puede convertirse en un radical equivalente.

Ejemplos: Extraer las raíces indicadas de los siguientes monomios:

a) $\sqrt{64x^8y^6} = \pm 8x^{8/2}\cdot y^{6/2} = \pm 8x^4y^3$

b) $\sqrt{100z^2w^4} = \pm 10z^{2/2}\cdot w^{4/2} = \pm 10zw^2$

c) $\sqrt[3]{125x^6b^3} = +5x^{6/3}\cdot b^{3/3} = 5x^2b$

d) $\sqrt[3]{-64y^3z^6} = -4y^{3/3}\cdot z^{6/3} = -4yz^2$

e) $\sqrt{\frac{25}{9}x^2y^8} = \pm\frac{5}{2}x^{2/2}\cdot y^{8/2} = \pm\frac{5}{3}xy^4$

f) $\sqrt{0{,}04x^4y^6} = \pm 0{,}2x^{4/2}\cdot y^{6/2} = \pm 0{,}2x^2y^3$

g) $\sqrt[3]{0{,}008x^9y^{12}z^6} = +0{,}2x^{9/3}\cdot y^{12/3}\cdot z^{6/3} = 0{,}2x^3y^4z^2$

h) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}x^6y^9} = -\frac{1}{2}x^{6/3}\cdot y^{9/3} = -\frac{1}{2}x^2y^3$

* La descomposición del radical de un producto en producto de radicales:

$\sqrt[n]{A\cdot B} = \sqrt[n]{A}\cdot\sqrt[n]{B}$; tiene estas interesantes aplicaciones

I. Extraer Factores fuera del Signo Radical

La igualdad anterior nos permite simplificar radicales cuando uno de los factores tiene raíz enésima exacta, pues se puede sacar fuera del signo radical.

a) $\sqrt{12x^3y^5} = \sqrt{4\cdot 3\cdot x^2\cdot x\cdot y^4\cdot y} = \sqrt{4x^2y^4\cdot 3xy} = \sqrt{4x^2y^4}\cdot\sqrt{3xy} = \boxed{2xy^2\sqrt{3xy}}$

b) $\sqrt[3]{8a^7b^{10}c^3} = \sqrt[3]{8a^6\cdot a\cdot b^9\cdot b\cdot c^3} = \sqrt[3]{8a^6b^9c^3ab} = \sqrt[3]{8a^6b^9c^3}\cdot\sqrt[3]{ab}$

$= \boxed{2a^2b^3c\sqrt[3]{ab}}$

c) $\sqrt{50x^5b} = \sqrt{25\cdot 2\cdot x^4\cdot x\cdot b} = \sqrt{25x^4\cdot 2xb} = \sqrt{25x^4}\cdot\sqrt{2xb} = \boxed{5x^2\sqrt{2xb}}$

d) $\sqrt[3]{24a^7b^4} = \sqrt[3]{8\cdot 3\cdot a^6\cdot a\cdot b^3\cdot b} = \sqrt[3]{8a^6b^3\cdot 3ab} = \sqrt[3]{8a^6b^3}\cdot\sqrt[3]{3ab}$

$= \boxed{2a^2b\sqrt[3]{3ab}}$

e) $\sqrt[3]{\frac{3}{8}x^5} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}\cdot 3\cdot x^3\cdot x^2} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}x^3\cdot 3x^2} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}x^3}\cdot\sqrt[3]{3x^2} = \boxed{\frac{1}{2}x\sqrt[3]{3x^2}}$

f) $\sqrt{0{,}18xy^2} = \sqrt{0{,}09\cdot 2\cdot y^2\cdot x} = \sqrt{0{,}09y^2\cdot 2x} = \sqrt{0{,}09y^2}\cdot\sqrt{2x} = \boxed{0{,}3y\sqrt[3]{2x}}$

g) $\sqrt{18a^2x + 27a^2y} = \sqrt{9a^2(2x+3y)} = \sqrt{9a^2} \cdot \sqrt{(2x+3y)} = \boxed{\pm 3a\sqrt{2x+3y}}$

Sacamos factor común $9a^2$

h) $\sqrt{3ax^4 - 3x^5} = \sqrt{3x^4(a-x)} = \sqrt{x^4 \cdot 3(a-x)} = \sqrt{x^4} \cdot \sqrt{3(a-x)} = \boxed{\pm x^2\sqrt{3(a-x)}}$

Sacamos factor común $3x^4$

i) $\sqrt{50a^3b^3 + 25a^2b^2} = \sqrt{25a^2b^2(2ab+1)} = \sqrt{25a^2b^2} \cdot \sqrt{(2ab+1)}$

$= \boxed{\pm 5ab\sqrt{2ab+1}}$

Sacamos factor común $25a^2b^2$

j) $\sqrt{2ax^2 + 12ax + 18a} = \sqrt{2a\left(x^2 + 6x + 9\right)} = \sqrt{2a(x+3)^2} = \sqrt{2a} \cdot \sqrt{(x+3)^2}$

$= \boxed{\pm (x+3)\sqrt{2a}}$

Sacamos factor común $2a$

k) $\sqrt{3a^2 - 30a + 75} = \sqrt{3\left(a^2 - 10a + 25\right)} = \sqrt{3(a-5)^2} = \sqrt{(a-5)^2 \cdot 3}$

$= \sqrt{(a-5)^2} \cdot \sqrt{3} = \boxed{\pm (a-5)\sqrt{3}}$

Sacamos factor común 3

l) $\sqrt{\dfrac{8a^2 - 4a^3}{9ab^2 - 9b^2x}} = \sqrt{\dfrac{4a^2(2-a)}{9b^2(a-x)}} = \sqrt{\dfrac{4a^2}{9b^2}} \cdot \sqrt{\dfrac{(2-a)}{(a-x)}} = \boxed{\pm \dfrac{2a}{3b}\sqrt{\dfrac{2-a}{a-x}}}$

m) $\sqrt{(a+2)\left(a^2 - 4\right)} = \sqrt{(a+2)\left(a^2 - 2^2\right)} = \sqrt{(a+2)(a+2)(a-2)}$

$= \sqrt{(a+2)^2(a-2)} = \sqrt{(a+2)^2} \cdot \sqrt{(a-2)}$

$= \boxed{\pm (a+2)\sqrt{a-2}}$

II. Introducción de Factores dentro del Signo Radical

Para introducir un factor bajo un signo radical se escribe dicho factor elevado a la potencia de exponente igual al índice de la raíz y el resultado se multiplica por el radicando.

Así:

a) $3ab\sqrt{2ax} = \sqrt{2ax(3ab)^2} = \sqrt{2ax\left(9a^2b^2\right)} = \boxed{}$

b) $2a\sqrt[3]{3ab} = \sqrt[3]{3ab(2a)^3} = \sqrt[3]{3ab\left(8a^3\right)} = \boxed{\sqrt[3]{24a^4b}}$

c) $(x+4)\sqrt{ab} = \sqrt{ab(x+4)^2} = \boxed{\sqrt{ab\left(x^2+8x+16\right)}}$

d) $\frac{2}{3}ab^2\sqrt[3]{2x} = \sqrt[3]{2x\left(\frac{2}{3}ab^2\right)^3} = \sqrt[3]{2x\left(\frac{8}{27}a^3b^6\right)} = \boxed{\sqrt[3]{\frac{16}{27}a^3b^6x}}$

e) $0{,}4xy\sqrt{3a} = \sqrt{3a(0{,}4xy)^2} = \sqrt{3a\left(0{,}16x^2y^2\right)} = \boxed{\sqrt{0{,}48ax^2y^2}}$

3.6.6.8. Reducción de Radicales al común índice:

Para reducir dos o más radicales al índice común se busca el **M.C.M.** de los índices, el cual **M.C.M.** es el índice común, luego se multiplica el exponente del subradical por el cociente que se obtiene de dividir el índice común entre el índice de cada radical.

Ejemplo 1: Reducir a común indice: $\sqrt{x^3}$; $\sqrt[3]{y^2}$; $\sqrt[5]{z^3}$

Resolución:

El **M.C.M.** de los índices 2; 3 y 5 es 30, veamos:

2 – 3 – 5	2		
1 – 3 – 5	3	2·3·5 = 30	⇨ **M.C.M.(2; 3 y 5) = 30**
1 – 1 – 5	5		
1 – 1 – 1			

Luego, **30** se divide entre el índice propio de cada radical y el cociente se multiplica por el exponente del subradical osea:

$$\sqrt{x^3} = \sqrt[30]{\left(x^3\right)^{15}} = \sqrt[30]{x^{45}}$$

$$\sqrt[3]{y^2} = \sqrt[30]{\left(y^2\right)^{10}} = \sqrt[30]{y^{20}}$$

$$\sqrt[5]{z^3} = \sqrt[30]{\left(z^3\right)^{6}} = \sqrt[30]{z^{18}}$$

Luego:

$\sqrt[30]{x^{45}}$; $\sqrt[30]{y^{20}}$; $\sqrt[30]{z^{18}}$; son respectivamente equivalentes a: $\sqrt{x^3}$; $\sqrt[3]{y^2}$; $\sqrt[5]{z^3}$

Ejemplo 2: Reducir al índice común: $\sqrt{2a}$; $\sqrt[3]{3x}$; $\sqrt[4]{ab}$

Resolución:

El **M.C.M.** de los índices 2; 3 y 4 es 12, veamos:

2 – 3 – 4	2		
1 – 3 – 2	2	2·2·3 = **12**	⇨ **M.C.M.(2; 3 y 4) = 12**
1 – 3 – 1	3		
1 – 1 – 1			

Luego, **12** se divide entre el indice propio de cada radical y el cociente se multiplica por el exponente del subradical o sea:

$$\sqrt{2a} = \sqrt[12]{(2a)^6} = \sqrt[12]{64a^6}$$

$$\sqrt[3]{3x} = \sqrt[12]{(3x)^4} = \sqrt[12]{81x^4}$$

$$\sqrt[4]{ab} = \sqrt[12]{(ab)^3} = \sqrt[12]{a^3b^3}$$

Luego:

$\sqrt[12]{64a^6}$; $\sqrt[12]{81x^4}$; $\sqrt[12]{a^3b^3}$; son respectivamente equivalentes a: $\sqrt{2a}$; $\sqrt[3]{3x}$; $\sqrt[4]{ab}$

Ejemplo 3: Reducir al índice común: $\sqrt[4]{3a}$; $\sqrt[5]{2b^2}$; $\sqrt[10]{8x^3}$

Resolución:

El **M.C.M.** de los índices 4; 5 y 10 es 20; veamos:

4 – 5 – 10	2		
2 – 5 – 5	2	2·2·5 = **20**	⇨ **M.C.M.(4; 5 y 10) = 20**
1 – 5 – 5	5		
1 – 1 – 1			

Luego, **20** se divide entre el índice propio de cada radical y el cociente se multiplica por el exponente del subradical o sea:

$$\sqrt[4]{3a} = \sqrt[20]{(3a)^5} = \sqrt[20]{243a^5}$$

$$\sqrt[5]{2b^2} = \sqrt[20]{\left(2b^2\right)^4} = \sqrt[20]{16b^8}$$

$$\sqrt[10]{8x^3} = \sqrt[20]{\left(8x^3\right)^2} = \sqrt[20]{64x^6}$$

Luego: $\sqrt[20]{243a^5}$; $\sqrt[20]{16b^8}$; $\sqrt[20]{64x^6}$; son respectivamente equivalentes a: $\sqrt[4]{3a}$; $\sqrt[5]{2b^2}$; $\sqrt[10]{8x^3}$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 35

1. Indique los radicales racionales en:

a) $\sqrt{16x^8}$	b) $\sqrt{8a}$	c) $8y^6$	d) $\sqrt[3]{16x^4}$
e) $2a\sqrt{9x^4}$	f) $\sqrt[3]{-64b^3}$	g) $\frac{a}{b}\sqrt{2a}$	h) $5x\sqrt[3]{3x}$
i) $2a\sqrt{100a^2}$	j) $3ab\sqrt[3]{125b^3}$	k) $(a+b)\sqrt[3]{-27y^3}$	l) $x\sqrt[5]{32x^{10}}$
m) $5x\sqrt{625x^8}$	n) $4a\sqrt[3]{-64x^6}$	o) $8y\sqrt[4]{81x^{12}}$	p) $-3a\sqrt{18x^5}$

2. Indique los radicales irracionales en:

a) $2a\sqrt{81x^2}$	b) $3x\sqrt{42a^2b}$	c) $6a\sqrt[3]{-125b^3}$
d) $a\sqrt[3]{9x}$	e) $\frac{2x}{b}\sqrt{9y^2}$	f) $\frac{6}{a}\sqrt{8ab^2}$
g) $(a+b)\sqrt[3]{(a-b)^3}$	h) $(2x-1)\sqrt[3]{(x+1)^2}$	i) $(a+3b)\sqrt{8ab^3}$
j) $(x+y+2z)\sqrt[3]{-27x^6y^3}$	k) $3ab^2\sqrt[6]{64x^{12}b^6c^{18}}$	l) $-7xy^3\sqrt[3]{8x^4y^3z^9}$

3. Indique qué radicales son reales y cuáles imaginarios:

a) $3\sqrt{-64x^2}$	b) $\sqrt{10x}$	c) $\sqrt{-8}$
d) $\sqrt[4]{81ab}$	e) $5a\sqrt{-25a^2b^2}$	f) $4x\sqrt[6]{8a^3b^6}$
g) $\sqrt[3]{-8x^3}$	h) $2\sqrt{-4a^4}$	i) $\sqrt[4]{16a^4b^8}$
j) $\sqrt[3]{8x^6y^9}$	k) $x\sqrt{-16a^2}$	l) $(a+b)\sqrt{-x^4}$
m) $2ab\sqrt{-4}$	n) $5b^2\sqrt[4]{-81y^4}$	o) $(a+1)\sqrt{(x+y)^2}$
p) $(x^2-y)\sqrt{2x+3}$		

4. Indique los radicales homogéneos en:

a) $a\sqrt[5]{3x^2}$; $\sqrt[6]{8ab}$; $2x\sqrt{(a-1)^2}$; $a\sqrt{10x}$; $\sqrt[5]{a^3b^2}$; $3ay\sqrt[6]{-5b^2}$

b) $5x\sqrt{2a}$; $2x^2\sqrt[3]{6ab}$; $\sqrt{3}$; $4a^2\sqrt[4]{3x}$; $\sqrt[3]{5x^2}$; $\frac{1}{2}x\sqrt[4]{2y}$

c) $3a\sqrt[4]{10x}$; $b\sqrt{8xy}$; $5\sqrt[4]{9a^2}$; $6a\sqrt{a}$; $\sqrt{2x}$; $\sqrt[4]{6ab^2}$

5. Indique los radicales semejantes en:

a) $2x\sqrt{3y}$; $-x\sqrt{y}$; $-2x\sqrt{3y}$; $-6x\sqrt{y}$; $\frac{1}{2}x\sqrt{3y}$

b) $x\sqrt[3]{5a}$; $a\sqrt[3]{5b}$; $6x\sqrt[3]{5a}$; $0{,}2a\sqrt[3]{5b}$; $-x\sqrt[3]{5a}$

c) $(a+b)\sqrt[5]{a^3}$; $3x\sqrt[5]{a^2}$; $(x+y)\sqrt[5]{a^3}$; $5ab\sqrt[5]{a^2}$

d) $7a\sqrt[4]{xy}$; $-9b\sqrt[6]{xz^2}$; $a\sqrt[4]{xy}$; $b\sqrt[6]{xz^2}$

e) $(x+2)\sqrt[3]{(a+b)}$; $(x-3)\sqrt{2a+1}$; $x^2\sqrt[3]{(a+b)}$; $5y\sqrt[6]{2a+1}$

6. ¿Qué número falta en cada ☐ para que la expresión del segundo miembro sea equivalente a la del primer miembro.

a) $\sqrt[3]{x^8} = \sqrt[6]{x^{☐}}$	b) $\sqrt{x^5} = \sqrt[12]{x^{☐}}$	c) $\sqrt[7]{x^2} = \sqrt[21]{x^{☐}}$
d) $\sqrt[11]{y^6} = \sqrt[22]{y^{☐}}$	e) $\sqrt[4]{z^{-7}} = \sqrt[16]{z^{☐}}$	f) $\sqrt[9]{x^2} = \sqrt[36]{x^{☐}}$
g) $\sqrt[5]{x^6} = \sqrt[☐]{x^{18}}$	h) $\sqrt[3]{y^2} = \sqrt[☐]{y^6}$	i) $\sqrt{z^8} = \sqrt[☐]{z^{24}}$
j) $\sqrt[7]{x^9} = \sqrt[☐]{x^{18}}$	k) $\sqrt{x^{-3}} = \sqrt[☐]{x^{-12}}$	l) $\sqrt[6]{x^{-2}} = \sqrt[☐]{x^{-8}}$

7. ¿Qué número falta en cada ☐ para que la expresión del segundo miembro sea equivalente a la del primer miembro.

a) $\sqrt[8]{x^8} = \sqrt[4]{x^{☐}}$	b) $\sqrt[12]{y^{36}} = \sqrt[3]{y^{☐}}$	c) $\sqrt[9]{z^{27}} = \sqrt[3]{z^{☐}}$
d) $\sqrt[24]{x^{30}} = \sqrt[8]{x^{☐}}$	e) $\sqrt[30]{y^{-6}} = \sqrt[5]{y^{☐}}$	f) $\sqrt[18]{z^{-24}} = \sqrt[6]{z^{☐}}$
g) $\sqrt[27]{x^{12}} = \sqrt[☐]{x^4}$	h) $\sqrt[28]{y^{21}} = \sqrt[☐]{y^3}$	i) $\sqrt[40]{z^{24}} = \sqrt[☐]{z^3}$
j) $\sqrt[16]{x^6} = \sqrt[☐]{x^3}$	k) $\sqrt[20]{y^{-16}} = \sqrt[☐]{y^{-4}}$	l) $\sqrt[32]{z^{-4}} = \sqrt[☐]{z^{-1}}$

8. Halla la expresión equivalente a:

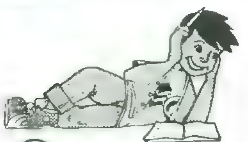
a) $\sqrt[12]{x^{36}y^{24}} =$	b) $\sqrt[6]{64x^{18}} =$	c) $\sqrt[8]{x^{32}y^{24}} =$
d) $\sqrt[9]{x^{36}y^{27}} =$	e) $\sqrt[3]{x^{6}y^{12}} =$	f) $\sqrt{x^{8}y^{6}} =$
g) $\sqrt{81x^{2}y^{4}} =$	h) $\sqrt[15]{a^{45}2^{60}} =$	i) $\sqrt[24]{2^{72}x^{48}} =$
j) $\sqrt[20]{a^{40}b^{100}} =$	k) $\sqrt{72x^{3}y^{5}} =$	l) $\sqrt{8x^{6}y^{9}} =$
m) $\sqrt[3]{16a^{4}b^{6}} =$	n) $\sqrt[3]{81x^{5}y^{10}} =$	o) $\sqrt[4]{48a^{2}b^{6}} =$
p) $\sqrt{45a^{3}b^{6}c^{7}} =$	q) $\sqrt{28x^{4}y^{9}z^{7}} =$	r) $\sqrt[3]{x^{4}y^{9}z^{13}} =$
s) $\sqrt[4]{32a^{7}b^{9}} =$	t) $\sqrt[5]{x^{8}y^{15}z^{9}} =$	

9. Halla la expresión equivalente a:

a) $\sqrt{\dfrac{81x^{4}}{16y^{2}}} =$	b) $\sqrt{\dfrac{100a^{6}}{49b^{4}}} =$	c) $\sqrt[3]{\dfrac{64x^{6}}{125y^{9}}} =$
d) $\sqrt[3]{\dfrac{8a^{4}b^{9}}{27x^{5}}} =$	e) $\sqrt{\dfrac{144x^{5}y^{3}}{9a^{7}b^{8}}} =$	f) $\sqrt{\dfrac{32a^{6}b^{9}}{72x^{7}y^{11}}} =$
g) $\sqrt[3]{\dfrac{729x^{11}y^{6}}{64a^{14}b^{19}}} =$	h) $\sqrt[4]{\dfrac{64a^{7}b^{8}c^{10}}{625x^{9}y^{18}}} =$	i) $\sqrt[5]{\dfrac{32x^{8}y^{3}}{243a^{6}b^{12}}} =$

10. Halla la expresión equivalente a:

a) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^{24}y^{12}}} =$	b) $\sqrt[5]{\sqrt{x^{20}y^{50}}} =$	c) $\sqrt[3]{\sqrt[7]{x^{42}y^{63}}} =$
d) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x^{6}y^{32}}}} =$	e) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^{48}y^{24}}} =$	f) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{x^{-24}y^{-36}}}} =$
g) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{x^{-30}y^{-60}}}} =$	h) $\sqrt[6]{\sqrt[4]{\sqrt{x^{96}y^{-48}}}} =$	i) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{x^{36}y^{108}z^{72}}}}} =$
j) $\sqrt{\sqrt{\sqrt[5]{\sqrt{x^{80}y^{-40}}}}} =$	k) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{\sqrt[4]{\sqrt{x^{48}y^{144}}}}}} =$	l) $\sqrt[5]{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{x^{-60}y^{30}z^{120}}}}} =$



TALLER DE EJERCICIOS Nº 36

1. Extraer las raíces de los siguientes monomios:

a) $\sqrt{81a^4b^2}$	b) $\sqrt{25x^8y^4}$	c) $\sqrt{9x^4y^2}$	d) $\sqrt{16x^6}$
e) $\sqrt{(x+3)^2}$	f) $\sqrt{(y-1)^4}$	g) $\sqrt[4]{2^4b^4}$	h) $\sqrt{0,25x^4}$
i) $\sqrt{0,09x^2y^4}$	j) $\sqrt{1,44x^6y^{-8}}$	k) $\sqrt{6,25x^{-4}y^{12}}$	l) $\sqrt{7,29x^8y^{-8}z^4}$
m) $\sqrt{\frac{4}{9}x^4y^4}$	n) $\sqrt{\frac{1}{16}x^6y^{10}}$	o) $\sqrt[4]{\frac{x^4}{625y^{12}}}$	p) $\sqrt{\frac{36x^8}{81y^2}}$

2. Extraer las raíces de los siguientes monomios:

a) $\sqrt[3]{-27x^6}$	b) $\sqrt[3]{8y^3}$	c) $\sqrt[3]{64x^{12}}$	d) $\sqrt[3]{-125x^3}$
e) $\sqrt[5]{x^{10}y^5}$	f) $\sqrt[5]{32x^{15}y^{10}}$	g) $\sqrt[5]{-x^5y^{10}z^{15}}$	h) $\sqrt[7]{x^{14}y^7}$
i) $\sqrt[3]{0,008x^6}$	j) $\sqrt[3]{a^{6x}y^{9x}}$	k) $\sqrt[6]{64x^{12}}$	l) $\sqrt[3]{-64x^9y^{-12}}$
m) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}x^{-6}y^3}$	n) $\sqrt[3]{216x^9z^{12}}$	o) $\sqrt[5]{-243x^{10}\cdot y^{-5}}$	p) $\sqrt[3]{\frac{27x^{12}}{-64y^3}}$

3. En los siguientes ejercicios extraer factores fuera del signo radical.

a) $\sqrt{48x^5y^3}$	b) $\sqrt{75x^4y^3}$	c) $\sqrt{50x^3y^7}$
d) $\sqrt[3]{54x^4y^5}$	e) $\sqrt[3]{-32x^5y^4}$	f) $\sqrt[3]{250y^5z^8}$
g) $\sqrt{128x^5y^3}$	h) $\sqrt{192x^7y^{-5}}$	i) $\sqrt[3]{686x^8y^{-10}z^{-5}}$
j) $\sqrt{294x^{-10}y^9z^4}$	k) $\sqrt[6]{192x^{-7}y^{12}z^{10}}$	l) $\sqrt[5]{486x^{11}y^{13}z^6}$

4. En los siguientes ejercicios extraer factores fuera del signo radical.

a) $\sqrt{6x^6y-x^6}$	b) $\sqrt{12x^3+8x^2y}$	c) $\sqrt{\frac{4}{9}x^3-\frac{4}{9}x^2y}$
d) $\sqrt{x^4+2x^5}$	e) $\sqrt{a^2b^4x+a^2b^4y}$	f) $\sqrt{45x^4-27x^5y}$

g) $\sqrt{25a^3b^3 - 100a^2b^2x}$

h) $\sqrt{\dfrac{ab^2 - 5b^3}{4}}$

i) $\sqrt{\dfrac{18}{25}x^4 + \dfrac{27}{25}y}$

j) $\sqrt[3]{16a^3 - 24a^3x}$

k) $\sqrt[3]{27x^7 + 54x^6a}$

l) $\sqrt[3]{64b^{10} + 128ab^9}$

m) $\sqrt[3]{54a^4b^3 - 5a^3b^4}$

n) $\sqrt[3]{-10ab^7 - 5b^6xy}$

o) $\sqrt[3]{\dfrac{3ab^3 - 5xb^3}{125x^6}}$

5. En los siguientes ejercicios extraer factores fuera del signo radical.

a) $\sqrt{3ax^2 + 30ax + 75a}$

b) $\sqrt{18a^2 + 24a + 8}$

c) $\sqrt{12ax^2 - 12ax + 3a}$

d) $\sqrt{5aby^2 - 60aby + 180ab}$

e) $\sqrt{20a^2 - 20ab + 5b^2}$

f) $\sqrt{4a^2y - 32ay + 64y}$

g) $\sqrt{\left(x^2 - 9\right)(x + 3)}$

h) $\sqrt{\left(4 - a^2\right)(2 - a)}$

i) $\sqrt{\dfrac{a^2x - 2ax^2 + x^3}{a^2\ \ 2ax + x^2}}$

j) $\sqrt{\dfrac{a^3 - a^2b}{a^3 + 2a^2 + a}}$

k) $\sqrt{(x + a)^2(x - a)^2}$

l) $\sqrt{\dfrac{27ax^3 - 9x^3}{50ay^2 + 25y^3}}$

6. En los siguientes ejercicios extraer factores fuera del signo radical.

a) $\sqrt{x^2 + 14x + 49}$

b) $\sqrt{4a^2 + 12a + 9}$

c) $\sqrt{1 - 10x + 25x^2}$

d) $\sqrt{x^4 + \dfrac{2x^3}{4} + \dfrac{x^2}{16}}$

e) $\sqrt{\dfrac{9}{16}x^2 + \dfrac{6}{4}x + 1}$

f) $\sqrt{\dfrac{1}{9}a^2 + \dfrac{4}{15}ab + \dfrac{4}{25}b^2}$

g) $\sqrt{x^3 + 11x^2 + 24x - 36}$

h) $\sqrt{4x^2y - 12xy + 9y + 16x^2 - 48x + 36}$

i) $\sqrt{9x^3 + 12x^3 - 11x + 2}$

j) $\sqrt{4a^{2x} + 12a^{2x+1} + 9a^{2x+2}}$

k) $\sqrt{0{,}25x^2 + 0{,}8xy + 0{,}64y^2}$

l) $\sqrt{9x^{2n} - 30x^{2n-1} + 25x^{2n-2}}$

RESPUESTAS TALLER 35

1. Son radicales racionales: a; c; e; f; i; j; k; l; m; n; o

2. Son radicales irracionales: b; d; f; h; i; l

3. Son radicales reales: b; d; f; g; i; j; o; p
   Son radicales imaginarios: a; c; e; h; k; l; m; n

4.
a)
- i) $a\sqrt[5]{3x^2}$; $\sqrt[5]{a^3b^2}$ ***(Radicales Homogéneos)***
- ii) $\sqrt[6]{8ab}$; $3ay\sqrt[6]{-5b^2}$ ***(Radicales Homogéneos)***
- iii) $2x\sqrt{(a-1)^2}$; $a\sqrt{10x}$ ***(Radicales Homogéneos)***

b)
- i) $5x\sqrt{2a}$; $\sqrt{3}$ ***(Radicales Homogéneos)***
- ii) $2x^2\sqrt[3]{6ab}$; $\sqrt[3]{5x^3}$ ***(Radicales Homogéneos)***
- iii) $4a^2\sqrt[4]{3x}$; $\frac{1}{2}x\sqrt[4]{2y}$ ***(Radicales Homogéneos)***

c)
- i) $3a\sqrt[4]{10x}$; $5\sqrt[4]{9a^2}$; $\sqrt[4]{6ab^2}$ ***(Radicales Homogéneos)***
- ii) $b\sqrt{8xy}$; $6a\sqrt{a}$; $\sqrt{2x}$ ***(Radicales Homogéneos)***

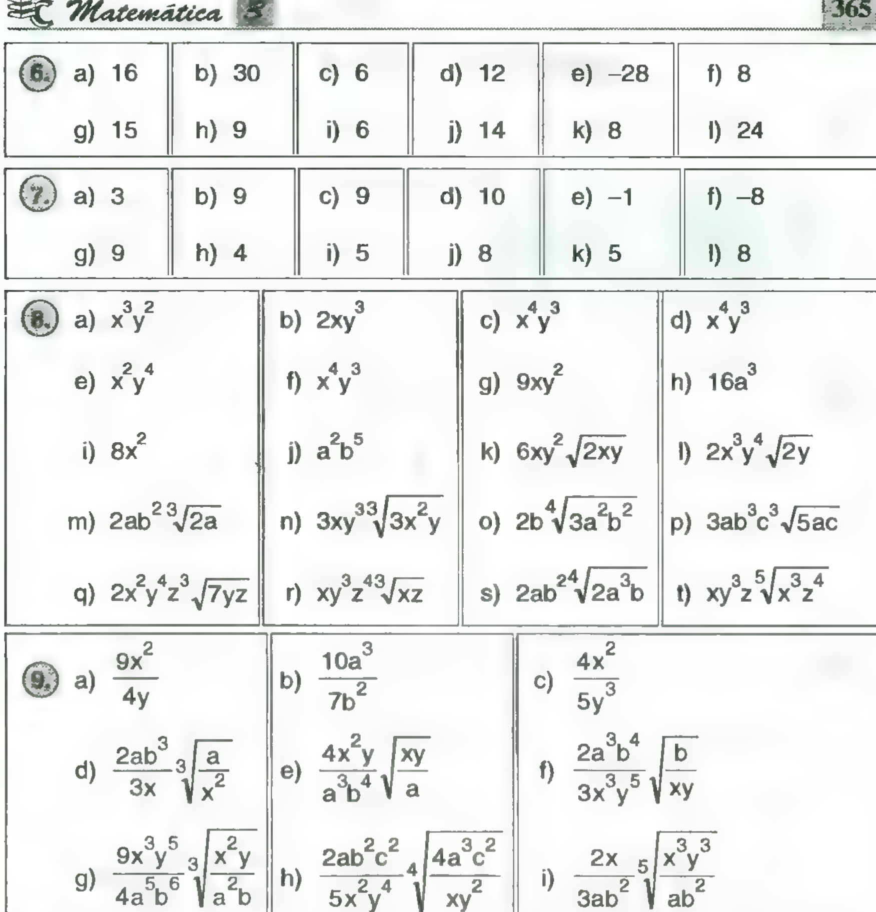
5.
a)
- i) $2x\sqrt{3y}$; $-2x\sqrt{3y}$; $\frac{1}{2}x\sqrt{3y}$ ***(Radicales Semejantes)***
- ii) $-x\sqrt{y}$; $-6x\sqrt{y}$ ***(Radicales Semejantes)***

b)
- i) $x\sqrt[3]{5a}$; $6x\sqrt[3]{5a}$; $x\sqrt[3]{5a}$ ***(Radicales Semejantes)***
- ii) $a\sqrt[3]{5b}$; $0{,}2a\sqrt[3]{5b}$ ***(Radicales Semejantes)***

c)
- i) $(a+b)\sqrt[5]{a^3}$; $(x+y)\sqrt[5]{a^3}$ ***(Radicales Semejantes)***
- ii) $3x\sqrt[5]{a^2}$; $5ab\sqrt[5]{a^2}$ ***(Radicales Semejantes)***

d)
- i) $7a\sqrt[4]{xy}$; $a\sqrt[4]{xy}$ ***(Radicales Semejantes)***
- ii) $-9b\sqrt[6]{xz^2}$; $b\sqrt[6]{xz^2}$ ***(Radicales Semejantes)***

e)
- i) $(x+2)\sqrt[3]{a+b}$; $x^2\sqrt[3]{a+b}$ ***(Radicales Semejantes)***
- ii) $(x-3)\sqrt{2a+1}$; $5y\sqrt{2a+1}$ ***(Radicales Semejantes)***



6.

a) 16	b) 30	c) 6	d) 12	e) –28	f) 8
g) 15	h) 9	i) 6	j) 14	k) 8	l) 24

7.

a) 3	b) 9	c) 9	d) 10	e) –1	f) –8
g) 9	h) 4	i) 5	j) 8	k) 5	l) 8

8.

a) x^3y^2	b) $2xy^3$	c) x^4y^3	d) x^4y^3
e) x^2y^4	f) x^4y^3	g) $9xy^2$	h) $16a^3$
i) $8x^2$	j) a^2b^5	k) $6xy^2\sqrt{2xy}$	l) $2x^3y^4\sqrt{2y}$
m) $2ab^2\sqrt[3]{2a}$	n) $3xy^3\sqrt[3]{3x^2y}$	o) $2b\sqrt[4]{3a^2b^2}$	p) $3ab^3c^3\sqrt{5ac}$
q) $2x^2y^4z^3\sqrt{7yz}$	r) $xy^3z^4\sqrt[3]{xz}$	s) $2ab^2\sqrt[4]{2a^3b}$	t) $xy^3z\sqrt[5]{x^3z^4}$

9.

a) $\dfrac{9x^2}{4y}$	b) $\dfrac{10a^3}{7b^2}$	c) $\dfrac{4x^2}{5y^3}$
d) $\dfrac{2ab^3}{3x}\sqrt[3]{\dfrac{a}{x^2}}$	e) $\dfrac{4x^2y}{a^3b^4}\sqrt{\dfrac{xy}{a}}$	f) $\dfrac{2a^3b^4}{3x^3y^5}\sqrt{\dfrac{b}{xy}}$
g) $\dfrac{9x^3y^5}{4a^5b^6}\sqrt[3]{\dfrac{x^2y}{a^2b}}$	h) $\dfrac{2ab^2c^2}{5x^2y^4}\sqrt[4]{\dfrac{4a^3c^2}{xy^2}}$	i) $\dfrac{2x}{3ab^2}\sqrt[5]{\dfrac{x^3y^3}{ab^2}}$

10.

a) x^2y	b) x^2y^5	c) x^2y^3	d) x^2y^4
e) x^2y	f) $x^{-2}y^{-3}$	g) $x^{-1}y^{-2}$	h) x^2y^{-1}
i) xy^3z^2	j) x^2y^{-1}	k) xy^3	l) $x^{-2}yz^4$

RESPUESTAS TALLER 36

1.

a) $\pm 9a^2b$	b) $\pm 5x^4$	c) $\pm 3x^2y$	d) $\pm 4x^3$
e) $\pm(x+3)$	f) $\pm(y-1)^2$	g) $\pm 2b$	h) $\pm 0{,}5x^2$
i) $\pm 0{,}3xy^2$	j) $\pm 1{,}2x^3y^{-4}$	k) $\pm 2{,}5x^{-2}y^6$	l) $\pm 2{,}7x^4y^{-3}z^2$
m) $\pm\frac{2}{3}x^2y^2$	n) $\pm\frac{1}{4}x^3y^5$	o) $\pm\frac{x}{5y^3}$	p) $\pm\frac{2x^4}{3y}$

2.

a) $-3x^2$	b) $2y$	c) $4x^4$	d) $-5x$
e) x^2y	f) $2x^3y^2$	g) $-xy^2z^3$	h) x^2y
i) $0{,}2x^2$	j) $a^{2x}y^{3x}$	k) $2x^2$	l) $-4x^3y^{-4}$
m) $-\frac{1}{2}x^{-2}y$	n) $6x^3z^4$	o) $-3x^2y-1$	p) $\frac{3x^4}{4y}$

3.

a) $4x^2y\sqrt{3xy}$	b) $5x^2y\sqrt{3y}$	c) $5xy^3\sqrt{2xy}$
d) $3xy\sqrt[3]{2xy^2}$	e) $-2xy\sqrt[3]{4x^2y}$	f) $5yz^2\sqrt[3]{2y^2z^2}$
g) $8x^2y\sqrt{2xy}$	h) $8x^3y^{-2}\sqrt{3xy^{-1}}$	i) $7x^2y^{-3}z\sqrt[3]{2x^2y^{-1}z^{-2}}$
j) $7x^{-5}y^4z^2\sqrt{6y}$	k) $2x^{-1}y^2z\sqrt[6]{3x^{-1}z^4}$	l) $3x^2y^2z\sqrt[5]{2xy^3z}$

4.

a) $x^3\sqrt{6y-1}$	b) $2x\sqrt{3x+2y}$	c) $\frac{2}{3}x\sqrt{x-y}$
d) $x^2\sqrt{x^2+2x}$	e) $ab^2\sqrt{x+y}$	f) $3x^2\sqrt{5-3xy}$
g) $5ab\sqrt{ab-4x}$	h) $\frac{b}{2}\sqrt{a-5b}$	i) $\frac{3}{5}\sqrt{2x^4+3y}$
j) $2a\sqrt[3]{2-3x}$	k) $3x^2\sqrt[3]{x+2a}$	l) $4b^3\sqrt[3]{b+2a}$
m) $ab\sqrt[3]{5a-b}$	n) $b^2\sqrt[3]{-10ab-5xy}$	o) $\frac{b}{5x^2}\sqrt[3]{3a-5x}$

5.

a) $(x+5)\sqrt{3a}$	b) $(3a+2)\sqrt{2}$	c) $(2x-1)\sqrt{3a}$

d) $(y-6)\sqrt{5ab}$	e) $(2a-b)\sqrt{5}$	f) $(a-4)\sqrt{4y}$
g) $(x+3)\sqrt{x-3}$	h) $(2-a)\sqrt{2+a}$	i) $\left(\frac{a-x}{a+x}\right)\sqrt{x}$
j) $\left(\frac{1}{a+1}\right)\sqrt{a(a-b)}$	k) x^2-a^2	l) $\frac{3x}{5y}\sqrt{\frac{x(3a-1)}{(2a+1)y}}$

6. a) $x+7$	b) $2a+3$	c) $1-5x$
d) $x\left(x+\frac{1}{4}\right)$	e) $\frac{3}{4}x+1$	f) $\frac{1}{3}a+\frac{2}{5}b$
g) $(x+6)\sqrt{x-1}$	h) $(2x-3)\sqrt{y+4}$	i) $(3x-1)\sqrt{x+2}$
j) $a^x(2+3a)$	k) $0{,}5x+0{,}8y$	l) $x^n(3-5x^{-1})$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 37

1. Introducir dentro del sub-radical los coeficientes de los radicales:

a) $3x^2\sqrt{2a}$	b) $2x\sqrt[3]{3a}$	c) $5ab\sqrt{2ab}$	d) $2x\sqrt{(x+y)}$
e) $3xy\sqrt[3]{5xy}$	f) $a\sqrt{(2a-1)}$	g) $6ab^2\sqrt{(a+b)}$	h) $\frac{a}{b}\sqrt{3x}$
i) $\frac{x}{y}\sqrt[3]{2z}$	j) $\frac{5}{x}\sqrt{\frac{1}{5}x}$	k) $\frac{a}{2b}\sqrt{\frac{8b}{3a}}$	l) $2x^3\sqrt[4]{x}$
m) $3a^2\sqrt[5]{a}$	n) $ab^3\sqrt[6]{b^2}$	o) $x^3y\sqrt[7]{xy^2}$	

2. Introducir dentro del sub-radical los coeficientes de los radicales:

a) $(2a+x)\sqrt{3x}$	b) $(x+1)\sqrt[3]{x+1}$	c) $\frac{1}{a-b}\sqrt{a^2-b^2}$
d) $(3-2xy)\sqrt{x-y}$	e) $\frac{a+b}{a-b}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$	f) $\frac{x+y}{x-y}\sqrt[3]{\frac{x-y}{x+y}}$
g) $\frac{2}{x+y}\sqrt[3]{\frac{x^2-y^2}{4}}$	h) $(a+b)\sqrt{\frac{1}{a^2-b^2}}$	i) $(a+3x)\sqrt[4]{a+3x}$
j) $2x(y+1)\sqrt[5]{x(y+1)}$	k) $4x\sqrt[3]{(a+b)(a-b)}$	l) $\frac{a+1}{a-1}\sqrt[3]{\frac{(a-1)}{(a+1)}}$

3. Reducir al indice común los siguientes radicales:

a) $\sqrt{3a}$; $\sqrt[3]{5a}$; $\sqrt[4]{a^2}$	b) $\sqrt[5]{x^3}$; $\sqrt[6]{x^5}$; $\sqrt[10]{x^6}$
c) $\sqrt[8]{xy^3}$; $\sqrt[6]{3x^2y^3}$; $\sqrt{xy}$	d) $\sqrt[4]{ab^2}$; $\sqrt[3]{2a^2b}$; $\sqrt[6]{5a}$
e) $\sqrt{a^2}$; $\sqrt[4]{ax^2}$; $\sqrt[5]{a-x}$	f) $\sqrt{a^2-2}$; $\sqrt[4]{a-b}$; $\sqrt[6]{a+b}$
g) $\sqrt{\frac{x}{y^2}}$; $\sqrt[3]{\frac{2}{x}}$; $\sqrt[4]{\frac{3}{2x}}$	h) $\sqrt[3]{\frac{1}{a-b}}$; $\sqrt[4]{\frac{1}{a+b}}$
i) $\sqrt[5]{x+2y}$; $\sqrt{2x+y}$; $\sqrt[3]{3ax}$	j) $\sqrt[8]{a-b}$; $\sqrt[4]{x-a}$; $\sqrt[5]{a-y}$
k) $\sqrt[9]{2ax}$; $\sqrt[3]{3x-1}$; $\sqrt[6]{x+3}$	l) $\sqrt[24]{a+3b}$; $\sqrt[5]{3x+1}$; $\sqrt[8]{b-5}$
m) $\sqrt[3]{\frac{x-y}{2}}$; $\sqrt[4]{\frac{a+b}{x}}$; $\sqrt{\frac{x-2b}{3}}$	n) $\sqrt[a]{x}$; $\sqrt[b]{x^2}$; $\sqrt[c]{x^3}$
o) $\sqrt[n]{2a}$; $\sqrt[5]{3x}$; $\sqrt[p]{ax}$	p) $\sqrt[p]{3x^2}$; $\sqrt[r]{2ab}$; $\sqrt[s]{abx}$

RESPUESTAS TALLER 37

1.

a) $\sqrt{18ax^4}$	b) $\sqrt{24ax^3}$	c) $\sqrt{50a^3b^3}$
d) $\sqrt{4x^2(x+y)}$	e) $\sqrt{135x^4y^4}$	f) $\sqrt{a^2(2a-1)}$
g) $\sqrt{36a^2b^4(a+b)}$	h) $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}(3x)}$	i) $\sqrt[3]{2z\left(\frac{x^3}{y^3}\right)}$
j) $\sqrt{\frac{5}{x}}$	k) $\sqrt{\frac{9a}{3b}}$	l) $\sqrt{\frac{2a}{3b}}$
m) $\sqrt[4]{16x^3}$	n) $\sqrt[7]{243a^{11}}$	o) $\sqrt[6]{a^6b^{20}}$
p) $\sqrt[7]{x^{22}y^9}$		

2.

a) $\sqrt{3x(2a+x)^2}$	b) $\sqrt[3]{(x+1)^4}$	c) $\sqrt{\frac{(a+b)}{a-b}}$
d) $\sqrt{(x-y)(3-2xy)^2}$	e) $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$	f) $\sqrt[3]{\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}$

g) $\sqrt[3]{\dfrac{x-y}{x+y}}$ h) $\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$ i) $\sqrt[4]{(a+3x)^5}$

j) $\sqrt[5]{32x^6(y+1)^6}$ k) $\sqrt[3]{64x^3\left(a^2-b^2\right)}$ l) $\sqrt[4]{\left(\dfrac{a+1}{a-1}\right)^3}$

3.

a) $\begin{cases}\sqrt[12]{729a^6}\\ \sqrt[12]{625a^4}\\ \sqrt[12]{a^6}\end{cases}$ b) $\begin{cases}\sqrt[30]{x^{18}}\\ \sqrt[30]{x^{25}}\\ \sqrt[30]{x^{18}}\end{cases}$ c) $\begin{cases}\sqrt[24]{x^3y^9}\\ \sqrt[24]{81x^8y^{12}}\\ \sqrt[24]{x^{12}y^{12}}\end{cases}$ d) $\begin{cases}\sqrt[12]{a^3b^6}\\ \sqrt[12]{16a^8b^4}\\ \sqrt[12]{25a^2}\end{cases}$

e) $\begin{cases}\sqrt[20]{a^{20}}\\ \sqrt[20]{a^5x^{10}}\\ \sqrt[20]{(a-x)^4}\end{cases}$ f) $\begin{cases}\sqrt[12]{(a^2-2)^6}\\ \sqrt[12]{(a-b)^3}\\ \sqrt[12]{(a+b)^2}\end{cases}$ g) $\begin{cases}\sqrt[12]{\dfrac{x^6}{y^{12}}}\\ \sqrt[12]{\dfrac{16}{x^4}}\\ \sqrt[12]{\dfrac{27}{8x^3}}\end{cases}$ h) $\begin{cases}\sqrt[12]{\dfrac{1}{(a-b)^4}}\\ \sqrt[12]{\dfrac{1}{(a+b)^3}}\end{cases}$

i) $\begin{cases}\sqrt[30]{(x+2y)^6}\\ \sqrt[30]{(2x+y)^{15}}\\ \sqrt[30]{(3ax)^{10}}\end{cases}$ j) $\begin{cases}\sqrt[40]{(a-b)^5}\\ \sqrt[40]{(x-a)^{10}}\\ \sqrt[40]{(a-y)^8}\end{cases}$ k) $\begin{cases}\sqrt[18]{4a^2x^2}\\ \sqrt[18]{(3x-1)^6}\\ \sqrt[18]{(x+3)^3}\end{cases}$ l) $\begin{cases}\sqrt[120]{(a+3b)^5}\\ \sqrt[120]{(3x+1)^{24}}\\ \sqrt[120]{(b-5)^{15}}\end{cases}$

m) $\begin{cases}\sqrt[12]{\dfrac{(x-y)^4}{16}}\\ \sqrt[12]{\dfrac{(a+b)^3}{x^3}}\\ \sqrt[12]{\dfrac{(x-2b)^6}{729}}\end{cases}$ n) $\begin{cases}\sqrt[abc]{x^{bc}}\\ \sqrt[abc]{x^{2ac}}\\ \sqrt[abc]{x^{3ab}}\end{cases}$ ñ) $\begin{cases}\sqrt[nsp]{(2a)^{sp}}\\ \sqrt[nsp]{(3x)^{np}}\\ \sqrt[nsp]{(ax)^{ns}}\end{cases}$ p) $\begin{cases}\sqrt[prs]{(3x^2)^{rs}}\\ \sqrt[prs]{(2ab)^{ps}}\\ \sqrt[prs]{(abx)^{pr}}\end{cases}$

3.6.6.9. Simplificación de Radicales

Simplificar un radical es reducirlo a su mínima expresión, dividiendo el índice del radical y los exponentes del subradical entre un mismo número (por medio de máximo común divisor **(M.C.D.)** de ellos.

Ejemplo 1: Simplificar el radical: $\sqrt[10]{x^{15}}$

Resolución:

El **M.C.D.** de 10 y 15 es 5 veamos:

$$\begin{array}{cc|c} 10 & -\ 15 & 5 \\ 2 & -\ 3 & \end{array} \Rightarrow \textbf{M.C.D. (10 y 15)} = \boxed{5}$$

Luego, se divide entre $\boxed{5}$ el indice del radical y el exponente del subradical osea:

$$\sqrt[10]{x^{15}} = \sqrt[10:5]{x^{15:5}} = \sqrt[2]{x^3} = \boxed{\sqrt{x^3}}$$

Ejemplo 2: Simplificar el radical: $\sqrt[9]{b^{12}x^{18}}$

Resolución:

El **M.C.D.** de 9; 12 y 18 es 3; veamos:

$$\begin{array}{ccc|c} 9 & -\ 12 & -\ 18 & 3 \\ 3 & -\ 4 & -\ 6 & \end{array} \Rightarrow \textbf{M.C.D. (9; 12 y 18)} = \boxed{3}$$

Luego, se divide entre $\boxed{3}$ el índice del radical y los exponentes de las variables del subradical osea:

$$\sqrt[9]{b^{12}x^{18}} = \sqrt[9:3]{b^{12:3}x^{18:3}} = \boxed{\sqrt[3]{b^4x^6}}$$

Ejemplo 3: Simplificar el radical: $\sqrt[24]{a^8b^{12}z^4}$

Resolución:

El **M.C.D.** de 24; 8; 12 y 4, veamos:

$$\begin{array}{cccc|c} 24 & -\ 8 & -\ 12 & -\ 4 & 2 \\ 12 & -\ 4 & -\ 6 & -\ 2 & 2 \\ 6 & -\ 2 & -\ 3 & -\ 1 & \end{array} \Rightarrow \textbf{M.C.D. (24; 8; 12 y 4)} = 2\cdot 2 = \boxed{4}$$

Luego; se divide entre $\boxed{4}$ el índice del radical y los exponentes de las variables del subradical.

Osea: $\sqrt[24]{a^8b^{12}z^4} = \sqrt[24:4]{a^{8:4}b^{12:4}z^{4:4}} = \boxed{\sqrt[6]{a^2b^3z}}$

Ejemplo 3: Simplificar el radical: $\sqrt[16]{\dfrac{81x^{24}y^{20}}{z^{32}}}$

Resolución:

La expresión dada; se puede escribir así: $\sqrt[16]{\dfrac{3^4x^{24}y^{20}}{z^{32}}}$

Recuerda que: $81 = 3^4$

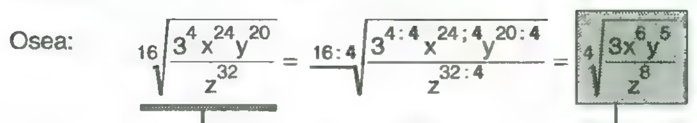
Ahora, hallamos el **M.C.D.** del índice (16); y de los exponentes de las cantidades del subradical (4; 24; 20 y 32)

16 –	4 –	24 –	20 –	32	2
8 –	2 –	12 –	10 –	16	2
4 –	1 –	6 –	5 –	8	

⇨ **M.C.D. (16; 4; 24; 20 y 32) = 2·2 = 4**

Luego; se divide entre 4 el índice del radical y los exponentes del subradical.

Osea:



$$\sqrt[16]{\frac{3^4x^{24}y^{20}}{z^{32}}} = \sqrt[16:4]{\frac{3^{4:4}x^{24:4}y^{20:4}}{z^{32:4}}} = \sqrt[4]{\frac{3x^6y^5}{z^8}}$$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 38

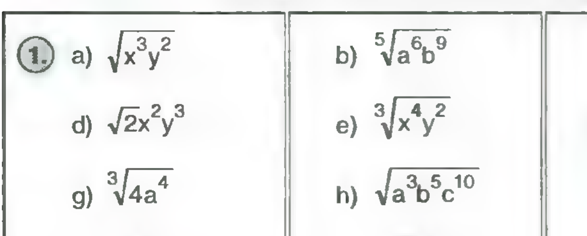
1. Simplificar los siguientes radicales:

a) $\sqrt[4]{x^6y^4}$	b) $\sqrt[10]{a^{12}b^{18}}$	c) $\sqrt[12]{x^6y^6}$	d) $\sqrt[10]{32x^{20}y^{15}}$
e) $\sqrt[15]{x^{20}y^{10}}$	f) $\sqrt[18]{x^{24}y^{12}z^6}$	g) $\sqrt[6]{16a^8}$	h) $\sqrt[4]{a^6b^{10}c^{20}}$
i) $\sqrt[2a]{x^ay^{3a}}$	j) $\sqrt[2x]{a^{6x}b^{4x}c^{8x}}$	k) $\sqrt[40]{x^8y^{24}z^{32}}$	l) $\sqrt[24]{a^{28}b^{12}c^8}$

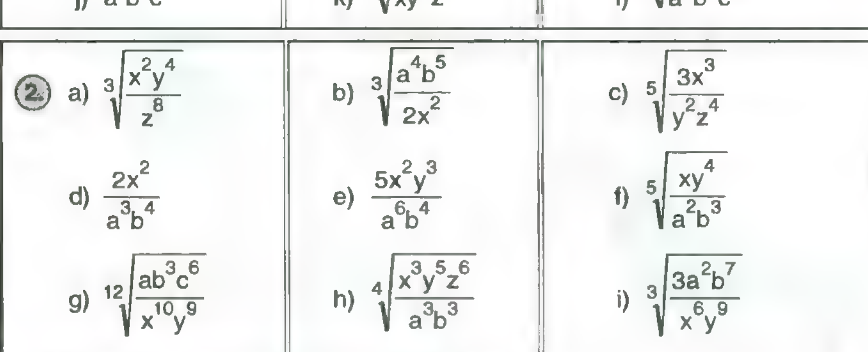
2. Simplificar los siguientes radicales:

a) $\sqrt[9]{\dfrac{x^6y^{12}}{z^{24}}}$	b) $\sqrt[12]{\dfrac{a^{16}b^{20}}{64x^8}}$	c) $\sqrt[20]{\dfrac{81x^{12}}{y^8z^{16}}}$
d) $\sqrt[6]{\dfrac{64x^{12}}{a^{18}b^{24}}}$	e) $\sqrt[3]{\dfrac{125x^6y^9}{a^{18}y^{12}}}$	f) $\sqrt[30]{\dfrac{x^6y^{24}}{a^{12}b^{18}}}$
g) $\sqrt[48]{\dfrac{a^4b^{12}c^{24}}{x^{40}y^{36}}}$	h) $\sqrt[16]{\dfrac{x^{12}y^{20}z^{24}}{a^8b^{12}}}$	i) $\sqrt[15]{\dfrac{243a^{10}b^{35}}{x^{30}y^{45}}}$

RESPUESTAS TALLER 38



1. a) $\sqrt{x^3y^2}$	b) $\sqrt[5]{a^6b^9}$	c) $\sqrt{xy}$
d) $\sqrt{2}x^2y^3$	e) $\sqrt[3]{x^4y^2}$	f) $\sqrt[3]{x^4y^2z}$
g) $\sqrt[3]{4a^4}$	h) $\sqrt{a^3b^5c^{10}}$	i) $\sqrt{xy^3}$
j) $a^3b^2c^4$	k) $\sqrt[5]{xy^3z^4}$	l) $\sqrt[6]{a^7b^3c^2}$



2. a) $\sqrt[3]{\frac{x^2y^4}{z^8}}$	b) $\sqrt[3]{\frac{a^4b^5}{2x^2}}$	c) $\sqrt[5]{\frac{3x^3}{y^2z^4}}$
d) $\frac{2x^2}{a^3b^4}$	e) $\frac{5x^2y^3}{a^6b^4}$	f) $\sqrt[5]{\frac{xy^4}{a^2b^3}}$
g) $\sqrt[12]{\frac{ab^3c^6}{x^{10}y^9}}$	h) $\sqrt[4]{\frac{x^3y^5z^6}{a^3b^3}}$	i) $\sqrt[3]{\frac{3a^2b^7}{x^6y^9}}$

3.7 RAÍZ CUADRADA DE POLINOMIOS

En la extracción de la raíz cuadrada de un polinomio se debe tener en cuenta los siguientes pasos:

1. Se completa y ordena respecto a una letra, se agrupan los términos de 2 en 2 (período) comenzado de derecha a izquierda.
2. Se extrae la raíz cuadrada tan sólo del primer término del polinomio ordenado, la cual es el primer término de la raíz buscada.
3. Del polinomio se resta el cuadrado del primer término de la raíz hallada(cambio de signo en el sustraendo).
4. Se divide el primer término del polinomio que resulta de la resta entre el duplo del primer término de la raíz siendo su cociente el segundo término de la raíz buscada, el cual cociente se añade al primer término de la raíz y al duplo del mismo, haciéndolos multiplicar por el mismo, cuyo producto se resta de nuevo del polinomio anteriormente obtenido.
5. Se duplican los dos términos encontrados de la raíz.
6. De nuevo se divide el primer término del polinomio obtenido de la resta, entre el doble del primer término de la raíz, cuyo cociente es el tercer térmi-

no de la raíz buscada; este cociente se añade a los dos términos de la raíz y al duplo de la raíz, luego se multiplica el trinomio así obtenido por el tercer término de la raíz y el producto de resta del polinomio anteriormente obtenido.

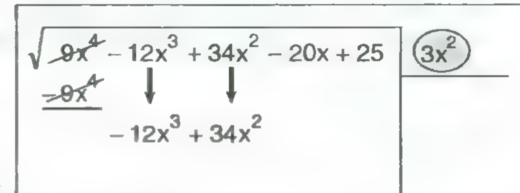
7. Siguiendo así el mismo desarrollo se encontraran los demás términos de la raíz buscada de un polinomio dado.

Ejemplo 1: Extraer la araíz cuadrada de: $9x^4 - 12x^3 + 34x^2 - 20x + 25$

Explicación:

1. Se extrae la raíz cuadrada del primer término:

$$\sqrt{9x^4} = 3x^2$$



2. Se eleva al cuadrado la raíz hallada $[(3x^2)^2 = 9x^4]$ y se le resta del polinomio radicando (cambia de signo), anulándose así el primer término y se bajan los dos térmminos siguientes: $(-12x^3 + 34x^2)$

3. A la altura de los dos términos bajados se duplica la raíz $3x^2$ osea: $2(3x^2) = 6x^2$

4. Se divide el primer término bajado entre el doble de la raíz osea:

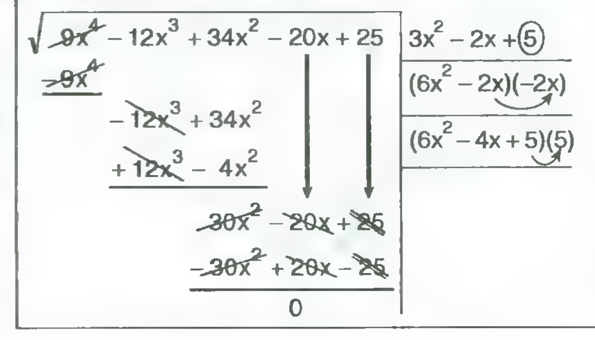
$$-12x^3 : 6x^2 = -2x$$

$\sqrt{9x^4 - 12x^3 + 34x^2 - 20x + 25}$ | $3x^2 - 2x$
$-9x^4$ | $(6x^2 - 2x)(-2x)$
$-12x^3 + 34x^2$
$+12x^3 - 4x^2$
$30x^2$

5. Se añade el cociente así obtenido $(-2x)$ al primer término de la raíz; obteniendo: $3x^2 - 2x$; luego se añade también al duplo de la raíz formando un binomio $(6x^2 - 2x)$, el cuál se multiplica por ese mismo término osea: $(6x^2 - 2x)(-2x)$

6. El producto de: $(6x^2 - 2x)(-2x) = -12x^3 + 4x^2$; se resta (cambio de signo) del resto del polinomio, anulándose de nuevo el primer término.

7. Se bajan los dos términos siguientes a la al-



tura de la diferencia $30x^2$ osea: $\boxed{30x^2 - 20x + 25}$

8. A esa misma altura se duplica de nuevo los términos de la raíz obteniendo:

$$\boxed{2(3x^2 - 2x) = 6x^2 - 4x}$$

9. Se divide el primer término del nuevo resto entre el duplo del primer término de la raíz osea: $30x^2 : 6x^2 = 5$

10. Se añade el cociente así obtenido (5) a los dos términos de la raíz obteniendo $(3x^2 - 2x + 5)$ y también a los dos términos duplos de la raíz; formando un trinomio $(6x^2 - 4x + 5)$ el cual se multiplica por ese mismo término osea: $(6x^2 - 4x + 5)(5) =$

11. El producto de $(6x^2 - 4x + 5)(5) = 30x^2 - 20x + 25$; se resta (cambio de signo) del polinomio, anulándose cada término.

Luego: $3x^2 - 2x + 5$; es la raíz cuadrada del polinomio

$9x^4 - 12x^3 + 34x^2 - 20x + 25$

Prueba:

$\sqrt{N}$	x (raíz)	⇨ $N = x^2 + r$
Resto = r		

Del ejemplo anterior:

$$\begin{aligned} 9x^4 - 12x^3 + 34x^2 - 20x + 25 &= (3x^2 - 2x + 5)^2 + 0 \\ &= (3x^2 - 2x + 5)(3x^2 - 2x + 5) \\ &= 9x^4 - 6x^3 + 15x^2 \\ &\quad - 6x^3 + 4x^2 - 10x \\ &\quad + 15x^2 - 10x + 25 \\ &= 9x^4 - 12x^3 + 34x^2 - 20x + 25 \end{aligned}$$

Ejemplo 2: Hallar la raíz cuadrada de: $a^4 - 4a^3x + 6a^2x^2 - 4ax^3 + x^4$

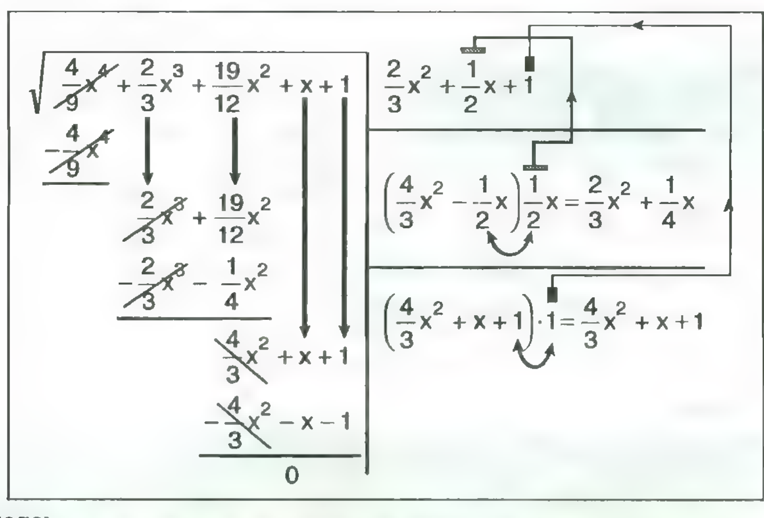
Resolución:

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{a^4 - 4a^3x + 6a^2x^2 - 4ax^3 + x^4} & a^2 - 2ax + x^2 \\ \underline{-a^4} & \overline{(2a^2 - 2ax)(-2ax) = -4a^3x + 4a^2x^2} \\ \quad -4a^3x + 6a^2x^2 & (2a^2 - 4ax + x^2)(x^2) = 2a^2x^2 - 4ax^3 + x^4 \\ \quad \underline{+4a^3x - 4a^2x^2} & \\ \qquad 2a^2x^2 - 4ax^3 + x^4 & \\ \qquad \underline{-2a^2x^2 + 4ax^3 - x^4} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Luego: $a^2 - 2ax + x^2$ es raíz cuadrada de: $a^4 - 4a^3x + 6a^2x^2 - 4ax^3 + x^4$

Ejemplo 3: Hallar la raíz cuadrada de: $\frac{4}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{19}{12}x^2 + x + 1$

Resolución:



Luego:

$\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ es la raíz cuadrada de: $\frac{4}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{17}{12}x^2 + x + 1$

Ejemplo 4: Extraer la raíz cuadrada del siguiente polinomio:

$$0{,}04x^4 + 0{,}12x^3 + 0{,}49x^2 + 0{,}6x + 1$$

Resolución:

$\sqrt{0{,}04x^4 + 0{,}12x^3 + 0{,}49x^2 + 0{,}6x + 1}$ | $0{,}2x^2 + 0{,}3x + 1$

$-0{,}04x^4$

$0{,}12x^3 + 0{,}49x^2$ | $(0{,}4x^2 + 0{,}3x)(0{,}3x) = 0{,}12x^3 + 0{,}09x^2$

$-0{,}12x^3 - 0{,}09x^2$

$0{,}40x^2 + 0{,}6x + 1$ | $(0{,}4x^2 + 0{,}6x + 1)\cdot 1 = 0{,}4x^2 + 0{,}6x + 1$

$-0{,}40x^2 - 0{,}6x - 1$

0

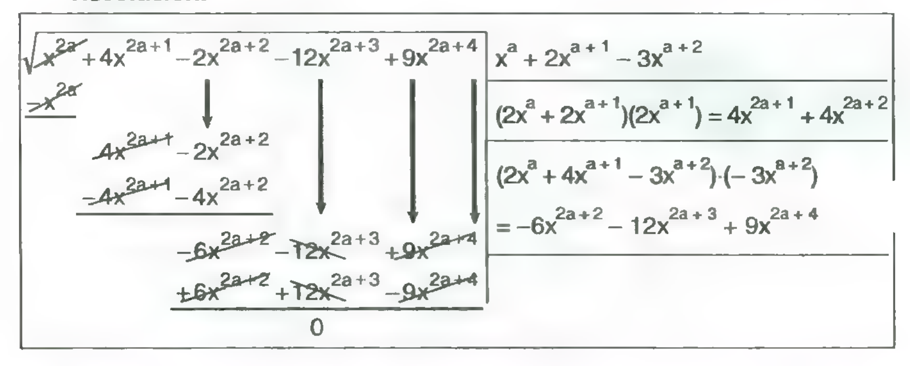
Luego:

$0{,}2x^2 + 0{,}3x + 1$ es la raíz cuadrada del $0{,}04x^4 + 0{,}12x^3 + 0{,}49x^2 + 0{,}6x + 1$

Ejemplo 5: Hallar la raíz cuadrada de:

$$x^{2a} + 4x^{2a+1} - 2x^{2a+2} - 12x^{2a+3} + 9x^{2a+4}$$

Resolución:



Luego:

$x^a + 2x^{a+1} - 3x^{a+2}$ **es la raíz cuadrada de:**

$$x^{2a} + 4x^{2a+1} - 2x^{2a+2} - 12x^{2a+3} + 9x^{2a+4}$$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 39

1. Extraer la raíz cuadrada de los siguientes polinomios:

a) $16x^4 + 24x^3 + 49x^2 + 30x + 25$	b) $x^6 + 8x^5 + 20x^4 + 16x^3 + 4x^2$
c) $9x^4y^2 + 6x^3y^2 + 25x^2y^2 + 8xy + 16$	d) $4x^4 + 12x^3 + 5x^2 - 6x - 1$
e) $x^4 - 6x^3 - 30x + 19x^2 + 25$	f) $x^6 + 6x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 11x^2 - 3x + 2$
g) $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 13x + 8$	h) $9x^4 + 12x^3y + 34x^2y^2 + 20xy^3 + 25y^4$

2. Extraer la raíz cuadrada de los siguientes polinomios:

a) $\frac{9}{25}x^4 + \frac{12}{15}x^3 + \frac{47}{45}x^2 + \frac{4}{6}x + \frac{1}{2}$

b) $\frac{4}{9}x^4 + \frac{4}{6}x^3 + \frac{25}{21}x^2 + \frac{2}{7}x + \frac{1}{4}$

c) $\frac{25}{36}x^6 - \frac{5}{3}x^5 + x^4 + \frac{5}{6}x^3 - x^2 + \frac{1}{4}$

d) $0{,}25x^4 + 0{,}7x^3 + 2{,}49x^2 + 2{,}8x + 4$
e) $0{,}04x^4 + 0{,}12x^3 + 2{,}49x^2 + 3{,}6x + 36$
f) $1{,}44x^4 + 1{,}2x^3 + x + 1 + 2{,}65x^2$
g) $x^{2a} - 6x^{2a+1} + x^{2a+2} + 24x^{2a+3} + 16x^{2a+4}$
h) $9x^{2a} - 24x^{2a+1} + 22x^{2a+2} - 8x^{2a+3} + x^{2a+4}$

RESPUESTAS TALLER 39

a) raíz: $4x^2 + 3x + 5 \Rightarrow$ resto: 0
b) raíz: $x^3 + 4x^2 + 2x \Rightarrow$ resto: 0
c) raíz: $3x^2y + xy + 4 \Rightarrow$ resto: 0
d) raíz: $2x^2 + 3x - 1 \Rightarrow$ resto: 0
e) raíz: $x^2 - 3x + 5 \Rightarrow$ resto: 0
f) raíz: $x^3 + 3x^2 - 2x + 1 \Rightarrow$ resto: $x^2 + x + 1$
g) raíz: $x^2 - 2x - 3 \Rightarrow$ resto: $x - 1$
h) raíz: $3x^2 + 2xy + 5y^2 \Rightarrow$ resto: 0

a) raíz: $\frac{3}{5}x^2 + \frac{2}{3}x + 1 \Rightarrow$ resto: 0
b) raíz: $\frac{2}{3}x^2 + x + \frac{1}{7} \Rightarrow$ resto: 0
c) raíz: $\frac{5}{6}x^3 - x^2 + \frac{1}{2} \Rightarrow$ resto: 0
d) raíz: $0{,}5x^2 + 0{,}7x + 2 \Rightarrow$ resto: 0
e) raíz: $0{,}2x^2 + 0{,}3x + 6 \Rightarrow$ resto: 0
f) raíz: $1{,}2x^2 + 0{,}5x + 1 \Rightarrow$ resto: 0
g) raíz: $x^a - 3x^{a+1} - 4x^{a+2} \Rightarrow$ resto: 0
h) raíz: $3x^a - 4x^{a+1} + x^{a+2} \Rightarrow$ resto: 0

3.8 OPERACIONES CON RADICALES

3.8.1 ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE RADICALES

Si los radicales **NO** son semejantes la operación se deja inidicada. Ejemplos:

a) Efectuar: $4\sqrt[3]{x}+6x-3\sqrt[3]{z}$ ⇒ **Los radicales no son semejantes**

b) Efectuar: $7\sqrt{a}-5\sqrt[3]{2a}+2\sqrt{3a}$ ⇒ **Los radicales no son semejantes**

* Si los radicales **son semejantes** se separa el radical como factor común de todos los términos .

Ejemplos:

a) Efectuar: $6\sqrt[3]{2x}-8\sqrt[3]{2x}+9\sqrt[3]{2x}=\underbrace{\sqrt[3]{2x}}_{\text{Factor Común}}(6-8+9)=\sqrt[3]{2x}(7)=\boxed{7\sqrt[3]{2x}}$

b) Efectuar: $4\sqrt{3ab}+6\sqrt{3ab}-\sqrt{3ab}=\underbrace{\sqrt{3ab}}_{\text{Factor Común}}(4+6-1)=\sqrt{3ab}(9)=\boxed{9\sqrt{3ab}}$

c) Efectuar: $6\sqrt[3]{3z}+a\sqrt[3]{3z}-2b\sqrt[3]{3z}=\underbrace{\sqrt[3]{3z}}_{\text{Factor Común}}(6+a-2b)=\boxed{(6+a-2b)\sqrt[3]{3z}}$

* *Para sumar y restar varios radicales cuyos subradicales son diferentes se les transforma descomponiendolos en dos factores, de los cuales uno de ellos tenga raíz exacta, del que se extraerá la raiz para que el resultado pase a ser coeficiente del radical, el segundo factor se dejará indicado en el subradical o radicando.*

Ejemplo 1: Efectuar: $\sqrt{50x}+\sqrt{18x}-\sqrt{8x}$

Resolución:

Descomponemos cada una de las cantidades subradicales en dos factores de tal modo que uno de ellos tenga raíz exacta (cuadrado perfecto). Veamos:

$$\sqrt{50x}=\sqrt{25\cdot 2x}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{2x}=5\sqrt{2x}$$

$$\sqrt{18x}=\sqrt{9\cdot 2x}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{2x}=3\sqrt{2x}$$

$$\sqrt{8x}=\sqrt{4\cdot 2x}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{2x}=2\sqrt{2x}$$

> ***Recuerda que:***
>
> *Número cuadrado perfecto es aquel que tiene raíz cuadrada exacta, osea es de la forma k^2.*

Luego:

$$\sqrt{50x}+\sqrt{18x}-\sqrt{8x}=5\sqrt{2x}+3\sqrt{2x}-2\sqrt{2x}$$

$$=\underbrace{\sqrt{2x}}_{\text{Factor Común}}(5+3-2)=\sqrt{2x}(6)=\boxed{6\sqrt{2x}}$$

$$\therefore \boxed{\sqrt{50x}+\sqrt{18x}-\sqrt{8x}=6\sqrt{2x}}$$

Ejemplo 2: Efectuar: $2\sqrt{27x^3}-3\sqrt{12x^3}+\sqrt{48x^3}$

Resolución:

Descomponemos cada una de las cantidades subradicales en dos factores de tal modo que uno de ellos tenga la raíz exacta (cuadrado perfecto).

$$2\sqrt{27x^3}=2\sqrt{9\cdot 3\cdot x^2\cdot x}=2\sqrt{9x^2\cdot 3x}=2\sqrt{9x^2}\cdot\sqrt{3x}$$
$$=2\cdot 3x\sqrt{3x}=\boxed{6x\sqrt{3x}}$$

$$3\sqrt{12x^3}=3\sqrt{4\cdot 3\cdot x^2\cdot x}=3\sqrt{4x^2\cdot 3x}=3\sqrt{4x^2}\cdot\sqrt{3x}$$
$$=3\cdot 2x\sqrt{3x}=\boxed{6x\sqrt{3x}}$$

$$\sqrt{48x^3}=\sqrt{16\cdot 3\cdot x^2\cdot x}=\sqrt{16x^2\cdot 3x}=\sqrt{16x^2}\cdot\sqrt{3x}=\boxed{4x\sqrt{3x}}$$

Luego:

$$2\sqrt{27x^3}-3\sqrt{12x^3}+\sqrt{48x^3}=6x\sqrt{3x}-6x\sqrt{3x}+4x\sqrt{3x}$$
$$=\sqrt{3x}(6x-6x+4x)=\sqrt{3x}(4x)=4x\sqrt{3x}$$

$$\therefore \boxed{2\sqrt{27x^3}-3\sqrt{12x^3}+\sqrt{48x^3}=4x\sqrt{3x}}$$

Ejemplo 3: Efectuar: $5a\sqrt[3]{16x^4}+3a\sqrt[3]{54x^4}-a\sqrt[3]{128x^4}$

Resolución:

Descomponemos cada una de las cantidades subradicales en dos factores de tal modo que uno de ellos tenga la raíz exacta (cubo perfecto).

$$5a\sqrt[3]{16x^4}=5a\sqrt[3]{8\cdot 2\cdot x^3\cdot x}=5a\sqrt[3]{8x^3\cdot 2x}=5a\sqrt[3]{8x^3}\cdot\sqrt[3]{2x}$$
$$=5a\cdot 2x\sqrt[3]{2x}=\boxed{10ax\sqrt[3]{2x}}$$

$$3a\sqrt[3]{54x^4}=3a\sqrt[3]{27\cdot 2\cdot x^3\cdot x}=3a\sqrt[3]{27x^3\cdot 2x}=3a\sqrt[3]{27x^3}\cdot\sqrt[3]{2x}$$
$$=3a\cdot 3x\sqrt[3]{2x}=\boxed{9ax\sqrt[3]{2x}}$$

$$a\sqrt[3]{128x^4}=a\sqrt[3]{64\cdot 2\cdot x^3\cdot x}=a\sqrt[3]{64x^3\cdot 2x}=a\sqrt[3]{64x^3}\cdot\sqrt[3]{2x}=a\cdot 4x\sqrt[3]{2x}$$
$$=\boxed{4xa\sqrt[3]{2x}}$$

Luego:

$$5a\sqrt[3]{16x^4}+3a\sqrt[3]{54x^4}-a\sqrt[3]{128x^4}=10ax\sqrt[3]{2x}+9ax\sqrt[3]{2x}-4ax\sqrt[3]{2x}$$

$$=\sqrt[3]{2x}(10ax+9ax-4ax)$$

$$=\sqrt[3]{2x}(15ax)=\boxed{15ax\sqrt[3]{2x}}$$

> ***Recuerda que:***
>
> *Número cubo perfecto es aquel que tiene raíz cúbica exacta, osea es de la forma k^3.*

Ejemplo 4: Efectuar: $\sqrt{9x+27}+\sqrt{4x+12}-\sqrt{25x+75}$

Resolución:

$$\sqrt{9x+27}=\sqrt{9(x+3)}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{x+3}=\boxed{3\sqrt{x+3}}$$

$$\sqrt{4x+12}=\sqrt{4(x+3)}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{x+3}=\boxed{2\sqrt{x+3}}$$

$$\sqrt{25x+75}=\sqrt{25(x+3)}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{x+3}=\boxed{5\sqrt{x+3}}$$

Luego:

$$\sqrt{9x+27}+\sqrt{4x+12}-\sqrt{25x+75}=3\sqrt{x+3}+2\sqrt{x+3}-5\sqrt{x+3}$$

$$\sqrt{9x+27}+\sqrt{4x+12}-\sqrt{25x+75}=\sqrt{x+3}(3+2-5)=\sqrt{x+3}(0)=\boxed{\text{Cero}}$$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 40

1. Efectuar:

a) $12a\sqrt{5b}+8a\sqrt{5b}-7a\sqrt{5b}$	b) $10a^2b\sqrt[3]{2x}+3a^2b\sqrt[3]{2x}+a^2b\sqrt[3]{2x}$
c) $5\sqrt{a}-2\sqrt{a}+6\sqrt{a}-3\sqrt{a}+8\sqrt{a}$	d) $a^2\sqrt{7x}-3a^2\sqrt{7x}+10a^2\sqrt{7x}-2a^2\sqrt{7x}$
e) $6\sqrt[3]{xy}+8\sqrt[3]{xy}-\sqrt[3]{xy}+4\sqrt[3]{xy}$	f) $xy\sqrt{2a+b}-5xy\sqrt{2a+b}+4xy\sqrt{2a+b}$
g) $2ab\sqrt{x-y}+ab\sqrt{x-y}+6ab\sqrt{x-y}$	h) $a^2\sqrt[3]{x^2-2}-3a^2\sqrt[3]{x^2-2}+7a^2\sqrt[3]{x^2-2}$

i) $3x^n\sqrt{x+1}+6x^n\sqrt{x+1}-4x^n\sqrt{x+1}$

j) $9a^3\sqrt[3]{a}-3a^3\sqrt[3]{a}+12a^3\sqrt[3]{a}$

2. Efectuar:

a) $\frac{a}{2}\sqrt{2ab}+\frac{a}{3}\sqrt{2ab}-\frac{a}{4}\sqrt{2ab}$

b) $\frac{1}{5}x^2\sqrt{5y}+\frac{3}{4}x^2\sqrt{5y}-\frac{1}{2}x^2\sqrt{5y}$

c) $\frac{1}{3}a^2\sqrt{3xy}+\frac{5}{9}a^2\sqrt{3xy}+a^2\sqrt{3xy}$

d) $\frac{3}{5}x^2\sqrt{7ay}-\frac{8}{9}x^2\sqrt{7ay}-\frac{1}{3}x^2\sqrt{7ay}$

e) $\frac{1}{2}ab\sqrt{10a}-\frac{5}{8}ab\sqrt{10a}+\frac{3}{4}ab\sqrt{10a}$

f) $\frac{9}{a}\sqrt{5xy}-\frac{4}{a}\sqrt{5xy}+\frac{6}{a}\sqrt{5xy}$

3. Efectuar:

a) $3\sqrt{12x^3}-2\sqrt{75x^3}+\sqrt{48x^3}$

b) $a\sqrt{8x^3y^5}+3a\sqrt{18x^3y^5}-5a\sqrt{50x^3y^5}$

c) $2xy\sqrt{45ab^3}-xy\sqrt{125ab^3}+5xy\sqrt{80ab^3}$

d) $2\sqrt[3]{16x^4}+5\sqrt[3]{128x^4}-\sqrt[3]{54x^4}$

e) $3a\sqrt[3]{81a^4b^3}-5a\sqrt[3]{375a^4b^3}+3a\sqrt[3]{24a^4b^3}$

f) $5ax^2\sqrt[3]{32x^3y^2}-2ax^2\sqrt[3]{108x^3y^2}$

g) $3\sqrt{25x+75}+5\sqrt{16x+48}$

h) $3a\sqrt[3]{8a-24b}+a\sqrt[3]{27a-81b}$

i) $3ab\sqrt[3]{343x+686}-ab\sqrt[3]{125x+250}$

j) $8x^3\sqrt[3]{128x+192}+4x^3\sqrt[3]{288x+432}$

RESPUESTAS TALLER 40

1. a) $13a\sqrt{5b}$ b) $8a^2b\sqrt[3]{2x}$ c) $14\sqrt{a}$

d) $6a^2\sqrt{7x}$ e) $17\sqrt[3]{xy}$ f) Cero

g) $9ab\sqrt{x-y}$	h) $5a^{2}\sqrt[3]{x^{2}-2}$	i) $5x^{n}\sqrt{x+1}$
j) $18a^{3}\sqrt[3]{a}$		

② a) $\frac{7}{12}a\sqrt{2ab}$	b) $\frac{9}{20}x^{2}\sqrt{5y}$	c) $\frac{17}{9}a^{2}\sqrt{3xy}$
d) $-\frac{48}{45}x^{2}\sqrt{7ay}$	e) $\frac{3}{8}ab\sqrt{10a}$	f) $\frac{11}{a}\sqrt{5xy}$

③ a) Cero	b) $14axy^{2}\sqrt{2xy}$	c) $21bxy\sqrt{5ab}$
d) $21x\sqrt[3]{2x}$	e) $-10a^{2}b\sqrt[3]{3a}$	f) $4ax^{3}\sqrt[3]{4y^{2}}$
g) $35\sqrt{x+3}$	h) $9a\sqrt[3]{a-3b}$	i) $16ab\sqrt[3]{x+2}$
j) $112x^{3}\sqrt{2x+3}$		

3.8.2 MULTIPLICACIÓN DE RADICALES

Para multiplicar dos o más radicales se multiplican entre si sus coeficientes y luego los subradicales, conservando el mismo índice. Los radicales que han de multiplicarse deben ser homogéneos (con iguales índices).

Ejemplos: Efectuar la multiplicación de los radicales:

a) $2\sqrt{a}\cdot 5\sqrt{x}=25\sqrt{a}\cdot\sqrt{x}=10\sqrt{a\cdot x}=\boxed{10\sqrt{ax}}$

b) $3a\sqrt{6x}\cdot 7a\sqrt{z}=3a\cdot 7a\sqrt{6x}\cdot\sqrt{z}=21a^{2}\sqrt{6x\cdot z}=\boxed{21a^{2}\sqrt{6xz}}$

c) $\frac{4}{3}x\sqrt[3]{2a}\cdot\frac{5}{8}b\sqrt[3]{5x}=\frac{4}{3}x\cdot\frac{5}{8}b\sqrt[3]{2a}\cdot\sqrt[3]{5x}=\frac{5}{6}bx\sqrt[3]{2a\cdot 5x}=\boxed{\frac{5}{6}bx\sqrt[3]{10ax}}$

I. Multiplicación de Radicales:

Para multiplicar un polinomio por otro cuando tienen radicales, se multiplica el segundo polinomio por cada uno de los términos del primer polinomio, sumando los productos parciales o reduciendo los términos semejantes, si los hay.

Ejemplo 1: Efectuar: $\left(3a\sqrt{2x}+a\sqrt{3x}\right)\left(a\sqrt{5a}-b\sqrt{2a}\right)$

Resolución:

$$\left(3a\sqrt{2x}+a\sqrt{3x}\right)\left(a\sqrt{5a}-b\sqrt{2a}\right)=3a\sqrt{2x}\left(a\sqrt{5a}-b\sqrt{2a}\right)+a\sqrt{3x}\left(a\sqrt{5a}-b\sqrt{2a}\right)$$

$$= 3a^2\sqrt{2x\cdot 5a} - 3ab\sqrt{2x\cdot 2a} + a^2\sqrt{3x\cdot 5a} - ab\sqrt{3x\cdot 2a}$$

$$= \boxed{3a^2\sqrt{10ax} - 3ab\sqrt{4ax} + a^2\sqrt{15ax} - ab\sqrt{6ax}}$$

Ejemplo 2: Efectuar: $\left(9a + 3\sqrt{5a}\right)\left(2 - \sqrt{5a}\right)$

Resolución:

$$\left(9a + 3\sqrt{5a}\right)\left(2 - \sqrt{5a}\right) = 9a\left(2 - \sqrt{5a}\right) + 3\sqrt{5a}\left(2 - \sqrt{5a}\right)$$

$$= 18a - 9a\sqrt{5a} + 6\sqrt{5a} - 3\sqrt{25a^2}$$

$$= 18a - 9a\sqrt{5a} + 6\sqrt{5a} - 3(5a) = \boxed{3a + (6 - 9a)\sqrt{5a}}$$

Ejemplo 3: Efectuar: $\left(a\sqrt{2b} - a\sqrt{3b}\right)\left(2a\sqrt{2b} + 3a\sqrt{3b}\right)$

Resolución:

$$\left(a\sqrt{2b} - a\sqrt{3b}\right)\left(2a\sqrt{2b} + 3a\sqrt{3b}\right) = a\sqrt{2b}\left(2a\sqrt{2b} + 3a\sqrt{3b}\right) - a\sqrt{3b}\left(2a\sqrt{2b} + 3a\sqrt{3b}\right)$$

$$= 2a^2\sqrt{4b^2} + 3a^2\sqrt{6b^2} - 2a^2\sqrt{6b^2} - 3a^2\sqrt{9b^2}$$

$$= 2a^2(2b) + 3a^2\left(\sqrt{6}b\right) - 2a^2\left(\sqrt{6}b\right) - 3a^2(3b)$$

$$= 4a^2b + 3\sqrt{6}a^2b - 2\sqrt{6}a^2b - 9a^2 = \boxed{\sqrt{6}a^2b - 5a^2b}$$

II. Multiplicación de Radicales Heterogeneos

Para multiplicar dos o más radicales que no sean homogéneos, se les reduce al común índice por medio del **M.C.M.** de ellos y a continuación se efectúa la multiplicación indicada.

Ejemplo 1: Efectuar: $3a\sqrt[6]{a^2}$ por $2x\sqrt[8]{a^3}$

Resolución:

Hallamos el **M.C.M.** de los índices 6 y 8 siendo este 24, veamos:

6	– 8	2
3	– 4	2
3	– 2	2
3	– 1	3
1	– 1	

⇨ **M.C.M.(6 y 8) = $2^3 \cdot 3$ = $\boxed{24}$**

Donde:

$$3a\sqrt[6]{a^2} = 3a\sqrt[24]{\left(a^2\right)^4} = 3a\sqrt[24]{a^8}$$

$$2x\sqrt[8]{a^2} = 2x\sqrt[24]{\left(a^3\right)^3} = 2x\sqrt[24]{a^9}$$

Luego: $3a\sqrt[6]{a^2} \cdot 2x\sqrt[8]{a^9} = 3a\sqrt[24]{a^8} \cdot 2x\sqrt[24]{a^9} = 3a \cdot 2x\sqrt[24]{a^8 \cdot a^9} = \boxed{6ax\sqrt[24]{a^{17}}}$

Ejemplo 2: Efectuar: $10x \cdot \sqrt{2ab} \cdot \sqrt[3]{2x} \cdot a \cdot \sqrt[4]{3abx}$

Resolución:

Hallamos el **M.C.M.** de los índices 2, 3 y 4 siendo este 12; veamos:

2	– 3	– 4	2
1	– 3	– 2	2
1	– 3	– 1	3
1	– 1	– 1	

⇨ **M.C.M.(2, 3 y 4) =** $\mathbf{2^2 \cdot 3 = \boxed{12}}$

Donde:

$$10x\sqrt{2ab} = 10x\sqrt[12]{(2ab)^6} = 10x\sqrt[12]{64a^6b^6}$$

$$\sqrt[3]{2x} = \sqrt[12]{(2x)^4} = \sqrt[12]{16x^4}$$

$$a\sqrt[4]{3abx} = a\sqrt[12]{(3abx)^3} = a\sqrt[12]{27a^3b^3x^3}$$

Luego: $10x \cdot \sqrt{2ab} \cdot \sqrt[3]{2x} \cdot a \cdot \sqrt[4]{3abx} = 10x\sqrt[12]{64a^6b^6} \cdot \sqrt[12]{16x^4} \cdot a\sqrt[12]{27a^3b^3x^3}$

$$= 10x\sqrt[12]{64a^6b^6 \cdot 16x^4 \cdot 27a^3b^3x^3}$$

$$= \boxed{10x\sqrt[12]{27648a^9b^9x^7}}$$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 41

1. Efectuar las multiplicaciones de los radicales:

a) $\sqrt{2a}\cdot\sqrt{3a}$	b) $3x\sqrt{3ab}\cdot 2ax\sqrt{4ab}$	c) $2a\sqrt{8ax}\cdot 5ab\sqrt{2ax}$
d) $3\sqrt[3]{4a^2}\cdot 5\sqrt[3]{2ab}$	e) $5x\sqrt[3]{6x^2y}\cdot 8ax\sqrt[3]{4xy^2}$	f) $a\sqrt[3]{25a^2b^2}\cdot b\sqrt[3]{5a^2y}$
g) $2\sqrt{3x}\cdot a\sqrt{5ax}\cdot 3ab\sqrt{2a}$	h) $5\sqrt[3]{2x}\cdot 3\sqrt[3]{4ax}\sqrt[3]{10a^2b^2}$	i) $a^2\sqrt[3]{a^2}\;5ax\sqrt[3]{6ax^2}\cdot\sqrt[3]{4bx}$
j) $3a^2b\sqrt{\frac{3}{5}x}\cdot 5x\sqrt{\frac{12}{5}ax^2}\cdot\sqrt{a}$	k) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{8}a^2y}\;\frac{2}{5}\sqrt{\frac{5}{6}by^2}\;\frac{3}{4}\sqrt{\frac{1}{2}a^2b}$	l) $\frac{3}{8}\sqrt{\frac{1}{2}ab}\cdot\frac{5}{4}ab\sqrt{\frac{2}{5}x}\cdot x\sqrt{\frac{2}{6}ax}$

2. Efectuar la multiplicación de:

a) $\left(2a+3x\sqrt{2x}\right)\left(3b-3x\sqrt{2a}\right)$

b) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{2b}\right)\left(\sqrt{2a}-2\sqrt{3b}\right)$

c) $\left(3a\sqrt{5xy}+2ab\sqrt{3x^2}\right)\left(12a\sqrt{xy}-5a\sqrt{x^2}\right)$

d) $\left(2a\sqrt{5x}-3x\sqrt{2a}+1\right)\left(2a\sqrt{2x}-x\sqrt{6a}+3\right)$

e) $\left(ab\sqrt{3xy}-a\sqrt{6x}-5\right)\left(3a\sqrt{xy}+2\sqrt{x}+9\right)$

f) $\left(3x\sqrt[3]{2x^2}-x\sqrt[3]{2a}+\sqrt[3]{y}\right)\left(5x\sqrt[3]{2x^2}+5x\sqrt[3]{2a}-\sqrt[3]{y}\right)$

g) $\left(a\sqrt{\frac{a}{b}}+b\sqrt{\frac{a}{b}}\right)\left(a\sqrt{\frac{a}{b}}+b\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$

h) $\left(3a\sqrt{\frac{x^2}{y}}+2x\sqrt{\frac{2x}{3y}}\right)\left(5a\sqrt{\frac{x^2}{y}}+3ax\right)$

3. Efectuar la multiplicación de los radicales heterogéneos siguientes:

a) $\sqrt{3x}\cdot\sqrt[3]{2a}$	b) $3\sqrt[3]{4a^2}\cdot 5x\sqrt{2x}$
c) $4a\sqrt[5]{2a^4x}\cdot 5xy\sqrt[3]{x^2y^3}$	d) $3x^2\sqrt[4]{a^2b^2x}\cdot 5a\sqrt{\frac{x^2y}{2}}$

e) $\frac{2a}{3}\sqrt{2x}\cdot\frac{5x}{4}\sqrt{\frac{2xy}{a}}$

f) $0{,}2a\sqrt{9xy}\cdot 0{,}5x\sqrt[3]{8xy^2}$

g) $ab^2\sqrt[3]{2ax}\cdot 3ab\sqrt{6ax^3}\cdot bx\cdot\sqrt[4]{bx^3}$

h) $8\sqrt[4]{5xy^3}\cdot 5x^3y\sqrt[3]{2x^2}\cdot\sqrt[6]{16xy}$

i) $\frac{5}{4}x^2z\sqrt[5]{2ab^2}\cdot\frac{2}{3}xz^2\sqrt[3]{a^4b}\cdot\frac{6}{5}xz\sqrt[6]{ab}$

j) $0{,}6x\sqrt[3]{9xy^2}\cdot 0{,}2\sqrt[3]{3x^2y^4}\cdot 0{,}5\sqrt[8]{27x^3y^2}$

k) $5ab^2\sqrt{6xz^3}\cdot ab\sqrt[4]{16x^5z^6}\cdot 2\sqrt[6]{32x^3z^7}$

l) $3\sqrt{(x-y)}\cdot 4x\sqrt[3]{(x-y)^6}\cdot 9x^2\sqrt[4]{(x-y)^9}$

RESPUESTAS TALLER 41

1.

a) $a\sqrt{6}$

b) $12\sqrt{3a^2bx^2}$

c) $40a^3bx$

d) $30a\sqrt[3]{b}$

e) $80ax^3y\sqrt[3]{3}$

f) $5a^2b\sqrt[3]{ab^2y}$

g) $6\sqrt{30a^3bx}$

h) $30a\sqrt[3]{10b^2x^2}$

i) $10a^4x^2\sqrt[3]{ab}$

j) $18a^3bx^2$

k) $\frac{3}{40}a^2by\sqrt{\frac{5}{2}y}$

l) $\frac{15}{32}a^2bx^3\sqrt{\frac{1}{15}b}$

2.

a) $6ab+9bx\sqrt{2x}-6ax\sqrt{2a}-18x^2\sqrt{ax}$

b) $a\sqrt{2}+2\sqrt{ab}-2\sqrt{3ab}+2b\sqrt{6}$

c) $36\sqrt{5a^2xy}+24a^2bx\sqrt{3xy}-15a^2x\sqrt{5xy}-10\sqrt{3a^2bx^2}$

d) $4\sqrt{10a^2x}-12ax\sqrt{ax}-2ax\sqrt{30ax}+2a\sqrt{2x}+6\sqrt{3ax^2}+6a\sqrt{5x}$
$-x\sqrt{6a}-9x\sqrt{2a}+3$

e) $3a^2xy\sqrt{3} - 3a^2x\sqrt{6y} + 2abx\sqrt{3y} - 15a\sqrt{xy} - 2ax\sqrt{6} + 9ab\sqrt{3xy}$

$- 10\sqrt{x} - 9a\sqrt{6x} - 45$

f) $15x^3\sqrt[3]{4x} - 5x^2\sqrt[3]{4ax^2} + 15x^2\sqrt[3]{4ax^2} + 5x\sqrt[3]{2x^2y} - 5x^2\sqrt[3]{4a^2}$

$- 3x\sqrt[3]{2x^2y} + 5x\sqrt[3]{2ay} + \sqrt[3]{2ay} - \sqrt[3]{y^2}$

g) $\frac{a^3}{b} + 2a^2 + ab$

h) $\frac{15a^2x^2}{y} + \frac{10ax^2}{y}\sqrt{\frac{2x}{3}} + \frac{9a^2x^2}{y} + 6ax^2\sqrt{\frac{2x}{3y}}$

3. a) $\sqrt[6]{108x^3a^2}$

b) $15x\sqrt[6]{128a^4x^3}$

c) $20axy^2\sqrt[15]{8a^{12}x^{13}}$

d) $15ax^2\sqrt[4]{\frac{a^2b^2x^5y^2}{4}}$

e) $\frac{5ax^2}{3}\sqrt{\frac{y}{a}}$

f) $0,6axy\sqrt[3]{x^2}$

g) $3a^2b^4x^2\sqrt[12]{2^{10}3^6a^4b^3x}$

h) $80x^4y\sqrt[12]{125xy^{11}}$

i) $ax^4z^4\sqrt[30]{64a^{21}b^{27}}$

j) $0,06x^2y^2\sqrt[24]{x^{17}y^{22}}$

k) $40a^2b^3x^2z^4\sqrt[12]{x^3z^2}$

l) $108x^3(x-y)^4\sqrt[12]{(x-y)^9}$

3.8.3 DIVISIÓN DE RADICALES

Para dividir dos radicales, se dividen entre si sus coeficientes y sus subradicales. Los radicales de la división han de ser homogéneos.

Ejemplos: Efectuar las divisiones:

a) $15\sqrt{45} : 5\sqrt{15} = \frac{15\sqrt{45}}{5\sqrt{15}} = \frac{15}{5}\sqrt{\frac{45}{15}} = \boxed{3\sqrt{3}}$

b) $36x^2\sqrt{60a^3} : 12x\sqrt{15a} = \frac{36x^2\sqrt{60a^3}}{12x\sqrt{15a}} = \frac{36x^2}{12x}\sqrt{\frac{60a^3}{15a}} = 3x\sqrt{4a^2}$

$= 3x(2a) = \boxed{6ax}$

c) $9ab\sqrt[3]{24x^4} : -3b\sqrt[3]{3x} = \dfrac{9ab\sqrt[3]{24x^4}}{-3b\sqrt[3]{3x}} = \dfrac{9ab}{-3b}\sqrt[3]{\dfrac{24x^4}{3x}}$

$= -3a\sqrt[3]{8x^3} = -3a(2x) = \boxed{-6ax}$

d) $a^2\sqrt{x^4} : b\sqrt{4} = \dfrac{a^2\sqrt{x^4}}{b\sqrt{4}} = \dfrac{a^2}{b}\sqrt{\dfrac{x^4}{4}} = \dfrac{a^2}{b}\left(\dfrac{x^2}{2}\right) = \boxed{\dfrac{a^2x^2}{2b}}$

e) $3x^2\sqrt[3]{16x^5} : x\sqrt[3]{2x^2} = \dfrac{3x^2\sqrt[3]{16x^5}}{x\sqrt[3]{2x^2}} = \dfrac{3x^2}{x}\sqrt[3]{\dfrac{16x^5}{2x^2}} = 3x\sqrt[3]{8x^3}$

$= 3x(2x) = \boxed{6x^2}$

*** División de radicales Heterogéneos:**

Si los radicales que han de dividirse no fueran homogéneos, se les reduce al índice común por medio del **M.C.M.** de ellos y a continuación se efectúa la división indicada.

Ejemplo 1: Efectuar: $4\sqrt{3x} : 2\sqrt[3]{3x^2}$

Resolución:

El **M.C.M.** de los índices 2 y 3 es 6; veamos:

2 – 3	2	
1 – 3	3	⇨ **M.C.M.(2 y 3) = 2·3 = $\boxed{6}$**
1 – 1		

Donde:

$4\sqrt{3x} = 4\sqrt[6]{(3x)^3} = 4\sqrt[6]{27x^3}$ (índice: ×, exponente: :)

$4\sqrt[3]{3x^2} = 2\sqrt[6]{(3x^2)^2} = 2\sqrt[6]{9x^4}$ (índice: ×, exponente: :)

Luego:

$$4\sqrt{3x} : 2\sqrt[3]{3x^2} = \frac{4\sqrt{3x}}{2\sqrt[3]{3x^2}} = \frac{4\sqrt[6]{27x^3}}{2\sqrt[6]{9x^4}} = 2\sqrt[6]{\frac{27x^3}{9x^4}} = \boxed{2\sqrt[6]{\frac{3}{x}}}$$

Ejemplo 2 : Efectuar: $6x\sqrt[3]{4x^7} : 3x\sqrt[4]{\frac{1}{2}x^2}$

Resolución:

El **M.C.M.** de los índices 3 y 4 es 12, veamos:

3 - 4	2
3 - 2	2
3 - 1	3
1 - 1	

⟹ **M.C.M (3 y 4)** $= 2^2 . 3 = \mathbf{12}$

Donde: $6x\sqrt[3]{4x^7} = 6x\sqrt[12]{\left(4x^7\right)^4} = 6x\sqrt[12]{256x^{28}}$

$$3x\sqrt[4]{\frac{1}{2}x^7} = 3x\sqrt[12]{\left(\frac{1}{2}x^2\right)^3} = 3x\sqrt[12]{\frac{1}{8}x^6}$$

Luego: $6x\sqrt[3]{4x^7} : 3x\sqrt[4]{\frac{1}{2}x^2} = \dfrac{6x\sqrt[12]{256x^{28}}}{3x\sqrt[12]{\frac{1}{8}x^6}} = 2\sqrt[12]{\dfrac{256x^{28}}{\frac{1}{8}x^6}} = 2\sqrt[12]{256\cdot 8x^{22}}$

$$= 2\sqrt[12]{2\ 048x^{22}}$$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 42

1. Efectuar las divisiones de los radicales siguientes:

a) $8ab\sqrt{24x} : 2a\sqrt{6x}$

b) $a^3\sqrt[3]{16x^4y} : a\sqrt[3]{2x}$

c) $-30x\sqrt{60a^2b} : 6x\sqrt{15b}$

d) $a^5b\sqrt{80x^5y^3} : 2ab\sqrt{5xy}$

e) $-42xy^3\sqrt[3]{54a^5b} : 7y\sqrt[3]{2b}$

f) $6x^2y\sqrt[3]{375y^5} : 3xy\sqrt[3]{3y^2}$

g) $9ab^3\sqrt[4]{729x^{13}} : a^2b^2\sqrt[4]{9x}$

h) $12xy^5\sqrt[3]{32a^6b^9} : 4x^3y^2\sqrt[3]{4a^3b^4}$

2. Efectuar las divisiones de los radicales siguientes:

a) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}x^3} : \frac{5}{8}\sqrt{\frac{1}{5}x}$

b) $\frac{3}{8}x^3\sqrt{\frac{a^2}{2}} : \sqrt{\frac{a^4}{8}}$

c) $\sqrt{\frac{8b}{a}} : \frac{-4}{5}\sqrt{\frac{2b}{a^2}}$

d) $a^2\sqrt{\frac{2}{8}a^2x} : 2a\sqrt{\frac{1}{2}a}$

e) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{\frac{ab}{2x}} : \frac{3}{4}x\sqrt{\frac{a^4b^5}{x}}$	f) $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{x}{y}} : \frac{a^2}{b^2}\sqrt{\frac{x^2}{y^2}}$

3. Efectuar la división de los radicales heterogéneos siguientes:

a) $27\sqrt{25x^3} : 9\sqrt[3]{x}$	b) $-124\sqrt[3]{16x^5} : 61\sqrt[4]{2x^2}$
c) $\sqrt[5]{a^3b^4} : 16\sqrt{ab^2}$	d) $2\sqrt[7]{x^4y^3} : \frac{1}{8}\sqrt{x^3y}$
e) $64\sqrt[3]{9x^5} : 16\sqrt{3x^4}$	f) $125\sqrt[6]{8x^4} : 5\sqrt[3]{2x^2}$
g) $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x^4y^2} : -\frac{4}{5}\sqrt[6]{xy^3}$	h) $ab\sqrt[8]{2ab^3} : \frac{1}{a^2b}\sqrt[4]{\frac{1}{4}a^2b}$

RESPUESTAS TALLER 42

1. a) $8b$	b) $2a^2x\sqrt[3]{y}$	c) $-10a$
d) $2a^4x^2y$	e) $-18axy^2\sqrt[3]{a^2}$	f) $10xy$
g) $\frac{27bx^3}{a}$	h) $\frac{-6aby^3}{x^2}\sqrt[3]{b^2}$	
2. a) $\frac{4}{5}x\sqrt{\frac{10}{3}}$	b) $\frac{3x^3}{4a}$	c) $-\frac{5}{2}\sqrt{a}$
d) $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{ax}{2}}$	e) $\frac{8x}{15ab^2}\sqrt{\frac{1}{2a}}$	f) $\frac{b}{a}\sqrt{\frac{y}{x}}$
3. a) $15x\sqrt[6]{x}$	b) $-2x\sqrt[12]{32x^2}$	c) $\sqrt[15]{a^4b^2}$
d) $16\sqrt[14]{x^{1/13}y}$	e) $4\sqrt[6]{\frac{3}{x^2}}$	f) $5\sqrt[6]{2}$
g) $-\frac{15}{16}\sqrt[6]{x^7y}$	h) $a^3b^2\sqrt[8]{\frac{32b}{a^3}}$	

3.8.4 POTENCIA DE UN RADICAL

Para elevar un radical a una potencia dada se eleva a dicha potencia al coeficiente y al subradical del radical, conservando el mismo; índice.

Ejemplos: Desarrollar las siguientes potencias de los radicales:

a) $\left(2x\sqrt{a^3}\right)^2=(2x)^2\left(\sqrt{a^3}\right)^2=\boxed{4x^2\sqrt{a^6}}$

b) $\left(3a^2\sqrt[3]{5x}\right)^3=(3a^2)^3\cdot\left(\sqrt[3]{5x}\right)^3=27a^6\cdot\sqrt[3]{(5x)^3}=\boxed{27a^6\sqrt[3]{125x^3}}$

c) $\left(-2xy^2\sqrt[4]{3a^2}\right)^6=(-2xy^2)^6\cdot\left(\sqrt[4]{3a^2}\right)^6=64x^6y^{12}\sqrt[4]{(3a^2)^6}$

$=\boxed{64x^6y^{12}\sqrt[4]{729a^{12}}}$

d) $\left(-4a^2b^3\sqrt[6]{7x}\right)^3=\left(-4a^2b^3\right)^3\left(\sqrt[6]{7x}\right)^3=-64a^6b^9\sqrt[6]{(7x)^3}$

$=\boxed{-64a^6b^9\sqrt[6]{343x^3}}$

e) $\left(\frac{3}{4}ab^2\sqrt{\frac{2}{3}xy}\right)^2=\left(\frac{3}{4}ab^2\right)^2\left(\sqrt{\frac{2}{3}xy}\right)^2=\frac{9}{16}a^2b^4\cdot\frac{2}{3}xy$

$=\boxed{\frac{3}{8}a^2b^4xy}$

* **Potencia de Polinomios Radicales**

Para elevar a una potencia dada un polinomio se sigue el desarrollo de los Productos Notables según los casos que se presenten.

Ejemplos: Desarrollar las siguientes potencias:

a) $\left(4\sqrt{3x}+5\sqrt{2x}\right)^2=\left(4\sqrt{3x}\right)^2+2\left(4\sqrt{3x}\right)\left(5\sqrt{2x}\right)+\left(5\sqrt{2x}\right)^2$

$=4^2\sqrt{(3x)^2}+2\left(20\sqrt{3x\cdot 2x}\right)+5^2\sqrt{(2x)^2}$

$=16\sqrt{9x^2}+40\sqrt{6x^2}+25\sqrt{4x^2}$

$=16(3x)+40x\sqrt{6}+25(2x)$

$=\boxed{98x+40x\sqrt{6}}$

> ***Recuerda que:***
> $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

b) $\left(3\sqrt{x}-2\sqrt{z}\right)^2=\left(3\sqrt{x}\right)^2-2\left(3\sqrt{x}\right)\left(2\sqrt{z}\right)+\left(2\sqrt{z}\right)^2$

$=3^2\sqrt{x^2}-2\left(6\sqrt{xz}\right)+2^2\sqrt{z^2}$

$=\boxed{9x-12\sqrt{xz}+4z}$

> ***Recuerda que:***
> $(A-B)^2=A^2+2AB+B^2$

C) $\left(5\sqrt{x}-2\sqrt{a}\right)^3=\left(5\sqrt{x}\right)^3-3\left(5\sqrt{x}\right)^2\left(2\sqrt{a}\right)+3\left(5\sqrt{x}\right)\left(2\sqrt{a}\right)^2-\left(2\sqrt{a}\right)^3$

$$=5^3\sqrt{x^3}-3\left(5^2\sqrt{x^2}\right)\left(2\sqrt{a}\right)+3\left(5\sqrt{x}\right)\left(2^2\sqrt{a^2}\right)-2^3\sqrt{a^3}$$

$$=125\sqrt{x^3}-3(25x)\left(2\sqrt{a}\right)+3\left(5\sqrt{x}\right)(4a)-8\sqrt{a^3}$$

$$=\boxed{125x\sqrt{x}-150x\sqrt{a}+60a\sqrt{x}-8a\sqrt{a}}$$

Recuerda que:

$$(A-B)^3=A^3-3A^2B+3AB^2-B^3$$

3.8.5 RAÍZ DE UN RADICAL

Para extraer la ráiz de un radical se extrae dicha ráiz del coeficiente y del subradical, dejando el mismo índice.

Ejemplo 1: Extraer la ráiz cuadrada de $9x^2\sqrt[3]{16a^2}$

Resolución:

Se extrae la ráiz cuadrada del coeficiente $9x^2$ y de subradical $16a^2$

Osea: $\sqrt{9x^2\sqrt[3]{16a^2}}=\sqrt{9x^2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{16a^2}}=\boxed{3x\sqrt[3]{4a}}$

Ejemplo 2: Extraer la ráiz cúbica de $8a^3\sqrt{64x^6}$

Resolución:

$$\sqrt[3]{8a^3\sqrt{64x^6}}=\sqrt[3]{8a^3}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{64x^6}}=\boxed{2a\sqrt{4x^2}}$$

Ejemplo 3: Extraer la ráiz cuarta de $81a^8\sqrt[3]{x^2}$

Resolución:

$$\sqrt[4]{81a^8\cdot\sqrt[3]{x^2}}=\sqrt[4]{81a^8}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^2}}=\sqrt[4]{3^4a^8}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{x}}=\boxed{3a^2\sqrt[6]{x}}$$

3.8.6 RACIONALIZACIÓN DE FRACCIONES

Llamese fraccion irracional aquella que tiene en el denominador uno o mas radicales. Racionalizar una fracción es transformarla en otra equivalente, eliminando los radicales del denominador.

*** Factor Racionalizante (F.R)**

Es otra expresión irracional que multiplicada por el numerador y denominador de una fracción, permite que uno de estos (en este caso denominador) se

transforme en una expresión racional.

Ejemplo: Dado: $\dfrac{7}{\sqrt{5}}$

Para racionalizar el denominador multiplicamos y dividimos por $\sqrt{5}$, siendo este el factor racionalizante:

$$\frac{7}{\sqrt{5}}=\frac{7\cdot\boxed{\sqrt{5}}}{\sqrt{5}\cdot\boxed{\sqrt{5}}}=\frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{5\cdot 5}}=\frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{25}}=\boxed{\frac{7\sqrt{5}}{5}}$$

Factor Racionalizante

- ***Casos que se presentan:***

A) Que el denominador tenga un sólo término:

I) Si el denominador es una ráiz cuadrada, basta multiplicar los dos términos de la fracción por dicho denominador.

Ejemplos:

a) Racionalizar: $\dfrac{3a}{2\sqrt{x}}$

Resolución:

$$\frac{3a}{2\sqrt{x}}=\frac{3a\cdot\boxed{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}\cdot\boxed{\sqrt{x}}}=\frac{3a\sqrt{x}}{2\sqrt{x\cdot x}}=\frac{3a\sqrt{x}}{2\sqrt{x^2}}=\boxed{\frac{3a\sqrt{x}}{2x}}$$

b) Racionalizar: $\dfrac{3x-\sqrt{a}}{2a\sqrt{3a}}$

Resolución:

$$\frac{3x-\sqrt{a}}{2a\sqrt{3a}}=\frac{\left(3x-\sqrt{a}\right)\cdot\boxed{\sqrt{3a}}}{2a\sqrt{3a}\cdot\boxed{\sqrt{3a}}}=\frac{3x\sqrt{3a}-\sqrt{a}\sqrt{3a}}{2a\sqrt{3a\cdot 3a}}=\frac{3x\sqrt{3a}-\sqrt{a\cdot 3a}}{2a\sqrt{9a^2}}$$

$$=\frac{3x\sqrt{3a}-\sqrt{a\cdot 3a}}{2a\cdot 3a}$$

$$=\boxed{\frac{3x\sqrt{3a}-a\sqrt{3}}{6a^2}}$$

c) Racionalizar: $\dfrac{3-\sqrt{x}}{5\sqrt{x}}$

Resolución:

$$\frac{3-\sqrt{x}}{5\sqrt{x}}=\frac{\left(3-\sqrt{x}\right)\cdot\boxed{\sqrt{x}}}{5\sqrt{x}\cdot\boxed{\sqrt{x}}}=\frac{3\sqrt{x}-\sqrt{x}\sqrt{x}}{5\sqrt{x^2}}=\frac{3\sqrt{x}-\sqrt{x^2}}{5\sqrt{x^2}}=\frac{3\sqrt{x}-x}{5x}$$

II) Cuando el denominador presenta radicales de cualquier índice con radicandos monomios.

En estos casos el factor racionalizante estara expresado por otro radical de igual ínidice pero cuyo radicando, tendra los mismos factores, pero cuyos exponentes se determinan restando el índice de la ráiz con el exponente original de las letras o factores.

Ejemplo 1: Racionalizar el denominador de: $\dfrac{4}{\sqrt[5]{x^2y^3}}$

Resolución:

- Hallamos el factor racionalizante de la siguiente manera:

$$\sqrt[5]{x^2y^3} \Rightarrow \boxed{F.R. = \sqrt[5]{x^{5-2}y^{5-3}} = \sqrt[5]{x^3y^2}}$$

- Luego, multiplicamos a los dos términos de la fracción por el factor racionalizante.

$$\frac{4}{\sqrt[5]{x^2y^3}} = \frac{4\cdot\sqrt[5]{x^3y^2}}{\sqrt[5]{x^2y^3}\cdot\sqrt[5]{x^3y^2}} = \frac{4\sqrt[5]{x^3y^2}}{\sqrt[5]{x^2y^3x^3y^2}} = \frac{4\sqrt[5]{x^3y^2}}{\sqrt[5]{x^5y^5}} = \boxed{\frac{4\sqrt[5]{x^3y^2}}{xy}}$$

Ejemplo 2: Racionalizar el denominador de: $\dfrac{a}{\sqrt[7]{x^4y^2z}}$

Resolución:

- Hallamos el factor racionalizante de la siguiente manera:

$$\sqrt[7]{x^4y^2z} \Rightarrow \boxed{F.R. = \sqrt[7]{x^{7-4}y^{7-2}z^{7-1}} = \sqrt[7]{x^3y^5z^6}}$$

- Luego, multiplicamos a los dos términos de la fracción por el factor racionalizante.

$$\frac{a}{\sqrt[7]{x^4y^2z}} = \frac{a\cdot\sqrt[7]{x^3y^5z^6}}{\sqrt[7]{x^4y^2z}\cdot\sqrt[7]{x^3y^5z^6}} = \frac{a\sqrt[7]{x^3y^5z^6}}{\sqrt[7]{x^4y^2z\cdot x^3y^5z^6}} = \frac{a\sqrt[7]{x^3y^5z^6}}{\sqrt[7]{x^7y^7z^7}}$$

$$= \boxed{\frac{a\sqrt[7]{x^3y^5z^6}}{xyz}}$$

Ejemplo 3: Racionalizar el denominador de: $\dfrac{6}{\sqrt[3]{xy^2}\cdot\sqrt[5]{a^2b^3}}$

Resolución:

En este caso se tendra que considerar dos factores racionalizantes:

Uno Para $\sqrt[3]{xy^2} \Rightarrow$ $\boxed{F.R. = \sqrt[3]{x^{3-1}y^{3-2}} = \sqrt[3]{x^2y}}$

y otro para: $\sqrt[5]{a^2b^3} \Rightarrow$ $\boxed{F.R. = \sqrt[5]{a^{5-2}b^{5-3}} = \sqrt[5]{a^3b^2}}$

Luego, multiplicamos a los dos términos de la fracción por los dos factores racionalizantes hallados.

$$\frac{6}{\sqrt[3]{xy^2}\cdot\sqrt[5]{a^2b^3}} = \frac{6\cdot}{\sqrt[3]{xy^2}\cdot\sqrt[5]{a^2b^3}\cdot}\boxed{\frac{\sqrt[3]{x^2y}\cdot\sqrt[5]{a^3b^2}}{\sqrt[3]{x^2y}\cdot\sqrt[5]{a^3b^2}}} = \frac{6\sqrt[3]{x^2y}\cdot\sqrt[5]{a^3b^2}}{\sqrt[3]{xy^2x^2y}\cdot\sqrt[5]{a^2b^3a^3b^2}}$$

$$= \frac{6\sqrt[3]{x^2y}\cdot\sqrt[5]{a^3b^2}}{\sqrt[3]{x^3y^3}\cdot\sqrt[5]{a^5b^5}}$$

$$= \boxed{\frac{6\sqrt[3]{x^2y}\cdot\sqrt[5]{a^3b^2}}{xy\cdot ab}}$$

B) Si el denominador tiene dos o mas términos

Definimos Primero:

Binomio Irracional Cuadratico es una suma algebraica de dos radicales irracionales y, por lo menos uno de ellos de índice 2.

Por ejemplo: $\sqrt{3}+\sqrt{5}$; $\sqrt{x}+\sqrt{y}$; $\sqrt{5}-3$

- Dos binomios irracionales cuadraticos que sólo difieren en el signo de uno de los términos, se llama conjugados.

  Así: $\boxed{2+\sqrt{5} \text{ su conjugada: } 2-\sqrt{5}}$; $\boxed{3-\sqrt{2} \text{ su conjugada: } 3+\sqrt{2}}$

  $\boxed{1-\sqrt{3} \text{ su conjugada: } 1+\sqrt{3}}$; $\boxed{\sqrt{5}+\sqrt{3} \text{ su conjugada: } \sqrt{5}-\sqrt{3}}$

  Se cumple que el producto de dos binomios irracionales cuadraticos conjugados es racional, veamos:

  a) $(x+\sqrt{y})\cdot(x-\sqrt{y}) = x^2-(\sqrt{y})^2 = \boxed{x^2-y}$

  b) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2 = \boxed{a-b}$

III) En el caso de que el denominador sea un binomio irracional, para racionalizar se multiplica numerador y denominador por el conjugado (el producto de los binomios irracionales cuadraticos es racional)

Ejemplo 1: Racionalizar: $\dfrac{2}{2-\sqrt{3}}$

Resolución:

$$\frac{2}{2-\sqrt{3}}=\frac{2\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)}=\frac{2\left(2+\sqrt{3}\right)}{2^2-\sqrt{3}^2}=\frac{2\left(2+\sqrt{3}\right)}{1}=\boxed{2\left(2+\sqrt{3}\right)}$$

Ejemplo 2: Racionalizar: $\dfrac{3}{\sqrt{7}+2}$

Resolución:

$$\frac{3}{\sqrt{7}+2}=\frac{3\cdot\left(\sqrt{7}-2\right)}{\left(\sqrt{7}+2\right)\cdot\left(\sqrt{7}-2\right)}=\frac{3\left(\sqrt{7}-2\right)}{\sqrt{7}^2-2^2}=\frac{3\left(\sqrt{7}-2\right)}{3}=\boxed{\left(\sqrt{7}-2\right)}$$

Ejemplo 3: Racionalizar: $\dfrac{3ab}{a\sqrt{x}-2\sqrt{a}}$

Resolución:

Para racionalizar la fracción: $\dfrac{3ab}{a\sqrt{x}-2\sqrt{a}}$

Se multiplican sus dos términos por el binomio conjugado del denominador que es: $\boxed{a\sqrt{x}+2\sqrt{a}}$

Osea: $$\frac{3ab}{a\sqrt{x}-2\sqrt{a}}=\frac{3ab\cdot\left(a\sqrt{x}+2\sqrt{a}\right)}{\left(a\sqrt{x}-2\sqrt{a}\right)\cdot\left(a\sqrt{x}+2\sqrt{a}\right)}=\frac{3ab\left(a\sqrt{x}+2\sqrt{a}\right)}{\left(a\sqrt{x}\right)^2-\left(2\sqrt{a}\right)^2}$$

$$=\frac{3ab\left(a\sqrt{x}+2\sqrt{a}\right)}{a^2x-4a}$$

$$=\frac{3ab\left(a\sqrt{x}+2\sqrt{a}\right)}{a(ax-4)}$$

$$=\boxed{\frac{3b\left(a\sqrt{x}+2\sqrt{a}\right)}{ax-4}}$$

> ***Recuerda que:***
> $(A+B)(A-B)=\underbrace{A^2-B^2}$ ← *diferencia de cuadrados*

Ejemplo 4: Racionalizar: $\dfrac{2x-1}{3x\sqrt{2a}-a\sqrt{3x}}$

Resolución

Para racionalizar la fracción: $\dfrac{2x-1}{3x\sqrt{2a}-a\sqrt{3x}}$

Se multiplican sus dos términos por el binomio conjugado del denominador

que es: $\boxed{3x\sqrt{2a}+a\sqrt{3x}}$

Osea: $$\frac{2x-1}{3x\sqrt{2a}-a\sqrt{3x}}=\frac{(2x-1)\cdot\left(3x\sqrt{2a}+a\sqrt{3x}\right)}{\left(3x\sqrt{2a}-a\sqrt{3x}\right)\cdot\left(3x\sqrt{2a}+a\sqrt{3x}\right)}$$

$$=\frac{(2x-1)\left(3x\sqrt{2a}+a\sqrt{3x}\right)}{\left(3x\sqrt{2a}\right)^2-\left(a\sqrt{3x}\right)^2}$$

$$=\frac{(2x-1)\left(3x\sqrt{2a}+a\sqrt{3x}\right)}{9x^2(2a)-a^2(3x)}$$

$$=\boxed{\frac{(2x-1)\left(3x\sqrt{2a}+a\sqrt{3x}\right)}{3ax(6x-a)}}$$

Ejemplo 5: Racionalizar: $\dfrac{3a^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}$

Resolución:

En caso en el denominador aparecen un trinomio, es recomendable agrupar de la siguiente manera:

$$\boxed{\frac{3a^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}=\frac{3a^2}{\left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)-\sqrt{c}\right]}}$$

Ahora multiplico los dos términos de fracción por la conjugada de denominador que es:

$$\boxed{\left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+\sqrt{c}\right]}$$

Luego:

$$\frac{3a^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}=\frac{3a^2\left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+\sqrt{c}\right]}{\left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)-\sqrt{c}\right]\left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+\sqrt{c}\right]}$$

$$=\frac{3a^2\left[\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right]}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-\left(\sqrt{c}\right)^2}=\frac{3a^2\left[\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right]}{\sqrt{a}^2+2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+\sqrt{b}^2-\sqrt{c}^2}$$

$$=\frac{3a^2\left[\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right]}{a+2\sqrt{ab}+b-c}$$

$$=\boxed{\frac{3a^2\left[\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right]}{a+b-c+2\sqrt{ab}}}$$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 43

1. Desarrollar las siguientes potencias:

a) $\left(3x\sqrt{x}\right)^2 =$	b) $\left(5x^2\ \sqrt[3]{3x}\right)^3 =$	c) $\left(4ab^3\ \sqrt[4]{6x^3}\right)^4 =$	d) $\left(-5xy^2\sqrt{2ay}\right)^2 =$
e) $\left(4x^2\ \sqrt[3]{2a^2}\right)^3 =$	f) $\left(8xyz^2\sqrt{6xy^3}\right)^4 =$	g) $\left(-2a^3b\ \sqrt[3]{3ab^2}\right)^6 =$	h) $\left(3a^2b\ \sqrt[5]{2a^3b^2x}\right)^2 =$
i) $\left(0{,}5ab\sqrt{5xy}\right)^2 =$	j) $\left(0{,}8xy\ \sqrt[6]{3x^3y^3}\right)^2 =$	k) $\left(0{,}9ab^2\sqrt{8xy}\right)^2 =$	l) $\left(0{,}2x^2y\ \sqrt[3]{4x^3y}\right)^4 =$

2. Desarrollar las siguientes potencias:

a) $\left(xy\sqrt{\dfrac{a}{2b}}\right)^2 =$	b) $\left(\dfrac{3x}{6a}\sqrt{\dfrac{a+1}{a^2}}\right)^2 =$	c) $\left(\dfrac{13}{12}ax\sqrt{\dfrac{x}{y^2}}\right)^2 =$
d) $\left(\dfrac{2}{3}x\sqrt[4]{2x^4y^3}\right)^3 =$	e) $\left(0{,}2a^2\sqrt{\dfrac{x^3y}{a^3}}\right)^5 =$	f) $\left(\sqrt[3]{\dfrac{a^2b^3x^4}{2z}}\right)^5 =$
g) $\left(5xy\sqrt{2a-3b}\right)^2 =$	h) $\left((2x-1)\sqrt[3]{ay^2}\right)^3 =$	i) $\left(\dfrac{a}{b}\sqrt{(2+3x)}\right)^3 =$
j) $\left((2a-3)\sqrt{5ab}\right)^2 =$	k) $\left((a^2+b^2)\sqrt{8x}\right)^2 =$	l) $\left(-2ab^2\sqrt{a-2b}\right)^2 =$

3. Desarrollar las siguientes potencias:

a) $\left(3a+\sqrt{2x}\right)^2 =$	b) $\left(2x-\sqrt{3a}\right)^2 =$	c) $\left(\sqrt{a}+3\sqrt{b}\right)^2 =$
d) $\left(\sqrt{2x}-2\sqrt{5y}\right)^2 =$	e) $\left(4x\sqrt{x}-2a\sqrt{a}\right)^2 =$	f) $\left(\dfrac{a}{2}+\sqrt{2a}\right)^2 =$
g) $\left(\dfrac{3\sqrt{x}}{a}-\dfrac{2x}{z}\right)^2 =$	h) $\left(2a\sqrt{x-3a^2}\right)^2 =$	i) $\left(2a\sqrt[3]{a}+b\sqrt[3]{b}\right)^3 =$
j) $\left(x\sqrt[3]{2x}+z\sqrt[3]{z}\right)^3 =$	k) $\left(a+\sqrt{a+1}\right)^2 =$	l) $\left(2x\sqrt{x}-2\sqrt{a}+2\right)^2 =$

4. Extraer la ráiz cuadrada de los siguientes radicales:

a) $x\sqrt[3]{9x^2}$	b) $25x^6\sqrt[3]{64a^2b^4}$	c) $2x^3\sqrt{16x^4z^8}$
d) $\frac{1}{16}x^6\sqrt{\frac{4x^2}{25y^4}}$	e) $36a^2x^4\sqrt[5]{16y^6}$	f) $\frac{4}{x^4}\sqrt{\frac{a^2}{9}}$
g) $625xy^2\sqrt[6]{81z^4}$	h) $49a^3b\sqrt[7]{100a^4b^6}$	i) $\frac{a^8}{b^4}\sqrt{\frac{x^4}{100y^2}}$
j) $0,09\sqrt{0,04a^2b^6}$	k) $0,16x^2\sqrt[5]{1,44y^4}$	l) $0,25x^2y^4\sqrt[5]{0,64x^8y^6}$

5. Extraer la raíz cuadrada de los siguientes radicales:

a) $(x+2)^2\sqrt{(x+1)^4}$	b) $(9-b)^4\sqrt[3]{(3-b)^6}$
c) $(x+2a)^6\sqrt[3]{(2x+3b)^6}$	d) $(a^2+2ab+b^2)\sqrt{(x+1)^8}$
e) $(x+2y)^2\sqrt[3]{x^2-2x+1}$	f) $(3a+1)^6\sqrt[3]{(x+2)^2(4-x)^4}$

6. Extraer la raíz cúbica de los siguientes radicales:

a) $8a^6\sqrt{27b^9} =$	b) $64x^3y^6\sqrt[5]{125x^3} =$
c) $a^3b^6y^9\sqrt{8x^6z^3} =$	d) $16x^4y^{12}\sqrt{729x^{12}y^{15}} =$
e) $a^6b^9\sqrt[3]{64x^{12}y^{24}} =$	f) $x^3y^9\sqrt[5]{216x^6} =$
g) $\frac{27}{x^3}\sqrt{\frac{a^6}{64b^3}} =$	h) $\frac{27a^3}{64b^3}\sqrt{\frac{8y^3}{27x^3}} =$
i) $\frac{8a^6}{x^3y^9}\sqrt{\frac{125x^9}{b^{12}y^{15}}} =$	

7. Extraer la raíz cúbica de los siguientes radicales:

a) $27a^6\sqrt{5}$

Resolución: $\sqrt[3]{27a^6\sqrt{5}} = \sqrt[3]{27a^6}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \boxed{3a^2\sqrt[6]{5}}$

b) $64x^9\sqrt{2x}$	c) $125\sqrt[4]{3y^3}$	d) $a^4\sqrt{a}$

e) $\frac{1}{64}x^3\sqrt{2}$	f) $\frac{a^6}{b^3}\sqrt[5]{bx}$	g) $27x^{12}\sqrt[5]{2ax}$
h) $\frac{8}{27}a^3b^2\sqrt{x^2}$	i) $\frac{1}{8}\sqrt[4]{a^3b^6}$	h) $a^9b^3c^6\sqrt{125a^6b^9}$

8. Racionalizar las siguientes fracciones:

a) $\frac{3}{\sqrt{5}} =$	b) $\frac{9}{2\sqrt{3}} =$	c) $\frac{12}{5\sqrt{6}} =$
d) $\frac{-4}{11\sqrt{2}} =$	e) $\frac{2}{3\sqrt{x}} =$	f) $\frac{(3x+1)}{2a\sqrt{3x}} =$
g) $\frac{(5x-2)}{\sqrt{ax}} =$	h) $\frac{3ab}{5x\sqrt{2a}} =$	i) $\frac{(5a+2x)}{3x\sqrt{2a}} =$
j) $\frac{(3b-5a)}{2\sqrt{xy}} =$	k) $\frac{a^2+b^2}{a\sqrt{5ax}} =$	l) $\frac{x^2-y^2}{3a\sqrt{2ab}} =$
m) $\frac{7xy^2}{4\sqrt{7xy}} =$	n) $\frac{2x^2yz}{5\sqrt{3x}} =$	o) $\frac{ab^2}{2x\sqrt{11x}} =$

9. Racionalizar las siguientes fracciones:

a) $\frac{3a}{2\sqrt[5]{2x}} =$	b) $\frac{ax}{3x\sqrt[3]{3a}} =$	c) $\frac{x-a}{3\sqrt[3]{3a}} =$
d) $\frac{6}{\sqrt[5]{x^3y^2}} =$	e) $\frac{3x}{\sqrt[4]{xy^3}} =$	f) $\frac{3a+1}{\sqrt[3]{3a^2b^2}} =$
g) $\frac{11x^2}{\sqrt[6]{x^3y^2z}} =$	h) $\frac{4xyz}{\sqrt[7]{x^4y^3z}} =$	i) $\frac{3ab}{\sqrt[8]{a^3b^2z^6}} =$
j) $\frac{3ab^2}{\sqrt[3]{xy^2}\cdot\sqrt{xy}} =$	k) $\frac{2abx}{\sqrt[4]{x^2y}\cdot\sqrt[3]{ab^2}} =$	l) $\frac{6a^2by}{\sqrt[5]{a^2b^3}\cdot\sqrt[4]{x^2y^3}} =$

10. Racionalizar las siguientes fracciones:

a) $\frac{3a}{a+\sqrt{x}}$	b) $\frac{4ax}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$	c) $\frac{5b}{\sqrt{2a}+\sqrt{2x}}$
d) $\frac{ab}{\sqrt{3ax}-5x}$	e) $\frac{3xy}{2a\sqrt{x}-2x\sqrt{a}}$	f) $\frac{5x^2}{3x\sqrt{2a}-2x\sqrt{3x}}$

g) $\dfrac{5x-3ab}{3a\sqrt{2x}+4b\sqrt{3a}}$	h) $\dfrac{5-4x^2}{5x\sqrt{x}-3a\sqrt{a}}$	i) $\dfrac{3a-b+c}{2\sqrt{x}-\sqrt{y}-z}$
j) $\dfrac{2x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}}$	k) $\dfrac{5x-y}{a+\sqrt{a}+\sqrt{b}}$	l) $\dfrac{3a-2b-5c}{2\sqrt{2a}+2\sqrt{2b}-2\sqrt{2c}}$

RESPUESTAS TALLER 43

1.

a) $9x^2\sqrt{x^2}$

b) $125x^6\sqrt[3]{27x^3}$

c) $256a^4b^{12}\sqrt[4]{1\,296x^{12}}$

d) $25x^2y^4\sqrt{4a^2y^2}$

e) $64x^6\sqrt[3]{8a^6}$

f) $4\,096x^4y^4z^8\sqrt[3]{1\,296x^4y^{12}}$

g) $64a^{18}b^6\sqrt[3]{729a^6b^{12}}$

h) $9a^4b^2\sqrt[5]{4a^6b^4x^2}$

i) $0{,}25a^2b^2\sqrt{25x^2y^2}$

j) $0{,}512x^3y^3\sqrt[6]{27x^6y^9}$

k) $0{,}81a^2b^4\sqrt[6]{64x^2y^2}$

l) $0{,}0016x^8y^4\sqrt[3]{256x^{12}y^4}$

2.

a) $x^2y^2\sqrt{\dfrac{a^2}{4b^2}}$

b) $\dfrac{x^3}{8a^3}\sqrt{\dfrac{(a+1)^3}{a^6}}$

c) $\dfrac{169}{144}a^2x^2\sqrt{\dfrac{x^2}{y^4}}$

d) $\dfrac{8x^3}{27}\sqrt[4]{8x^{12}y^9}$

e) $0{,}00032a^{10}\sqrt{\dfrac{x^5y^{20}}{a^{15}}}$

f) $\sqrt[3]{\dfrac{a^{10}b^{15}x^{20}}{32z^5}}$

g) $25x^2y^2\sqrt{(2a-3b)^2}$

h) $(2x-1)^3\sqrt[3]{a^3y^6}$

i) $\dfrac{a^3}{b^3}\sqrt{(2+3x)^3}$

j) $(2a-3)^2\sqrt{25a^2b^2}$

k) $(a^2+b^2)^2\sqrt{64x^2}$

l) $4a^2b^4\sqrt{(a-2b)^{23}}$

3. a) $9a^2 + 6a\sqrt{2x} + 2x$ b) $4x^2 - 4x\sqrt{3a} + 3a$

c) $a + 6\sqrt{ab} + 9b$ d) $2x - 4\sqrt{10xy} + 20y$

e) $16x^3 - 16ax\sqrt{ax} + 4a^3$ f) $\dfrac{a^2}{4} + a\sqrt{2a} + 2a$

g) $\dfrac{9x}{a^2} - \dfrac{12x}{az}\sqrt{x} + \dfrac{4x^2}{z^2}$ h) $4a^2\sqrt{(x-3a)^2}$

i) $8a^3 + 12a^2b\sqrt[3]{a^2b} + 6ab\sqrt[3]{ab^2} + b^4$

j) $2x^4 - 3xz\sqrt[3]{4x^2z} + 3xz\sqrt[3]{2xz^2} - z^4$

k) $a^2 + 2a\sqrt{a+1} + (a+1)$ l) $4x^3 - 8x\sqrt{ax} + 8x\sqrt{x} + 4a - 8\sqrt{a} + 4$

4. a) $\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{3x}$ b) $10x^3\sqrt[3]{ab^2}$ c) $2x^2z^2\sqrt{2x}$

d) $\dfrac{x^3}{4y}\sqrt{\dfrac{2x}{5}}$ e) $6ax^2\sqrt[5]{4y^3}$ f) $\dfrac{2}{x^2}\sqrt{\dfrac{a}{3}}$

g) $25y\sqrt{x}\cdot\sqrt[6]{9z^2}$ h) $7a\sqrt{ab}\cdot\sqrt[7]{10a^2b^3}$ i) $\dfrac{a^4x}{b^2}\sqrt{\dfrac{1}{10y}}$

j) $0,3b\sqrt{0,2a}$ k) $0,4x\sqrt[5]{1,2y^2}$ l) $0,5xy^2\sqrt[5]{0,8x^4y^3}$

5. a) $(x+2)(x+1)$ b) $(9-b)^2(3-x)$

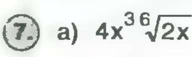
c) $(x+2a)^3\sqrt{(2x+3b)^4}$ d) $(a+b)(x+1)^2$

e) $(x+2y)\sqrt[3]{x-1}$ f) $(3a-1)^3(4-x)\sqrt{x+2}$

6. a) $2a^2b\sqrt{3b}$ b) $4xy^2\sqrt[5]{5x}$ c) $ab^2y^3x\sqrt{2z}$

d) $6x^3y^6\sqrt[3]{2x}\sqrt{y}$ e) $a^2b^3\sqrt[3]{4x^4y^8}$ f) $xy^3\sqrt[5]{6x^2}$

g) $\dfrac{3a}{2x\sqrt{b}}$ h) $\dfrac{3a}{4b}\sqrt{\dfrac{2y}{3x}}$ i) $\dfrac{2a^2}{b^2y^5}\sqrt{\dfrac{5x}{y}}$



7.

a) $4x^3\sqrt[6]{2x}$	b) $5\sqrt[12]{3y^3}$	c) $a\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{a}$
d) $\frac{x}{4}\sqrt[6]{2}$	e) $\frac{a^2}{b}\sqrt[15]{bx}$	f) $3x^4\sqrt[15]{2ax}$
g) $\frac{2}{3}ab^2\sqrt[6]{x^2}$	h) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{ab^2}$	i) $a^3b^2c\sqrt{5ab}$

8.

a) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$	b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$	c) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$
d) $\frac{-2\sqrt{2}}{11}$	e) $\frac{2\sqrt{x}}{3x}$	f) $\frac{(3x+1)\sqrt{3x}}{6ax}$
g) $\frac{(5x-2)\sqrt{ax}}{ax}$	h) $\frac{3b}{10x}\sqrt{2a}$	i) $\frac{(5a+2x)\sqrt{2a}}{6ax}$
j) $\frac{(3b-5a)\sqrt{xy}}{2xy}$	k) $\frac{2x\sqrt{3xy}}{3aby}$	l) $\frac{(a^2+b^2)\sqrt{5ax}}{5a^2x}$
m) $\frac{(x^2-y^2)\sqrt{2ab}}{6a^2b}$	n) $\frac{y\sqrt{7xy}}{4}$	o) $\frac{2xyz\sqrt{3x}}{15}$
p) $\frac{ab^2\sqrt{11x}}{22x^2}$		

9.

a) $\frac{3a\sqrt[3]{4x^2}}{4x}$	b) $\frac{\sqrt[3]{9a^2}}{9}$	c) $\frac{(x-a)\sqrt[3]{9a^2}}{9a}$
d) $\frac{6\sqrt[5]{x^2y^3}}{x^3y^2}$	e) $\frac{3x\sqrt[4]{x^3y}}{xy^3}$	f) $\frac{(3a+1)\sqrt[3]{9ab}}{3a^2b^2}$
g) $\frac{11\sqrt[6]{x^3y^4z^5}}{xy^2z}$	h) $\frac{4y}{x^3y^2}\sqrt[7]{x^3y^4z^6}$	i) $\frac{3\sqrt[8]{a^5b^6z^2}}{a^2bz^6}$
j) $\frac{3ab^2\sqrt[3]{x^2y}\cdot\sqrt{xy}}{x^2y^3}$	k) $\frac{2\sqrt[4]{x^2y^3}\cdot\sqrt[3]{a^2b}}{bxy}$	l) $\frac{6\sqrt[5]{a^3b^2}\cdot\sqrt[4]{x^2y}}{b^2x^2y^2}$

10.

a) $\frac{3a(a+\sqrt{x})}{a^2-x}$	b) $\frac{4ax(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$	c) $\frac{5b(\sqrt{2a}-\sqrt{2x})}{2(a-b)}$
d) $\frac{ab(\sqrt{3ax}+5x)}{x(3a-25x)}$	e) $\frac{3xy(2a\sqrt{x}+2x\sqrt{a})}{4ax(a-x)}$	f) $\frac{5(3x\sqrt{2a}+2x\sqrt{3x})}{6(3a-2x)}$

g) $\dfrac{(5x-3ab)(3a\sqrt{2x}-4b\sqrt{3a})}{6a(3ax-8b^2)}$

h) $\dfrac{(5-4x^2)(5x\sqrt{x}+3a\sqrt{a})}{25x^3-9a^3}$

i) $\dfrac{(3a-b+c)(2\sqrt{x}+\sqrt{y}+z)}{4x-y-z^2-2z\sqrt{y}}$

j) $\dfrac{(2x-3)(\sqrt{x}-\sqrt{y}-\sqrt{z})}{x+y-2\sqrt{xy}-z}$

k) $\dfrac{(3a-2b-5c)(\sqrt{2a}+\sqrt{2b}+\sqrt{2c})}{4(a+b+2\sqrt{ac}-c)}$

l) $\dfrac{(5x-y)(a-\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a^2-a-b+2\sqrt{ab})}$

3.8.7 RADICALES SIMPLES Y COMPUESTOS

Considerando el índice de los radicales, éstos pueden ser:

a) Simples: Son simples si sus índices son números primos

Ejemplos: $\sqrt{x}$; $\sqrt[3]{ab}$; $\sqrt[5]{3x^2}$; $\sqrt[7]{2x^4}$; etc

b) Compuestos: Son compuestos si sus índices no son números primos.

Ejemplos: $\sqrt[4]{a^8}$; $\sqrt[6]{81a^6}$; $\sqrt[8]{128x^{16}}$; etc

3.8.7.1. Descomposición de Radicales Compuestos

Todo radical compuesto puede descomponerse en dos o más radicales simples según la descomposición de sus índices en números primos.

Ejemplos:

a) $\sqrt[4]{x^8}=\sqrt{\sqrt{8}}=\sqrt{x^4}=\boxed{x^2}$

b) $\sqrt[6]{a^{12}}=\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}}}=\sqrt[3]{a^6}=\boxed{a^2}$

c) $\sqrt[8]{x^{16}}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{x^{16}}}}=\sqrt{\sqrt{x^8}}=\sqrt{x^4}=\boxed{x^2}$

d) $\sqrt[12]{a^{24}}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^{24}}}=\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{a^{24}}}}=\sqrt{\sqrt{a^8}}=\sqrt{a^4}=a^2$

e) $\sqrt[18]{a^{36}}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{x^{36}}}}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{x^{18}}}=\sqrt[3]{x^6}=\boxed{x^2}$

3.8.7.2. Radicales Dobles

Son aquellos que se caracterizan porque dentro de un radical; se encuentran contenidos otros radicales ligados con otras expresiones, a través de las operaciones de suma o resta.

Ejemplos:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}\ ;\ \sqrt{A-\sqrt{B}}\ ;\ \sqrt{a+\sqrt{b}+\sqrt{c}}\ ;\ .....\text{ etc}$$

3.8.7.3. Transformación de Radicales Dobles a Simples:

No todo radical doble podrá transformarse a una suma o resta de radicales sencillos podrá hacerse ello con aquellos que cumplan ciertas condiciones o requisitos. A continuación se estudiarán los casos más importantes o más usuales.

3.8.7.4. Radicales de la Forma:

$\boxed{\sqrt{A\pm\sqrt{B}}}$ (Donde: A y B deben ser expresiones racionales)

Podemos suponer que la ráiz cuadrada de $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ es una suma tal como: $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ (ya que al elevarla al cuadrado saldrá una suma), supondremos también que la ráiz cuadrada de $\sqrt{A-\sqrt{B}}$ es una resta tal como: $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ (ya que al elevarla al cuadrado, saldrá una resta).

Luego:

$$\boxed{\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}}\ \text{........ (1)}$$

$$\boxed{\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}}\ \text{........ (2)}$$

Calcularemos "x" e "y" en función de A y B que serán datos. Sumando **(1)** y (2); miembro a miembro se obtiene:

$$\boxed{\sqrt{A+\sqrt{B}}+\sqrt{A-\sqrt{B}}=2\sqrt{x}}$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros de esta última expresión:

$$\left(\sqrt{A+\sqrt{B}}+\sqrt{A-\sqrt{B}}\right)^2=\left(2\sqrt{x}\right)^2$$

$$\left(\sqrt{A+\sqrt{B}}\right)^2+2\sqrt{\left(A+\sqrt{B}\right)\left(A-\sqrt{B}\right)}+\left(\sqrt{A-\sqrt{B}}\right)^2=4x$$

$$A+\cancel{\sqrt{B}}+2\sqrt{A^2-\left(\sqrt{B}\right)^2}+A-\cancel{\sqrt{B}}=4x$$

$$2A+2\sqrt{A^2-\left(\sqrt{B}\right)^2}=4x$$

$$2\left(A+\sqrt{A^2-B}\right)=4x$$

$$A+\sqrt{A^2-B}=2x$$

$$\therefore \boxed{x = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}}$$

Restamos **(1)** y **(2)**, miembro a miembro se obtiene:

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} - \sqrt{A - \sqrt{B}} = 2\sqrt{y}$$

Siguiendo un proceso análogo al cálculo de "x", logramos que:

$$\boxed{y = \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$$

Haciendo cambio de variable: $\boxed{C = A^2 - B}$; tendremos que:

$$\boxed{x = \frac{A + C}{2}} \quad ; \quad \boxed{y = \frac{A - C}{2}}$$

Luego:

$$\boxed{\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - C}{2}}}$$

Donde: $C = \sqrt{\underbrace{A^2 - B}_{\text{Raíz exacta}}} = \sqrt{A^2 - \sqrt{B}^2}$

Ejemplo 1: Transformar a radicales simples o sencillos: $\sqrt{8 + 2\sqrt{7}}$

Resolución:

Identificando a cada uno de sus elementos: $A = 8$ y $\sqrt{B} = 2\sqrt{7}$

Cálculo de "C":

$$C = \sqrt{A^2 - \sqrt{B}^2} = \sqrt{8^2 - (2\sqrt{7})^2} = \sqrt{64 - 28} = \sqrt{36} = 6 \Rightarrow \boxed{C = 6}$$

De donde:

$$\sqrt{8 + 2\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{8 + 6}{2}} + \sqrt{\frac{8 - 6}{2}} = \sqrt{7} + \sqrt{1} = \sqrt{7} + 1$$

$$\therefore \boxed{\sqrt{8 + 2\sqrt{7}} = \sqrt{7} + 1}$$

Ejemplo 2: Transformar a radicales simples o sencillos: $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$

Resolución:

Identificando a cada uno de sus elementos: $A=9$ y $\sqrt{B}=4\sqrt{5}$

Cálculo de "C":

$$C=\sqrt{A^2-\sqrt{B}^2}=\sqrt{9^2-\left(4\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{81-80}=1 \Rightarrow \boxed{C=1}$$

De donde:

$$\sqrt{9+4\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{9+1}{2}}+\sqrt{\frac{9-1}{2}}=\sqrt{5}+\sqrt{4}=\sqrt{5}+2$$

$$\therefore \boxed{\sqrt{9+4\sqrt{5}}=\sqrt{5}+2}$$

Ejemplo 3: Transformar a radicales simples: $\sqrt{2x+1+2\sqrt{x^2+x-6}}$

Resolución:

Cálculo de "C":

$$\boxed{C=\sqrt{A^2-\sqrt{B}^2}}\text{; } \textbf{Donde: } \boxed{A=2x+1}\text{ ; }\boxed{\sqrt{B}=2\sqrt{x^2+x-6}}$$

$$C=\sqrt{(2x+1)^2-\left(2\sqrt{x^2+x-6}\right)^2}=\sqrt{4x^2+4x+1-4(x^2+x-6)}$$

$$C=\sqrt{4x^2+4x+1-4x^2-4x+24}=\sqrt{25}=5 \Rightarrow \boxed{C=5}$$

Luego:

$$\sqrt{2x+1+2\sqrt{x^2+x-6}}=\sqrt{\frac{A+C}{2}}+\sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{(2x+1)+5}{2}}+\sqrt{\frac{(2x+1)-5}{2}}$$

$$=\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}$$

$$\therefore \boxed{\sqrt{2x+1+2\sqrt{x^2+x-6}}=\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}}$$

Ejemplo 4: Transformar a radicales simples: $\sqrt{2x-2\sqrt{x^2-1}}$

Resolución:

Cálculo de "C": $\boxed{C=\sqrt{A^2-\sqrt{B}^2}}$; ***Donde:*** $\boxed{A=2x}$; $\boxed{\sqrt{B}=2\sqrt{x^2-1}}$

$$C = \sqrt{(2x)^2 - \left(2\sqrt{x^2-1}\right)^2} = \sqrt{4x^2 - 4(x^2-1)} = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow C = 2$$

Luego: $\sqrt{2x - 2\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{\dfrac{A+C}{2}} - \sqrt{\dfrac{A-C}{2}}$

$$= \sqrt{\frac{2x+2}{2}} - \sqrt{\frac{2x-2}{2}} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$$

$$\therefore \quad \sqrt{2x - 2\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 44

1. Descomponemos los radicales compuestos:

a) $\sqrt[6]{a^{12}} =$	b) $\sqrt[8]{x^{24}} =$	c) $\sqrt[7]{x^{21}} =$
d) $\sqrt[18]{a^{64}} =$	e) $\sqrt[27]{(2a)^{54}} =$	f) $\sqrt[12]{4\,096x^{36}} =$
g) $\sqrt[9]{x^{36}y^{27}} =$	h) $\sqrt[15]{b^{45}z^{60}} =$	i) $\sqrt[12]{x^{36}y^{24}} =$
j) $\sqrt[24]{x^{48}y^{72}} =$	k) $\sqrt[10]{x^{40}y^{60}z^{80}} =$	l) $\sqrt[4]{81a^8b^{12}y^{16}} =$

2. Reducir a un solo radical:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{x^5}} =$	b) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{x}}}} =$	c) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{x^7}}} =$
d) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x^6}}}} =$	e) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{2a^6}}}} =$	f) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{x^2}}}} =$
g) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[5]{a^9}}}}}} =$	h) $\sqrt[a]{\sqrt[b]{\sqrt[c]{\sqrt[d]{a^9}}}} =$	i) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{x}}}}}} =$

3. Reducir a un solo radical:

a) $\sqrt{3x\sqrt[3]{3x\sqrt{3x}}}$

Resolución:

$$\sqrt{3x\sqrt[3]{3x\sqrt{3x}}} = \sqrt{\sqrt[3]{3x(3x)^3\sqrt{3x}}} = \sqrt{\sqrt[3]{(3x)^4\sqrt{3x}}}$$

$$= \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{3x\left[(3x)^4\right]^2}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{3x(3x)^8}}}$$

$$= \sqrt[2\cdot 3\cdot 2]{(3x)^9}$$

$$= \boxed{\sqrt[12]{(3x)^9}}$$

b) $\sqrt{2x\sqrt{2x\sqrt{2x\sqrt{2x}}}}$

Resolución:

$$\sqrt{2x\sqrt{2x\sqrt{2x\sqrt{2x}}}} = \sqrt{\sqrt{2x(2x)^2\sqrt{2x\sqrt{2x}}}}$$

$$= \sqrt{\sqrt{(2x)^3\sqrt{2x\sqrt{2x}}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{(2x)\left[(2x)^3\right]^2\sqrt{2x}}}}$$

$$= \sqrt{\sqrt{\sqrt{(2x)^7\sqrt{2x}}}}$$

$$= \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2x\left[(2x)^7\right]^2}}}}$$

$$= \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{(2x)^{15}}}}} = \boxed{\sqrt[16]{(2x)^{15}}}$$

c) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} =$	d) $\sqrt[3]{2a\sqrt{2a\sqrt{2a}}} =$	e) $\sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt{2x}}} =$
f) $\sqrt[3]{3x\sqrt{3x\sqrt{2x}}} =$	g) $\sqrt{a\sqrt[3]{2a\sqrt{a\sqrt[3]{2a}}}} =$	h) $\sqrt[3]{2x\sqrt[3]{x\sqrt[3]{2x}}} =$
i) $\sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x}}} =$	j) $\sqrt[5]{2x\sqrt{x\sqrt[3]{x}}} =$	k) $\sqrt[3]{x\sqrt[3]{2x\sqrt[4]{x}}} =$

4. Transformar a radicales simples o sencillos:

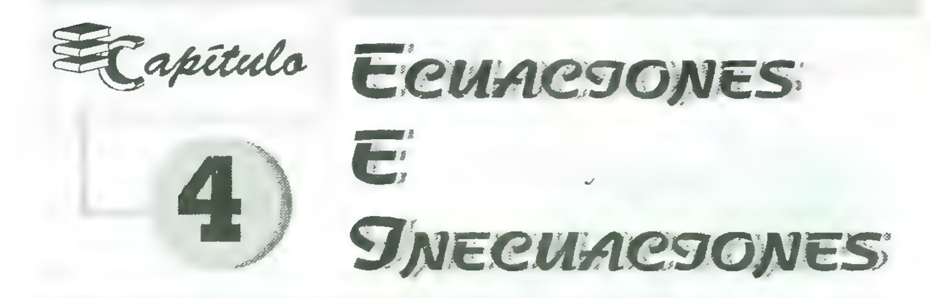
a) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$	b) $\sqrt{7-2\sqrt{10}}$	c) $\sqrt{12+8\sqrt{2}}$

d) $\sqrt{15-10\sqrt{2}}$	e) $\sqrt{3-\sqrt{5}}$	f) $\sqrt{2x+2\sqrt{x^2-1}}$
g) $\sqrt{5x-2\sqrt{6x^2-x-1}}$	h) $\sqrt{2x-3+2\sqrt{x^2-3x+2}}$	
i) $\sqrt{2x+1-2\sqrt{x^2+x-6}}$		

RESPUESTAS TALLER 44

3. a) $\sqrt[8]{a^7}$	b) $\sqrt[12]{(2a)^8}$	c) $\sqrt[12]{2x^9}$
d) $\sqrt[12]{1458x^7}$	e) $\sqrt[36]{128a^{28}}$	f) $\sqrt[27]{1024x^{13}}$
g) $\sqrt[24]{x^{17}}$	h) $\sqrt[30]{64x^{10}}$	i) $\sqrt[36]{16x^{17}}$

4. a) $\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$	b) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$	c) $2\sqrt{2}+2$
d) $\sqrt{10}-\sqrt{5}$	e) $\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}$	f) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}$
g) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x-1}$	h) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$	i) $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}$



4.1 ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA VARIABLE

Es toda ecuación en la que figura una sola variable y con exponente uno (1) y además no aparece esta variable como denominador, osea es de la forma:

ax + b = c; donde: a; b; c son números reales; $a \neq 0$.

Ejemplos:

a) $4x - 3 = 2x + 5$ ...Es una ecuación de primer grado con variable x.

b) $y + 6 = 15$ ...Es una ecuación de primer grado con variable y.

- En toda ecuación se consideran dos miembros, veamos:

$$\underbrace{3x - 13}_{1^o\ miembro} = \underbrace{14}_{2^o\ miembro}$$

4.1.1 RAÍZ DE UNA ECUACIÓN:

Es el número que al sustituir a la variable de una ecuación la transforma en una proposición verdadera.

4.1.2 CONJUNTO SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN:

Es el conjunto que tiene como únicos elementos a la raíz o a las raíces de una ecuación.

4.1.3 RESOLVER UNA ECUACIÓN:

Es hallar su conjunto solución.

4.1.4 VERIFICAR O COMPROBAR UNA ECUACIÓN:

Es el constatar que el valor o los valores hallados para la variable transforma a la ecuación en una proposición verdadera.

Ejemplo (1): Resolver la ecuación: $\dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{3x+1}{x-1} = 4$

Resolución:

Observación: *En esta ecuación, observamos que -2 y 1 no pueden ser raíces de la ecuación; porque dichos números hacen que las fracciones tengan denominador cero.*

Dando Común denominador, en la ecuación, se tiene:

$$\frac{(x+1)(x-1) + (x+2)(3x+1)}{(x+2)(x-1)} = 4$$

$$\frac{(x^2-1) + (3x^2+7x+2)}{(x^2+x-2)} = 4$$

$$4x^2+7x+1 = 4(x^2+x-2)$$

$$4x^2+7x+1 = 4x^2+4x-8 \Rightarrow 3x=-9 \Rightarrow \therefore \ x=-3$$

Recuerda que:

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{D} = \frac{A\cdot D+B\cdot C}{B\cdot D}$$

Rpta. El Conjunto solución de la ecuación es: C.S. = {-3}

Ejemplo (2): Resolver la ecuación: $(x+3)^2 - 17 = (x+2)^2$

Resolución:

Desarrollando cada binomio suma al cuadrado, obtenemos:

$$x^2+6x+9-17 = x^2+4x+4$$

$$2x-8 = 4$$

$$2x = 12 \Rightarrow \therefore \ x = 6$$

Recuerda que:

$$(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$$

Rpta. El conjunto de la ecuación es: C.S. = {6}

Ejemplo (3): Resolver la ecuación: $\dfrac{4}{x^2-x-12}+\dfrac{2}{x-4}=\dfrac{5}{x+3}$

Resolución:

Factorizamos: $x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$

$$\frac{4}{(x-4)(x+3)}+\frac{2}{x-4}=\frac{5}{x+3}$$; Damos común denominador en ambos miembros:

$$\frac{4+2(x+3)}{\cancel{(x-4)(x+3)}}=\frac{5(x-4)}{\cancel{(x-4)(x+3)}}$$; Simplificamos los denominadores

$$4+2(x+3) = 5(x-4)$$

$$4+2x+6 = 5x-20 \Rightarrow 30=3x \Rightarrow \therefore\ x=10$$

Rpta. El conjunto solución de la ecuación es: C.S. = {10}

Ejemplo (4): Resolver la ecuación: $\dfrac{\dfrac{7-2x}{2}+1}{8}=\dfrac{\dfrac{x-9}{2}+3}{2}$

Resolución:

La ecuación dada, se puede escribir así:

$$\frac{\left(\dfrac{7-2x+2}{2}\right)}{8}=\frac{\left(\dfrac{x-9+6}{2}\right)}{2}$$

Recuerda que:

$$\frac{\left(\dfrac{A}{B}\right)}{E}=\frac{A}{B\cdot E}$$

$$\frac{9-2x}{\cancel{16}}=\frac{x-3}{\cancel{4}}$$; Simplificamos los denominadores, sacando cuarta

$$\frac{9-2x}{4}=\frac{x-3}{1}$$

$$9-2x = 4x-12 \Rightarrow 21 = 6x \Rightarrow \therefore\ x=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$$

Rpta. El conjunto solución de la ecuación es: C.S. {7/2}

Ejemplo 5: Resolver la ecuación: $\dfrac{3x-5}{x-2} = \dfrac{3x+2}{x+1}$

Resolución:

La ecuación dada se puede escribir así:

$$(3x-5)(x+1) = (3x+2)(x-2)$$

$$\cancel{3x^2}+3x-5x-5 = \cancel{3x^2}-6x+2x-4$$

$$-2x-5 = -4x-4$$

$$2x = 1 \Rightarrow \therefore \boxed{x=1/2}$$

Recuerda que:

Si: $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D}$

Luego: $A \cdot D = B \cdot C$

Rpta. El conjunto solución de la ecuación es: C.S. {1/2}

Ejemplo 6: Resolver la ecuación: $\dfrac{x-3}{x^2+5x+4} - \dfrac{x+3}{x^2+2x-8} = 0$

Resolución:

Factorizamos:

i) $x^2+5x+4 = (x+1)(x+4)$

ii) $x^2+2x-8 = (x+4)(x-2)$

Recuerda que:

Si: $A - B = 0$

Luego: $A = B$

Luego: $\dfrac{x-3}{(x+1)(x+4)} - \dfrac{x+3}{(x+4)(x-2)} = 0$

$$\frac{x-3}{(x+1)\cancel{(x+4)}} = \frac{x+3}{\cancel{(x+4)}(x-2)}$$

Simplificamos (x + 4); en ambos miembros:

$$\frac{x-3}{x+1} = \frac{x+3}{x-2} \Rightarrow (x-3)(x-2) = (x+3)(x+1)$$

$$\cancel{x^2}-5x+6 = \cancel{x^2}+4x+3$$

$$3 = 9x \Rightarrow \therefore \boxed{x=1/3}$$

Rpta. El conjunto solución de la ecuación es: C.S. = {1/3}

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Problema 1: Si el triple de un número, le quitamos los 2/5 del número; obtenemos 39. Halle el número.

Resolución:

Sea el número = x

Del enunciado, planteamos la ecuación:

$$3x - \frac{2}{5}x = 39$$

$$15x - 2x = 39\ (5) \Rightarrow \cancel{13}x = \cancel{39}\ (5)$$

$$x = 3\ (5) \Rightarrow \therefore \quad \boxed{x = 15}$$

Rpta. El número pedido es: 15.

Problema 2: El denominador de una fracción es 5 unidades más que el doble de su numerador, y la fracción al simplificarse da 1/3. Halle el numerador.

Resolución:

Sea el numerador de la fracción = x

El denominador de la fracción será: 2x + 5

Del enunciado, planteamos la ecuación: $\frac{x}{2x+5} = \frac{1}{3}$

$$3x = 2x + 5 \Rightarrow \quad \therefore \quad \boxed{x = 5}$$

Rpta. El numerador de la fracción es: 5

Problema 3: Si a los tres séptimos del dinero que tengo le sumas 20 soles, obtienes los dos tercios de este dinero. ¿Cuánto tengo?

Resolución:

Sea el dinero que tengo: x soles

Del enunciado, planteamos la ecuación:

$$\frac{3}{7}x + 20 = \frac{2}{3}x$$

$$3x + 140 = \frac{14}{3}x \Rightarrow 9x + 140\,(3) = 14x$$

$$140\,(3) = 5x$$

$$28\,(3) = x \Rightarrow \boxed{x = 84}$$

Rpta. El dinero que tengo es: 84 soles.

Problema 4: Para comprar 10 chocolates me faltan 10 soles; pero si sólo compro 8 chocolates me sobran 20 soles. ¿Cuánto cuesta cada chocolate?

Resolución:

Sea: x = precio de cada chocolate

Del enunciado: Para comprar 10 chocolates me faltan 10 soles

$$\text{Dinero total} = 10x - 10 \qquad ...(1)$$

Pero si sólo compro 8 chocolates me sobran 20 soles

$$\text{Dinero total} = 8x + 20 \qquad ...(2)$$

Como las cantidades de dinero es la misma, igualamos (1) y (2).

$$10x - 10 = 8x + 20$$

$$10x - 8x = 20 + 10 \Rightarrow 2x = 30 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 15}$$

Rpta. El precio de cada chocolate es de 15 soles.

Problema 5: El dígito de las decenas de un número de dos dígitos excede en 3 dígitos de las unidades. Si la suma de los dígitos es 9. Hallar el número.

Resolución:

Sea: El número de dos dígitos $= \overline{du}$
Dígito de las unidades (u) $= x$
Dígito de las decenas (d) $= x + 3$

Del enunciado: Suma de los dígitos de dichos números = 9

$$u + d = 9$$

$$x + (x + 3) = 9 \Rightarrow 2x + 6 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 3}$$

Luego, los dígitos serán:

Dígito de las decenas $(d) = x + 3 = 3 + 3 = 6 \Rightarrow \boxed{d = 6}$

Dígito de las unidades $(u) = x = 3 \Rightarrow \boxed{u = 3}$

Rpta. El número de dos dígitos $\overline{du} = 63$

Problema 6: Manuel puede construir una cerca de alambrado en el doble de tiempo que le tomará a César hacerlo. Trabajando juntos, pueden construir la cerca en 7h. ¿Cuánto tiempo de trabajo le tomará a cada uno?

Resolución:

Sea: x = Número de horas para César sólo
$2x$ = Número de horas para Manuel sólo

	Parte de la labor hecha en 1h.	**Número de horas trabajando juntos**	**Parte de la labor hecha**
César	$\frac{1}{x}$	7	$7 \cdot \frac{1}{x} = \frac{7}{x}$
Manuel	$\frac{1}{2x}$	7	$7 \cdot \frac{1}{2x} = \frac{7}{2x}$

De donde: Parte que César hizo + Parte que Manuel hizo = 1

$$\frac{7}{x} + \frac{7}{2x} = 1$$

Damos común denominador en el primer miembro: $\frac{2\ (7)\ + 7}{2x} = 1$

$$21 = 2x \Rightarrow \boxed{x = \frac{21}{2}}$$

Luego; calculamos el tiempo de trabajo que le tomará a cada uno.

Para César: $x = \frac{21}{2} < > 10\ \frac{1}{2}$ h.

Para Manuel: $2x = \cancel{2}\left(\frac{21}{\cancel{2}}\right) < > 21$ h.

Problema 7: Nataly se dirige a la playa manejando su auto a velocidad de 50 km/h. En su regreso su velocidad promedio fue de 40 km/h. El viaje total duró 9h. ¿Cuál era la distancia a la playa?

Resolución:

distancia = d

Sea: x = Tiempo en horas del viaje a la playa
9 - x = Tiempo en horas del regreso.

	Velocidad	Tiempo	Distancia (d = v . t)
A la Playa	50 km/h	"x" h	50 x
Regreso	40 km/h	"(9 - x)" h	40 (9 - x)

Sabemos que: Distancia a la Playa = Distancia de Regreso

$$50x = 40(9 - x)$$

$$50x = 360 - 40x \quad \Rightarrow \quad 90x = 360$$

$$\therefore \quad x = 4$$

Luego, calculamos la distancia que hay desde la casa a la playa.

Rpta. Distancia a la playa: 50 x = 50 . 4 = 200 km.

Problema 8: La edad de Manuel es tres veces la edad de Sara. Hace 5 años la suma de sus edades era 38 años. ¿Qué edad tiene cada uno?

Resolución:

Sea: Edad actual de Sara = x
Edad actual de Manuel = $3x$

	(Pasado) Hace 5 años	(Presente) Actual
Edad de Sara	$(x - 5)$ ←	x
Edad de Manuel	$(3x - 5)$ ←	$3x$

Del enunciado: Hace 5 años la suma de sus edades era 38 años, obtenemos:

$$(x - 5) + (3x - 5) = 38$$

$$4x - 10 = 38 \quad \Rightarrow \quad 4x = 48 \quad \Rightarrow \quad \therefore\ x = 12$$

Luego, las edades que tienen cada uno son:

$\therefore$ **Edad de Sara:** $x = 12$ años
Edad de Manuel: $3x = 3\,(12) = 36$ años

Rpta.

Problema 9: Vanessa tiene 16 años y su abuelo tiene 60 años. ¿Cuántos años pasarán antes que la edad del abuelo sea el triple de la nieta?

Resolución:

Edad actual de Vanessa = 16 años
Edad actual del abuelo = 60 años

	(Presente) Actual	(Futuro) Dentro de "x" años
Edad de Vanessa	16 años →	$(16 + x)$
Edad del Abuelo	60 años →	$(60 + x)$

Del enunciado: ¿Cuántos años pasarán antes que la edad del Abuelo sea el triple de la edad de la nieta?

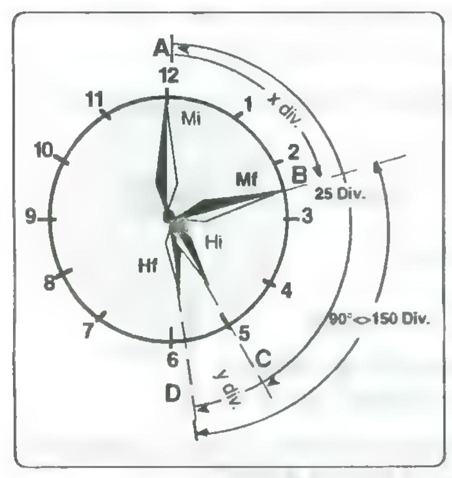
Obtenemos: $(60 + x) = 3\,(16 + x)$

$$60 + x = 48 + 3x \quad \Rightarrow \quad 12 = 2x \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad \boxed{x = 6}$$

Luego, los años que pasarán para que la edad del abuelo sea el triple de la edad de la nieta serán 6 años.

Problema 10: Antes que el minutero pase sobre el horario. ¿A qué hora entre las 5 y las 6, las agujas (manecillas) de un reloj forman un ángulo recto?

Resolución:



En este caso partimos de las 5 horas en punto.

De la relación:

$$\boxed{\frac{\text{Espacio recorrido por H}}{\text{Espacio recorrido por M}} = \frac{1}{12}}$$

De donde: $\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{12} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = \dfrac{x}{12}}$ ...(I)

De la figura: $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BD}$

$$25 + y = x + 15$$

$$\therefore \quad \boxed{y + 10 = x} \quad ...(II)$$

Reemplazamos (I) en (II):

$$\frac{x}{12} + 10 = x$$

$$x + 120 = 12x$$

$$120 = 11x$$

$$x = \frac{120}{11} \text{ Div. o minutos}$$

$$\therefore \quad \boxed{x = 10\,\frac{10}{11}\text{ min.}}$$

120 min	11
11	10 min.
10	

$$\therefore \quad \boxed{\frac{120}{11}\text{ min} = 10\,\frac{10}{11}\text{ min}}$$

Luego, las manecillas del reloj estarán en ángulo recto, antes que el minutero pase sobre el horario a las 5 horas $10\ \frac{10}{11}$ minutos.

> ***Nota:*** *Cuando en los problemas sobre relojes, nos mencionan: A qué hora entre las "H" y "H + 1" horas, las manecillas de un reloj están opuestas (180°), están superpuestas (0°), forman un ángulo recto (90°); forman un ángulo llano (180°); para dar la hora se toma como base los "H" horas.*
>
> *• En este problema que acabamos de resolver nos habla que las manecillas están entre las 5 y las 6; quiere decir que se tomó como base las 5 horas.*

TALLER DE EJERCICIOS Nº 45

• Halla el conjunto solución de cada una de las ecuaciones:

1	$\frac{x}{5}-2=3$	2	$x-\frac{3}{5}x=4$
3	$3x\ (2x-4)=2x\ (3x-1)+20$	4	$\frac{x-6}{x+4}=5$
5	$\frac{5}{4}\ (x-2)-6=0$	6	$\frac{2}{5}\ (x-1)=\frac{4}{5}\ (x+2)$
7	$\frac{2x-1}{3x+2}=4$	8	$\frac{3x-2}{x+4}=\frac{1}{2}$
9	$(x+3)\ (x-4)=(x-2)^2-5$	10	$(x-6)^2-(x+5)^2=x+3$
11	$\frac{6}{x^2-x-12}+\frac{2}{x-4}=\frac{5}{x+3}$	12	$\frac{6}{4x^2-9}=\frac{5}{2x+3}+\frac{2}{2x-3}$
13	$\frac{x}{x+1}-\frac{x+1}{x}=0$	14	$\frac{x+2}{x-4}=\frac{2x+5}{2x-13}$
15	$\frac{3x}{x-3}+\frac{3}{x-3}=\frac{3x-11}{x-5}$	16	$\frac{\frac{x+1}{2}+3}{3}=\frac{\frac{12-x}{3}-1}{4}$
17	$\frac{\frac{x-1}{3}-1}{4}=\frac{\frac{x-3}{2}+4}{2}$	18	$\frac{\frac{x-6}{2}+3}{5}=\frac{1+\frac{5-2x}{2}}{4}$

- Resuelve los siguientes problemas:

19 Si al quintuplo de un número, le aumentamos los 3/4 del número, obtenemos 46. Halle el número.

20 El denominador de una fracción es 7 unidades menor que el triple de su numerador, y la fracción simplificada da 4/5. Halle el numerador.

21 Si a los cinco octavos del dinero que tengo le sumas 15 soles, obtienes los tres cuatros de este dinero. ¿Cuánto tengo?

22 Para comprar 16 libros me faltan 20 soles; pero si sólo compro 15 libros me sobran 8 soles. ¿Cuánto cuesta cada libro?

23 El dígito de las decenas de un número de dos dígitos excede al de las unidades en 5. La suma de los dígitos es 9. Hallar el número.

24 El dígito de las unidades de un número de dos dígitos es 7 menos que el doble del dígito de las decenas. La suma de los dígitos es 11. Hallar el número.

25 Para realizar una tarea le tomará a Gladys 4 horas; a Miguel 3 horas y a María 5 horas. ¿Cuánto tiempo les tomará si trabajan los tres juntos?

26 Juntos Manuel y Sara pueden podar un prado en 3h. Le tomará a Sara 5h. para hacer sola la tarea. ¿Cuánto tiempo le tomará a Manuel hacer solo la tarea?

27 Arturo y Kelly fueron en autómovil al taller a una velocidad de 60 km/h, retornaron a casa a una velocidad de 15 km/h en bicicleta. Si el recorrido fue de 4 h. ¿Qué distancia había entre su casa y el taller?

28 Nataly tiene 4 años más que Vanessa. Hace 2 años la suma de sus edades era 16 años. ¿Qué edades tienen ahora?

29 Andrés es 40 años más joven que Susana. Dentro de 3 años Susana tendrá al triple de la edad de Andrés. ¿Qué edad tienen ahora?

30 Gloria tiene 37 años y Eva 21 años. ¿Cuántos años atrás era Gloria de una edad exactamente el triple de la edad de Eva?

31 ¿A qué hora entre la 4 y las 5 están opuestas las agujas de un reloj?

32 ¿A qué hora entre las 2 y las 3 las agujas de un reloj están superpuestas?

33 Perdí los 3/4 de lo que tenía, si hubiera perdido los 2/3 de lo que perdí, tendría 100 soles más de lo que tengo. ¿Cuánto tenía?

34 A un matemático le preguntan la hora y éste responde: "Quedan del día 9 horas menos que las ya transcurridas. ¿Qué hora era?

35 En tres día un hombre ganó S/. 185. Si cada día ganó los 3/4 de lo que ganó el día anterior. ¿Cuánto ganó el primer día?

RESPUESTAS TALLER 45

1. C.S. = {25}	**2.** C.S. = {10}	**3.** C.S. = {-2}
4. C.S. = $\left\{\frac{-13}{2}\right\}$	**5.** C.S. = $\left\{\frac{34}{5}\right\}$	**6.** C.S. = {-5}
7. C.S. = $\left\{-\frac{9}{10}\right\}$	**8.** C.S. = $\left\{\frac{8}{5}\right\}$	**9.** C.S. = $\left\{\frac{11}{3}\right\}$
10. C.S. = $\left\{\frac{8}{23}\right\}$	**11.** C.S. = $\left\{\frac{32}{3}\right\}$	**12.** C.S. = $\left\{\frac{15}{14}\right\}$
13. C.S. = $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$	**14.** C.S. = {-1}	**15.** C.S = {6}
16. C.S. = $\left\{-\frac{5}{3}\right\}$	**17.** C.S. = $\left\{-\frac{19}{2}\right\}$	**18.** C.S. = $\left\{\frac{5}{2}\right\}$
19. 8	**20.** 4	**21.** 120 soles
22. 28 soles	**23.** 72	**24.** 65
25. $1\frac{13}{47}$ h.	**26.** $7\frac{1}{2}$ h.	**27.** 48 km
28. Vanessa = 8 años Nataly = 12 años	**29.** Susana = 57 años Andrés = 17 años	**30.** 13 años
31. 4h $54\frac{6}{11}$ min.	**32.** 2h $10\frac{10}{11}$ min.	**33.** 400 soles
34. 4:30 p.m.	**35.** 80 soles.	

4.2 ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO:

4.2.1 DEFINICIÓN: Una ecuación se llama de segundo grado o cuadrática cuando después de quitar denominadores, reducir términos semejantes y pasar todos sus términos al primer miembro, adopta la forma típica:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde:

a: Coeficiente de x^2 ($a \in \mathbb{R}$). Es preciso que $a \neq 0$, pues de otro modo la ecuación no sería de segundo grado. Siempre puede suponerse **a** positivo, pues si fuera negativo bastaría multiplicar por (-1) los dos miembros de la ecuación para que fuera positivo.

b: Coeficiente de x ($b \in \mathbb{R}$)

c: Término independiente ($c \in \mathbb{R}$)

Los coeficientes **b** y **c** pueden ser nulos. Entonces la ecuación de segundo grado toma las formas siguientes:

i) Si: $c = 0$ ➡ $ax^2 + bx = 0$

ii) Si: $b = 0$ ➡ $ax^2 + c = 0$

iii) Si: $c = b = 0$ ➡ $ax^2 = 0$

(Estas tres ecuaciones se llaman **incompletas**)

- Resolver una ecuación de segundo grado es hallar los valores de la incógnita x que hacen cierta la igualdad: $ax^2 + bx + c = 0$; convirtiéndola en una **IDENTIDAD.**

Estos valores que toma x son las raíces o soluciones de dicha ecuación.

DENOMINACIÓN DE LOS TÉRMINOS DE ESTA ECUACIÓN

$$ax^2 + bx + c = 0$$

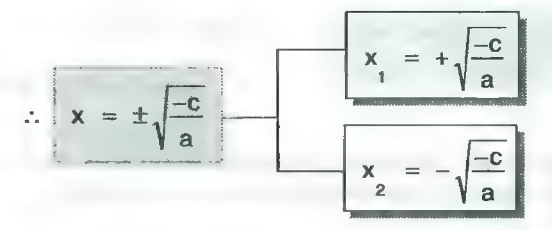
- c: Término independiente
- bx: Término líneal
- ax^2: Término cuadrático

4.2.2 RESOLUCIÓN ALGEBRAICA

Para hallar las raíces distinguiremos tres casos, según que el trinomio sea incompleto o completo.

CASO 1: Si: $b = 0 \Rightarrow$ la ecuación es de la forma: $ax^2 + c = 0$

Despejando x: $ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a}$



$$\therefore\ x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}} \quad \begin{cases} x_1 = +\sqrt{\frac{-c}{a}} \\ x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}} \end{cases}$$

La fórmula hallada nos da las dos raíces de la ecuación: $ax^2 + c = 0$, una con el signo + y otra con el signo -, se ha puesto el doble signo $\pm$ en la fórmula porque la raíz cuadrada de un número real **tiene dos soluciones**, reales o complejos (imaginarias puras), según que el radicando sea positivo o negativo.

Ejemplo 1: Resolver la ecuación: $3x^2 - 12 = 0$

Resolución:

En este ejemplo notamos que la ecuación: $3x^2 - 12 = 0$, tiene la forma: $ax^2 + c = 0$.

De donde: $a = 3$ y $c = -12$

Aplicando la fórmula: $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$; obtenemos:

$$x = \pm\sqrt{-\frac{(-12)}{3}} = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

$$\therefore\ x_1 = 2 \quad (x_1 = \textbf{Primera raíz})$$

$$x_2 = -2 \quad (x_2 = \textbf{Segunda raíz})$$

$\therefore$ El conjunto solución de la ecuación: $3x^2 - 12 = 0$ es: C.S. = {-2, 2} ***Rpta.***

Comprobación:

Para: $x = 2$ $\Rightarrow$ $3x^2 - 12 = 0$ $\Rightarrow$ $3(2)^2 - 12 = 0$

$12 - 12 = 0$ (Cumple)

Para: $x = -2$ $\Rightarrow$ $3x^2 - 12 = 0$ $\Rightarrow$ $3(-2)^2 - 12 = 0$

$12 - 12 = 0$ (Cumple)

> ***Recomendación:*** *Estimado alumno, recuerda siempre que toda ecuación de segundo grado tiene dos raíces o soluciones.*

Ejemplo 2 : Resolver la ecuación: $2x^2 + 18 = 0$

Resolución:

En este ejemplo notamos que la ecuación: $2x^2 + 18 = 0$, tiene la forma: $ax^2 + c = 0$

De donde: $a = 2$ y $c = 18$

Aplicando la fórmula: $\boxed{x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}}$; obtenemos:

$$x = \pm\sqrt{-\frac{18}{2}} = \pm\sqrt{-9} = \pm\sqrt{9\,(-1)} = \pm\sqrt{9}\quad\sqrt{-1}$$

Pero: $\sqrt{-1} = i$ (Número imaginario)

Luego: $x = \pm\sqrt{9}\cdot i = \pm\ 3i$

$\therefore$

$x_1 = +3i$ ...... (x_1 = Primera raíz)

$x_2 = -3i$ ...... (x_2 = Segunda raíz)

$\therefore$ Las dos soluciones de la ecuación son imaginarias puras y opuestas (la suma es cero); C.S. = {-3i; 3i} ***Rpta.***

CASO 2: Si: $c = 0$. La ecuación es de la forma: $ax^2 + bx = 0$

Las raíces se obtienen sacando a "x" como factor común:

$$ax^2 + bx = 0 \quad \Rightarrow \quad x(ax + b) = 0$$

De donde: i) $x = 0$

ii) $ax + b = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\dfrac{b}{a}$

Luego, las raíces o soluciones de la ecuación: $ax^2 + bx = 0$, son:

$$x_1 = 0 \quad ; \quad x_2 = -\frac{b}{a}$$

Ejemplo 1: Resolver la ecuación: $2x^2 - 6x = 0$

Resolución:

En este ejemplo notamos que la ecuación: $2x^2 - 6x = 0$, tiene la forma: $ax^2 + bx = 0$, donde: $a = 2$; $b = -6$.

Aplicando la fórmula: $x_1 = 0$ y $x_2 = -\dfrac{b}{a}$; obtenemos:

$$x_1 = 0 \quad y \quad x_2 = -\frac{(-6)}{2} = 3$$

$\therefore$ El conjunto solución de la ecuación: $2x^2 - 6x = 0$ es: C.S. = {0; 3} ***Rpta.***

Ejemplo 2: Resolver la ecuación: $3x^2 + 9x = 0$

Resolución:

De la ecuación: $3x^2 + 9x = 0$; factorizamos "3x"

$3x(x + 3) = 0$; igualamos cada factor a cero.

De donde: i) $3x = 0 \Rightarrow x = 0$

ii) $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

$\therefore$ El conjunto solución de la ecuación: $3x^2 + 9x = 0$ es: C.S. = {0; -3} ***Rpta.***

CASO 3 : Ecuación completa: $ax^2 + bx + c = 0$

Para poder despejar "x", es preciso completar un cuadrado perfecto, lo que se consigue de la forma siguiente:

a) Multiplicamos por 4a, ambos miembros de la ecuación:

$$4a\,(ax^2 + bx + c) = 4a\,.\,0 \quad \Rightarrow \quad 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

b) Sumamos b^2 a ambos miembros:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 + 4ac = 0 + b^2$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 + 4ac = b^2$$

c) Transponemos "4ac" al segundo miembro:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

d) El primer miembro es un cuadrado perfecto y la ecuación se escribe así:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

O bien: $$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

y despejando **x**; obtenemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(Fórmula para resolver ecuaciones completas de segundo grado)

Ejemplo 1 : Resolver la ecuación: $x^2 - 2x - 3 = 0$

Resolución:

En este ejemplo notamos que la ecuación: $1x^2 - 2x - 3 = 0$; es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde: $a = 1$; $b = -2$ y $c = -3$.

Aplicando la fórmula: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; obtenemos:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\ (1)\ (-3)}}{2\ (1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 4}{2} = 3$$

$$x_1 = \frac{2+4}{2} = 3 \Rightarrow \boxed{x_1 = 3}$$

$$x_2 = \frac{2-4}{2} = -1 \Rightarrow \boxed{x_2 = -1}$$

∴ El conjunto solución de la ecuación: $x^2 - 2x - 3 = 0$, es: C.s. = {-1; 3} ***Rpta.***

Ejemplo 2 : Resolver la ecuación: $x^2 - 6x + 5 = 0$

Resolución:

La ecuación dada: $1x^2 - 6x + 5 = 0$; es de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$

Donde: $x = 1$; $b = -6$ y $c = 5$

Aplicando la fórmula: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; obtenemos:

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4\ (1)\ (5)}}{2\ (1)} = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = \frac{6+4}{2} \Rightarrow \boxed{x_1 = 5}$$

$$x_2 = \frac{6-4}{2} \Rightarrow \boxed{x_2 = 1}$$

El conjunto solución de la ecuación:
$x^2 - 6x + 5 = 0$; es: C.S. = {1; 5} **Rpta.**

Ejemplo 3 : Resolver la ecuación: $6x^2 - 13x + 6 = 0$

Resolución:

La ecuación dada: $6x^2 - 13x + 6 = 0$; es de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$

Donde: $a = 6$; $b = -13$ y $c = 6$

Aplicando la fórmula: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; obtenemos:

$$x = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4\,(6)(6)}}{2(6)} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{12}$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{12} = \frac{13 \pm 5}{12}$$

$$x_1 = \frac{13+5}{12} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{13-5}{12} \Rightarrow x_2 = \frac{2}{3}$$

∴ El conjunto solución de la ecuación:
$6x^2 - 13x + 6 = 0$; es: C.S. = $\left\{\dfrac{2}{3} ; \dfrac{3}{2}\right\}$ **Rpta.**

4.2.3 APLICACIONES DE LA RESOLUCIÓN ALGEBRAICA:

A) Propiedades de las Raíces

De la fórmula para resolver la ecuación completa de segundo grado, separando las raíces se tiene:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad ; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1. Sumando: $x_1 + x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a}$$

$$\therefore \quad \boxed{x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}} \quad \textbf{(Fórmula I)}$$

Es decir:

La suma de las raíces de la ecuación de segundo grado es igual al coeficiente de x con signo contrario, dividido por el coeficiente de x^2.

Ejemplo (1): Dada la ecuación: $x^2 - 11x - 26 = 0$. Calcular la suma de sus raíces.

Resolución:

La ecuación dada: $1x^2 - 11x - 26 = 0$; es de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$

Donde: $a = 1$; $b = -11$ y $c = -26$

Aplicando la fórmula I: $\boxed{x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}}$; obtenemos:

$$x_1 + x_2 = \frac{-(-11)}{1} \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 = 11$$

∴ La suma de las raíces de la ecuación: $x^2 - 11x - 26 = 0$; es: 11 ***Rpta.***

Ejemplo (2): Dada la ecuación: $2x^2 - 17x + 21 = 0$. Calcular la suma de sus raíces.

Resolución:

La ecuación dada: $2x^2 - 17x + 21 = 0$; es de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$

Donde: $a = 2$; $b = -17$ y $c = 21$

Aplicando la fórmula I: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$; obtenemos:

$$x_1 + x_2 = \frac{-(-17)}{2} = \frac{17}{2} \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{17}{2}$$

$\therefore$ La suma de las raíces de la ecuación: $2x^2 - 17x + 21 = 0$; es 17/2 **Rpta.**

② ***Multiplicando:***

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$ **(Fórmula II)**

Es decir:

El producto de las raíces de la ecuación de segundo grado es igual al término independiente dividido por el coeficiente de x^2.

Ejemplo ①: Dada la ecuación: $x^2 + x - 12 = 0$. Calcular el producto de sus raíces.

Resolución:

La ecuación dada: $1x^2 + x - 12 = 0$; es de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$

Donde: $a = 1$; $b = 1$ y $c = -12$

Aplicando la fórmula II: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$; obtenemos:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-12}{1} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = -12$$

∴ El producto de las raíces de la ecuación: $x^2 + x - 12 = 0$; es: -12. ***Rpta.***

Ejemplo (2): Dada la ecuación: $2x^2 + 11x - 6 = 0$. Calcular el producto de sus raíces.

Resolución:

La ecuación dada: $2x^2 + 11x - 6 = 0$; es de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$

Donde: $a = 2$; $b = 11$ y $c = -6$

Aplicando la fórmula II: $\boxed{x_1 \, x_2 = \frac{c}{a}}$; obtenemos:

$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{6}{2} \Rightarrow x_1 \, x_2 = -3$$

∴ El producto de las raíces de la ecuación: $2x^2 + 11x - 6 = 0$; es: -3 ***Rpta.***

B) Formar una Ecuación de Segundo Grado dadas sus Raíces

Al resolver una ecuación de segundo grado o cuadrática, se obtuvo como raíces: x_1 y x_2, podríamos decir que la ecuación que dio origen a esas raíces es:

$$\boxed{(x - x_1)(x - x_2) = 0}$$

Efectuando se obtiene: $x^2 - x \cdot x_2 - x_1 \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0$

$$x^2 - \underbrace{(x_1 + x_2)}_{\text{Suma de raíces}} x + \underbrace{x_1 \cdot x_2}_{\text{Producto de raíces}} = 0$$

$$\boxed{x^2 - \begin{pmatrix}\text{Suma de} \\ \text{raíces}\end{pmatrix} x + \begin{pmatrix}\text{Producto} \\ \text{de raíces}\end{pmatrix} = 0}$$ **(Fórmula III)**

Ejemplo (1): Escribir una ecuación cuyas raíces son 3 y 5.

Resolución:

Sabemos que: $\begin{cases} \text{Suma de raíces} = 3 + 5 = 8 \\ \text{Producto de raíces} = 3 \times 5 = 15 \end{cases}$

Aplicando la fórmula III:

$$x^2 - (\text{Suma de raíces})\, x + (\text{Producto de raíces}) = 0$$

Obtenemos: $x^2 - (8)\,x + (15) = 0 \Rightarrow \therefore \quad x^2 - 8x + 15 = 0$

$\therefore$ La ecuación de segundo grado que se forma es: $x^2 - 8x + 15 = 0$ ***Rpta.***

Ejemplo (2): Hallar dos números que suman 5 y cuyo producto es 6.

Resolución:

Aplicando la fórmula III:

$$x^2 - (\text{Suma de raíces})\, x + (\text{Producto de raíces}) = 0$$

Obtenemos: $x^2 - 5x + 6 = 0$; esta ecuación es de la forma:

$ax^2 + bx + c = 0$; donde: $a = 1$; $b = -5$ y $c = 6$

Aplicando la fórmula: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Obtenemos: $x = \dfrac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\,(1)\,(6)}}{2\,(1)} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$x_1 = \dfrac{5+1}{2} \Rightarrow x_1 = 3$

$x_2 = \dfrac{5-1}{2} \Rightarrow x_2 = 2$

$\therefore$ Los números pedidos son: 3 y 2. ***Rpta.***

C) **Estudio acerca de la Naturaleza de las Raíces de la Ecuación de Segundo Grado o Cuadrática.**

El binomio que figura bajo el radical en la fórmula: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Se llama el **discriminante** de la ecuación de segundo grado o cuadrática. Discriminar significa **distinguir,** y como explicamos seguidamente el discriminante, $b^2 - 4ac$; nos permitirá conocer la naturaleza de las soluciones (reales, imaginarias, dobles) sin necesidad de resolver la ecuación.

- El discriminante: $b^2 - 4ac$; se denota por la letra D.

Es decir: $\boxed{D = b^2 - 4ac}$

Ejemplo (1): Hallar el discriminante de la ecuación: $x^2 + 7x + 10 = 0$

Resolución:

La ecuación dada: $1x^2 + 7x + 10 = 0$; es de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$

Donde: $a = 1$; $b = 7$ y $c = 10$

De la expresión: $\boxed{D = b^2 - 4ac}$; obtenemos:

$$D = (7)^2 - 4(1)(10) = 49 - 40 = 9$$

$\therefore$ $\boxed{D = 9}$ ***(Discriminante Positivo)***

Ejemplo (2): Hallar el discriminante de la ecuación: $x^2 + 3x + 10 = 0$

Resolución:

La ecuación: $x^2 + 3x + 10 = 0$; es de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$

Donde: $a = 1$; $b = 3$ y $c = 10$

De la expresión: $\boxed{D = b^2 - 4ac}$; obtenemos:

$$D = (3)^2 - 4(1)(10) = 9 - 40 = -31$$

$\therefore$ $\boxed{D = -31}$ ***(Discriminante Negativo)***

Ejemplo (3): Hallar el discriminante de la ecuación: $9x^2 - 6x + 1 = 0$

Resolución:

La ecuación: $9x^2 - 6x + 1 = 0$; es de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$

Donde: $a = 9$; $b = -6$ y $c = 1$

De la expresión: $\boxed{D = b^2 - 4ac}$; obtenemos:

$$D = (-6)^2 - 4(9)(1) = 36 - 36 = 0$$

$$\therefore \quad \boxed{D = 0} \quad \textit{(Discriminante es Cero)}$$

- Como se podrá observar, el discriminante puede ser positivo, negativo o cero.
- Otra forma de escribir la fórmula general para resolver una ecuación completa de segundo grado es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ó} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

I. ECUACIONES CON DISCRIMINANTE POSITIVO

Dada la ecuación de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0$; si su discriminante D es positivo, entonces existen dos raíces o soluciones reales diferentes, que son:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a} \end{cases}$$

(Raíces o soluciones reales)

Ejemplo: En la ecuación: $2x^2 + 5x - 3 = 0$

Se sabe que: $a = 2$; $b = 5$ y $c = -3$

De la expresión: $\boxed{D = b^2 - 4ac}$; obtenemos:

$$D = 5^2 - 4(2)(-3) = 25 + 24 \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad \boxed{D = 49}$$

Luego, calculamos las raíces o soluciones con las fórmulas:

i) $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a} \Rightarrow x_1 = \dfrac{-(5) + \sqrt{49}}{2\ (2)} = \dfrac{-5+7}{4} = \dfrac{2}{4} \quad \therefore \quad \boxed{x_1 = \dfrac{1}{2}}$

ii) $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a} \Rightarrow x_2 = \dfrac{-(5) - \sqrt{49}}{2\ (2)} = \dfrac{-5-7}{4} = \dfrac{-12}{4} \quad \therefore \quad \boxed{x_2 = -3}$

El conjunto solución de la ecuación: $2x^2 + 5x - 3 = 0$; es: C.S = {-3; 1/2}; siendo estas raíces dos números reales y su discriminante positivo o sea mayor que cero ($D > 0$). **Rpta.**

II. ECUACIONES CON DISCRIMINANTE NEGATIVO

Dada la ecuación de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0$; si su discriminante D es negativo. Entonces la ecuación no tiene raíces reales, estas raíces serán dos raíces o soluciones complejos conjugados, que son:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a} \\[2ex] x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a} \end{cases}$$

(Raíces o soluciones: complejos conjugados)

Ejemplo: En la ecuación: $3x^2 + x + 4 = 0$

Se sabe que: $a = 3$; $b = 1$ y $c = 4$

De la expresión: $\boxed{D = b^2 - 4ac}$; obtenemos:

$$D = (1)^2 - 4\ (3)\ (4) = 1 - 48 = -47 \Rightarrow \therefore \ D\ -47$$

Luego, calculamos las raíces o soluciones con las fórmulas:

i) $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a} \Rightarrow x_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{-47}}{2\ (3)} = \dfrac{-1 + \sqrt{47\ (-1)}}{6} = \dfrac{-1 + \sqrt{47} \cdot \sqrt{-1}}{6}$

$$\therefore \quad \boxed{x_1 = \frac{-1 + \sqrt{47}\ i}{6}}$$ ***(Primera solución)***

ii) $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \Rightarrow x_2 = \frac{-1-\sqrt{-47}}{2\ (3)} = \frac{-1-\sqrt{47\ (-1)}}{6} = \frac{-1-\sqrt{47}\cdot\sqrt{-1}}{6}$

$$\therefore \quad \boxed{x_2 = \frac{-1-\sqrt{47}\ i}{6}}$$ ***(Segunda solución)***

El conjunto solución de la ecuación: $3x^2 + x + 4 = 0$; es

$C.S. = \left\{\frac{-1+\sqrt{47}\ i}{6}\ ;\ \frac{-1-\sqrt{47}\ i}{6}\right\}$; siendo estas raíces dos números complejos conjugados y su discriminante negativo osea menor que cero ($D < 0$). ***Rpta.***

III. ECUACIONES CON DISCRIMINANTE CERO

Dada la ecuación de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0$; si su discriminante D es cero, entonces la ecuación tiene una raíz doble (raíces iguales) que es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{0}}{2a} \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{-b}{2a}}$

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{0}}{2a} \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{-b}{2a}}$

(Raíces iguales)

Ejemplo: En la ecuación: $4x^2 - 20x + 25 = 0$

Se sabe que: $a = 4$; $b = -20$ y $c = 25$

De la expresión: $\boxed{D = b^2 - 4ac}$; obtenemos:

$$D = (-20)^2 - 4\ (4)\ (25) = 400 - 400 = 0 \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad D = 0$$

Luego, calculamos las raíces o soluciones, con las fórmulas:

i) $x_1 = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-(-20)}{2\ (4)} = \frac{20}{8} \Rightarrow x_1 = \frac{5}{2}$ (Primera solución)

ii) $x_2 = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_2 = \frac{-(-20)}{2\,(4)} = \frac{20}{8} \Rightarrow x_2 = \frac{5}{2}$ (Segunda solución)

El conjunto solución de la ecuación: $4x^2 - 20x + 25$; C.S. = {5/2}, siendo las raíces de las ecuaciones una raíz doble (raíces iguales) y discriminante igual a cero (D = 0). ***Rpta.***

4.3 RESOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA.

En forma general una ecuación de segundo grado con una incógnita o una ecuación de grado superior a dos, se resuelve:

A) Por medio de la factorización.
B) Empleando la fórmula general
C) Por completación del cuadrado

A) Resolución de Ecuaciones Cuadráticas por Factorización

Una ecuación de segundo grado se resuelve en forma sencilla por medio de la factorización, cuando la factorización del polinomio puede efectuarse.

1. Se transladan todos los términos a un solo miembro, dejando el otro miembro igual a cero.
2. Se factoriza el primer miembro.
3. Para obtener las soluciones se iguala cada factor a cero.

Ejemplo (1): Resolver: $5x^2 + 4x = 6 - 3x$

Resolución:

Pasando todo al primer miembro: $5x^2 + 4x - 6 + 3x = 0$

$$5x^2 + 7x - 6 = 0$$

Factorizando (Por Aspa Simple):

$$\begin{array}{lll} 5x & -3 & \rightarrow -3x \\ x & +2 & \rightarrow +10x \\ \hline & & +7x \end{array}$$

...(*Cumple*)

Luego: $5x^2 + 7x - 6 = (5x - 3)(x + 2) = 0$

Igualamos cada factor a cero:

i) $5x - 3 = 0 \Rightarrow 5x = 3 \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{3}{5}}$

ii) $x + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = -2}$

Comprobación:

Para: $\boxed{x = \frac{3}{5}} \Rightarrow 5x^2 + 7x - 6 = 0 \Rightarrow 5\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 7\left(\frac{3}{5}\right) - 6 = 0$

$$\not{5}\left(\frac{9}{\not{25}}\right) + \frac{21}{5} - 6 = 0 \Rightarrow \frac{9}{5} + \frac{21}{5} - 6 = 0$$

$$\boxed{\frac{30}{5} - 6 = 0} \quad \textit{(Cumple)}$$

Para: $\boxed{x = -2} \Rightarrow 5x^2 + 7x - 6 = 0 \Rightarrow 5(-2)^2 + 7(-2) - 6 = 0$

$$5\ (4) - 14 - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{20 - 20 = 0} \quad \textit{(Cumple)}$$

∴ El conjunto solución de la ecuación: $5x^2 + 4x = 6 - 3x$ es: C.S. = {-2; 3/5} ***Rpta.***

Ejemplo (2): Resolver : $x^2 - 8x - 105 = 0$

Resolución:

La ecuación dada: $x^2 - 8x - 105 = 0$; la factorizamos por el Método del Aspa; así:

105	3
35	5
7	7
1	

3 · 5 = 15 ; 7

$x^2 - 8x - 105 = 0$

x → -15 → -15x

x → +7 → +7x

-15x + 7x = -8x ...*(Cumple)*

Luego: $(x - 15)(x + 7) = 0$; igualamos cada factor a cero.

De donde: i) $x - 15 = 0 \Rightarrow$ $x_1 = 15$ (Primera raíz)

ii) $x + 7 = 0 \Rightarrow$ $x_2 = -7$ (Segunda raíz)

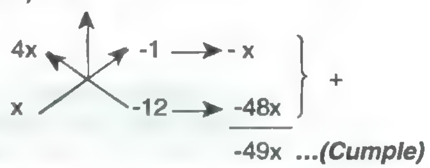
$\therefore$ El conjunto solución de la ecuación: $x^2 - 8x - 105 = 0$; es: C.S. = {-7; 15} ***Rpta.***

Ejemplo (3): Resolver: $4x^2 - 49x = -12$

Resolución:

Pasando todo al primer miembro: $4x^2 - 49x + 12 = 0$

Factorizamos (Por Método del Aspa): 4) = 0



Luego: $4x^2 - 49x + 12 = 0 \Rightarrow (4x - 1)(x - 12) = 0$

Igualamos cada factor a cero:

i) $4x - 1 = 0 \Rightarrow 4x = 1 \Rightarrow$ $x_1 = \frac{1}{4}$ ***(Primera solución)***

ii) $x - 12 = 0 \Rightarrow$ $x_2 = 12$ ***(Segunda solución)***

$\therefore$ El conjunto solución de la ecuación: $4x^2 - 49x = -12$ es: C.S. {1/4; 12} ***Rpta.***

Ejemplo (4): Resolver: $-x^2 + 1x + 24 = 0$

Resolución:

En este caso, cambiamos de signo a cada término de la ecuación obteniendo:

$$x^2 - 10x - 24 = -0 \qquad \text{Pero:} \quad -0 = 0$$

Luego:

$x^2 - 10x - 24 = 0$; factorizamos por el Método del Aspa:

$$\begin{array}{lll} x & -12 \rightarrow & -12x \\ x & +2 \rightarrow & +2x \\ \hline & & -10x \end{array}$$

...(*Cumple*)

Luego: $-x^2 + 10x + 24 = 0 \Rightarrow x^2 - 10x - 24 = 0$

$(x - 12)(x + 2) = 0$

Igualamos cada factor a cero: i) $x - 12 = 0 \Rightarrow x_1 = 12$

ii) $x + 2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2$

∴ El conjunto solución de la ecuación: $-x^2 + 10x + 24 = 0$; es: C.s. = {-2; 12} ***Rpta.***

Ejemplo (5): Resolver: $x(x + 1) = 24(x - 5)$

Resolución:

Efectuando los productos indicados, obtenemos:

$x(x + 1) = 24(x - 5) \Rightarrow x^2 + x = 24x - 120$

Pasamos todos los términos al primer miembro; quedando así:

$x^2 + x - 24x + 120 = 0 \Rightarrow x^2 - 23x + 120 = 0$

Factorizamos por el Método del Aspa:

120	2	(8)
60	2	
30	2	
15	3	(15)
5	5	
1		

Luego: $(x - 15)(x - 8) = 0$

De donde:

i) $x - 15 = 0 \Rightarrow x_1 = 15$

ii) $x - 8 = 0 \Rightarrow x_2 = 8$

∴ El conjunto solución de la ecuación: $x(x + 1) = 24(x - 5)$; es: C.S. = {8; 15} ***Rpta.***

Ejemplo ⑥: Resolver: $\dfrac{x+1}{2x-1} = \dfrac{x-3}{x+3}$

Resolución:

Para este tipo de ecuación se aplica la propiedad que dice: "El producto de los extremos es igual al producto de los medios"

$$\frac{x+1}{2x-1} = \frac{x-3}{x+3} \Rightarrow (x+1)(x+3) = (2x-1)(x-3)$$

efectuando los productos indicados, se obtiene:

$$x^2+3x+x+\cancel{3} = 2x^2-6x-x+\cancel{3}$$

$$x^2+4x = 2x^2-7x \text{ ; pasamos los términos al segundo miembro.}$$

$$0 = 2x^2-7x-x^2-4x$$

$$0 = x^2-11x \text{ ; esta expresión también se puede escribir así:}$$

$$x^2-11x = 0 \text{ ; factorizamos "x"}$$

$$x(x-11) = 0 \text{ ; igualamos cada factor a cero.}$$

De donde: i) $x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

ii) $x - 11 = 0 \Rightarrow x_2 = 11$

∴ El conjunto solución de la ecuación: $\dfrac{x+1}{2x-1} = \dfrac{x-3}{x+3}$; es: C.S. = {0; 11} ***Rpta.***

Ejemplo ⑦: Resolver: $\dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x+10}$

Resolución:

En el primer miembro, aplicamos: $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{a\ d - b\ c}{b \cdot d}$

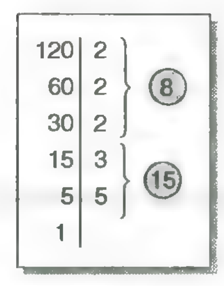
Obteniendo: $\dfrac{x-12}{12x} = \dfrac{1}{x+10}$

Ahora, hacemos producto de extremos y medios:

$$(x-12)\,(x+10) = 12x \quad (1)$$

$$x^2+10x-12x-120 = 12x$$

$$x^2-2x-120 = 12x;$$



pasando "12x" al primer miembro.

$$x^2 - 2x - 120 - 12x = 0$$

$$x^2 - 14x - 120 = 0$$

x -20

x +6

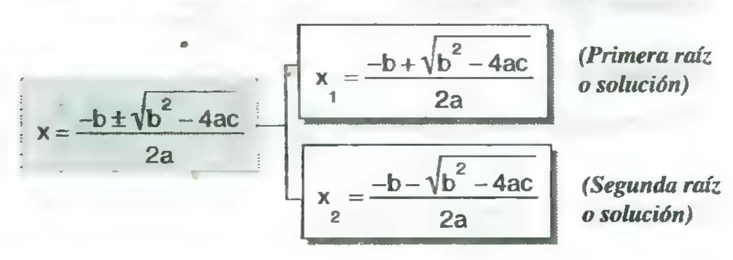
Luego: $(x - 20)(x + 6) = 0$

Donde: i) $x - 20 = 0 \Rightarrow x = 20$; ii) $x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6$

∴ El conjunto solución de la ecuación: $\frac{1}{12} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x+10}$ es: C.S. = {-6; 20} ***Rpta.***

B) Resolución de Ecuaciones Cuadráticas Empleando la Fórmula General

- Cuando la factorización no es posible se recurre a la fórmula general de la ecuación de segundo grado ($ax^2 + bx + c = 0$), la cual nos da las soluciones o raíces de dicha ecuación.
- La fórmula general para resolver una ecuación cuadrática es:



$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ *(Primera raíz o solución)*

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ *(Segunda raíz o solución)*

Ejemplo (1): Resolver: $3x^2 + x - 6 = 0$

Resolución:

La ecuación dada, $3x^2 + x - 6 = 0$, tiene la forma: $ax^2 + bx + c = 0$

Donde: $a = 3$; $b = 1$ y $c = -6$

Luego, reemplazamos los valores hallados en la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\ (3)\ (-6)}}{2\ (3)}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{73}}{6} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{73}}{6} \\ x_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{73}}{6} \end{cases}$$

El conjunto solución de la ecuación es:

$$\therefore \quad C.S. = \left\{ \frac{-1 + \sqrt{73}}{6}\ ;\ \frac{-1 - \sqrt{73}}{6} \right\}$$ ***Rpta.***

Ejemplo (2): Resolver: $5x^2 - 8x + 2 = 0$

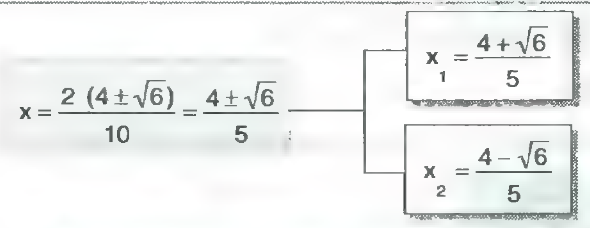
Resolución:

La ecuación $5x^2 - 8x + 2 = 0$ tiene la forma: $ax^2 + bx + c = 0$

Donde: $a = 5$; $b = -8$ y $c = 2$

De la fórmula: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4\ (5)\ (2)}}{2\ (5)}$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 40}}{10} = \frac{8 \pm \sqrt{24}}{10} = \frac{8 \pm 2\sqrt{6}}{10}$$



$$x = \frac{2\ (4 \pm \sqrt{6})}{10} = \frac{4 \pm \sqrt{6}}{5}$$

$$x_1 = \frac{4 + \sqrt{6}}{5}$$

$$x_2 = \frac{4 - \sqrt{6}}{5}$$

$\therefore$ El conjunto solución de la ecuación es: C.S. = $\left\{ \frac{4 - \sqrt{6}}{5} \ ; \ \frac{4 + \sqrt{6}}{5} \right\}$ ***Rpta.***

Ejemplo (3): Resolver: $3x^2 - 2x + 1 = 0$

Resolución:

La ecuación dada: $3x^2 - 2x + 1 = 0$; tiene la forma: $ax^2 + bx + c = 0$

Donde: $a = 3$; $b = -2$ y $c = 1$

De la fórmula: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\ (3)\ (1)}}{2\ (3)}$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{4\ (-2)}}{6} = \frac{2 \pm 2\sqrt{-2}}{6} = \frac{2\ (1 \pm \sqrt{-2})}{6}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{-2}}{3} = \frac{1 \pm \sqrt{2\ (-1)}}{3} = \frac{1 \pm \sqrt{2}\sqrt{-1}}{3} \ ; \text{ pues: } \sqrt{-1} = i$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{2}\ i}{3}$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{2}\ i}{3}$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{2}\ i}{3}$$

(Las raíces son dos números complejos conjugados)

$\therefore$ El conjunto solución de la ecuación es: C.S.: $\left\{ \frac{1 - \sqrt{2}\ i}{3} \ ; \ \frac{1 + \sqrt{2}\ i}{3} \right\}$ ***Rpta.***

C) Resolución de una Ecuación Cuadrática Completando Cuadrados

- Toda ecuación de segundo grado de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$; puede tomar la forma: $(px + q)^2 = k$, con tan solo **completando cuadrados**. Para esto se siguen los pasos que se indican a continuación:

1. Se hace la transposición de términos de manera que en el primer miembro estén los términos que contienen a la variable y en el segundo miembro el término constante (término independiente)
2. Se dividen los dos miembros entre el coeficiente de x^2.
3. Se suma a los dos miembros el cuadrado de la mitad del coeficiente de x.
4. Se expresa el primer miembro en forma del cuadrado de un binomio.
5. Se extraen las raíces cuadradas de los dos miembros, anteponiendo el signo a la raíz cuadrada del termino constante.
6. Se resuelven las dos ecuaciones de primer grado obtenidas en el paso anterior, hallando así el conjunto solución.

Ejemplo (1): Resolver, completando cuadrados: $5x^2 - 2x - 3 = 0$

Resolución:

1º Paso:

Transponemos términos de tal manera que los términos que contienen la variable "x" estén en el primer miembro, y el término constante (Término independiente), esté en el segundo miembro, quedando así: $5x^2 - 3x = 3$ ...(I)

2º Paso:

Se dividen los dos miembros entre el coeficiente de x^2 osea entre 5.

$$\frac{5x^2 - 2x}{5} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{5x^2}{5} - \frac{2x}{5} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{2}{5}x = \frac{3}{5} \quad \text{...(II)}$$

3º Paso:

Se suma a los dos miembros el cuadrado de la mitad del coeficiente de "x"; así:

- Mitad del coeficiente de $\frac{2}{5}x \Rightarrow \frac{\left(\frac{2}{5}\right)}{2} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

- Su cuadrado de $\frac{1}{5} \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$

Luego, sumamos 1/25 a los dos miembros de la expresión (II), obteniendo:

$$x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{25} = \frac{3}{5} + \frac{1}{25} \quad ...(III)$$

4º Paso:

Expresamos el primer miembro de la expresión (III) en forma del cuadrado de un binomio.

$$x^2 - \frac{2}{5}x + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{3}{5} + \frac{1}{25}$$

Sabemos que: $\frac{1}{25} = \left(\frac{1}{5}\right)^2$

$$\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 = \frac{3\ (5) + 1}{25} \Rightarrow \left(x - \frac{1}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \quad ...(IV)$$

5º Paso:

Se extraen las raíces cuadradas de los dos miembros; anteponiendo el signo a la raíz cuadrada del término 16/25. Así:

$$\sqrt{\left(x - \frac{1}{5}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} \Rightarrow \left(x - \frac{1}{5}\right) = \pm\frac{4}{5}$$

De donde: i) $x - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = \frac{5}{5} = 1 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 1}$

ii) $x - \frac{1}{5} = -\frac{4}{5} \Rightarrow x = -\frac{4}{5} + \frac{1}{5} = -\frac{3}{5} \Rightarrow \therefore \boxed{x = -\frac{3}{5}}$

$\therefore$ El conjunto solución de la ecuación: $5x^2 - 2x - 3 = 0$; es: C.S. = {-3/5; 1} ***Rpta.***

Ejemplo (2): Resolver; completando cuadrados: $6x^2 + 26x + 8 = 0$

Resolución:

1º. Pasamos + 8 al segundo miembro como -8.

$$6x^2 + 26x = -8$$

2º. Dividimos los dos miembros entre el coeficiente de x^2, o sea entre 6.

$$\frac{6x^2+26x}{6} = -\frac{8}{6} \Rightarrow \frac{6x^2}{6}+\frac{26x}{6} = -\frac{8}{6}$$

$$x^2+\frac{13}{3}x = -\frac{4}{3} \quad \ldots(I)$$

- Sacamos la mitad: $\dfrac{\left(\dfrac{13}{3}\right)}{2} = \dfrac{13}{6}$

- Elevamos el cuadrado: $\dfrac{13}{6} \Rightarrow \left(\dfrac{13}{6}\right)^2 = \dfrac{169}{36}$

3º. Sumamos $\dfrac{169}{36}$; a los dos miembros de la expresión (I), obteniendo:

$$x^2+\frac{13}{3}x+\frac{169}{36} = -\frac{4}{3}+\frac{169}{36}$$

$$x^2+\frac{13}{3}x+\left(\frac{13}{6}\right)^2 = \frac{-4\ (12)+169}{36} = \frac{-48+169}{36} = \frac{121}{36}$$

$$\left(x+\frac{13}{6}\right)^2 = \frac{121}{36}$$ extraemos la raíz cuadrada a ambos miembros.

$$\left(x+\frac{13}{6}\right) = \pm\sqrt{\frac{221}{36}} = \pm\frac{11}{6}$$

De donde:

i) $x+\dfrac{13}{6} = \dfrac{+11}{6} \Rightarrow x = \dfrac{+11}{6}-\dfrac{13}{6} = \dfrac{-2}{6} = \dfrac{-1}{3} \Rightarrow \therefore$ $x = \dfrac{-1}{3}$

ii) $x+\dfrac{13}{6} = -\dfrac{11}{6} \Rightarrow x = -\dfrac{11}{6}-\dfrac{13}{6} = -\dfrac{24}{6} = -4 \Rightarrow \therefore$ $x = -4$

$\therefore$ El conjunto solución de la ecuación: $6x^2 + 26x + 8 = 0$, es: C.s. = {-1/3; -4} ***Rpta.***

Ejemplo (3): Resolver, completando cuadrados: $2x^2 + 7x - 30 = 0$

Resolución:

1º. Pasamos -30 al segundo miembro como +30.

$$2x^2 + 7x = 30$$

2º. Dividimos los dos miembros entre el coeficiente de x^2, osea entre 2.

$$\frac{2x^2 + 7x}{2} = \frac{30}{2} \Rightarrow \frac{2x^2}{2} + \frac{7x}{2} = 15 \Rightarrow \boxed{x^2 + \frac{7}{2}x = 15} \quad \ldots(\alpha)$$

- Sacamos su mitad: $\dfrac{\left(\frac{7}{2}\right)}{2} = \dfrac{7}{4}$

- Elevamos al cuadrado $\dfrac{7}{4} \Rightarrow \left(\dfrac{7}{4}\right)^2 = \dfrac{49}{16}$

3º. Sumamos 49/16 ; a los dos miembros de la expresión (α); obteniendo:

$$x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{49}{16} = 15 + \frac{49}{16}$$

$$x^2 + \frac{7}{2}x + \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{15\ (16) + 49}{16} = \frac{240 + 49}{16} = \frac{289}{16}$$

$$\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{289}{16}$$; extraemos raíz cuadrada a ambos miembros.

$$\left(x + \frac{7}{4}\right) = \pm\sqrt{\frac{289}{16}} = \pm\frac{17}{4}$$

De donde:

i) $x + \dfrac{7}{4} = +\dfrac{17}{4} \Rightarrow x = \dfrac{17}{4} - \dfrac{7}{4} = \dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2} \Rightarrow \therefore\ \boxed{x = \dfrac{5}{2}}$

ii) $x + \dfrac{7}{4} = -\dfrac{17}{4} \Rightarrow x = -\dfrac{17}{4} - \dfrac{7}{4} = -\dfrac{24}{4} = -6 \Rightarrow \therefore\ x = -6$

$\therefore$ El conjunto solución de la ecuación: $2x^2 + 7x - 30 = 0$; es: C.s. = {-6; 5/2} ***Rpta.***

4.4 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS USANDO LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Problema (1): La diferencia de dos números es 3 y su producto es igual a 88. Hallar los números.

Resolución:

Sean los dos números: x e y

Del enunciado, planteamos las ecuaciones:

$$x - y = 3 \quad ...(I)$$

$$x \cdot y = 88 \quad ...(II)$$

De la ecuación (I); despejamos "y"

$$x - y = 3 \quad \Rightarrow \quad x - 3 = y \quad ...(III)$$

Reemplazamos (III) en (II): $x \cdot y = 88 \quad \Rightarrow \quad x(x-3) = 88$

$$x^2 - 3x = 88$$

$$x^2 - 3x - 88 = 0$$; factorizamos por el Método del Aspa

x	+8	→ +8x	+
x	-11	→ -11x	
		-3x	...*(Cumple)*

Luego: $(x+8)(x-11) = 0$; igualamos cada factor a cero.

De donde: i) $x + 8 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -8}$

ii) $x - 11 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 11}$

- De los dos valores que toma "x" osea: -8 y 11, sólo tomamos el valor positivo (x = 11)

  Luego; reemplazamos el valor de "x = 11" en (III):

$$x - 3 = y \quad \Rightarrow \quad 11 - 3 = y \quad \Rightarrow \quad \boxed{8 = y}$$

∴ Los números pedidos son: x = 11; y = 8 ***Rpta.***

Problema (2): Hallar dos números enteros positivos, cuyo producto sea 143 y cuya suma sea 24.

Resolución:

Sean los dos numeros consecutivos: x é y.

Del enunciado, planteamos las ecuaciones: $x \cdot y = 143$ ...(I)

$x + y = 24$ ...(II)

De la ecuación (II); despejamos "y"

$$x + y = 24 \Rightarrow y = 24 - x \quad ...(III)$$

Reemplazamos la ecuación (III) en (I):

$$x \cdot (24 - x) = 143 \Rightarrow 24x - x^2 = 143;$$

cambiamos de signo a cada término de esta última expresión:

$$x^2 - 24x = -143 \Rightarrow x^2 - 24x + 143 = 0$$

x -11 → -11x

x -13 → -13x +

-24x ***...(Cumple)***

Luego: $(x - 11) \cdot (x - 13)$ 0

De donde: i) $x - 11 = 0 \Rightarrow x = 11$

ii) $x - 13 = 0 \Rightarrow x = 13$

- Como se observará "x" toma dos valores positivos $x = 11$ y $x = 13$, la cual podemos tomar cualquiera de los dos; tomemos $x = 11$.

  Luego; reemplazamos el valor de $x = 11$, en la expresión (III):

$$y = 24 - x \Rightarrow y = 24 - 11 \Rightarrow y = 13$$

∴ Los números enteros positivos pedidos son: $x = 11$; $y = 13$. ***Rpta.***

Problema (3): La suma de los inversos de dos números consecutivos es 5/6. Hallar dichos números.

Resolución:

Sean los dos números consecutivos: x é $(x + 1)$

Las inversas de dichos números son: $\frac{1}{x}$ é $\frac{1}{(x+1)}$

Del enunciado, planteamos la ecuación:

$\frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)} = \frac{5}{6}$; damos común denominador en el primer miembro.

$$\frac{(x+1)+x}{x\ (x+1)} = \frac{5}{6} \quad \Rightarrow \quad \frac{2x+1}{x^2+x} = \frac{5}{6}$$

Hacemos producto de extremos y medios; obteniendo:

$$6\ (2x+1) = 5\ (x^2+x)$$

$$12x+6 = 5x^2+5x$$

$$0 = 5x^2+5x-12x-6$$

$$0 = 5x^2-7x-6$$

Factorizamos el segundo miembro, por el Método del Aspa:

$$5x^2 - 7x - 6 = 0$$

$5x$	$+3$	→	$+3x$
x	-2	→	$-10x$
			$-7x$ ...***(Cumple)***

Luego: $(5x + 3)(x - 2) = 0$

De donde: i) $5x+3=0 \Rightarrow 5x=-3 \Rightarrow x=-\frac{3}{5}$

ii) $x-2=0 \Rightarrow x=2$

- De los dos valores que toma "x", sólo tomaremos el valor positivo o sea $x = 2$.

$\therefore$ Los números consecutivos son: $x = 2$ y $x + 1 = 3$. ***Rpta.***

Problema (4): La suma de dos números es 8 y su producto es igual a 2 veces su diferencia, aumentada en 4. ¿Cuáles son esos números?

Resolución:

Sean los dos números: x é y.

Del enunciado, planteamos las ecuaciones: $x + y = 8$ ...(1)

$x \cdot y = 2(x - y) + 4$ ...(2)

De la ecuación (1), despejamos "y":

$$y = (8 - x) \quad ...(3)$$

Reemplazamos la expresion (3) en (2):

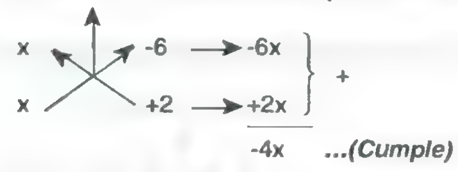
$$x(8 - x) = 2[x - (8 - x)] + 4$$

$$x(8 - x) = 2(2x - 8) + 4 \quad \Rightarrow \quad x(8 - x) = 4x - 12$$

$$8x - x^2 = 4x - 12$$

$$0 = 4x - 12 - 8x + x^2$$

$0 = x^2 - 4x - 12$; factorizamos por el Método del Aspa:



Luego: $(x - 6)(x + 2) = 0$

De donde: i) $x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$

ii) $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

- De los dos valores que toma "x", sólo tomaremos el valor positivo, o sea $x = 6$.

  Luego, reemplazamos el valor de $x = 6$, en la expresión (3):

  $$y = 8 - x \quad \Rightarrow \quad y = 8 - 6 \quad \Rightarrow \quad y = 2$$

∴ Los números pedidos son: $x = 6$; $y = 2$ ***Rpta.***

Problema (5): Hallar dos números cuya suma sea 30 y la diferencia de sus cuadrados sea 120.

Resolución:

Sean los dos números: x é y.

Del enunciado, planteamos las ecuaciones: $x + y = 30$ ...(I)

$x^2 - y^2 = 120$ ...(II)

De la ecuación (I). despejamos "y":

$$x + y = 30 \quad \Rightarrow \quad y = (30 - x) \quad ...(III)$$

Reemplazamos la expresion (III) en (II):

$$x^2 - (30 - x)^2 = 120$$

$$x^2 - (30^2 - 2 \cdot 30 \cdot x + x^2) = 120 \quad \Rightarrow \quad x^2 - (900 - 60x + x^2) = 120$$

$$\cancel{x^2} - 900 + 60x - \cancel{x^2} = 120 \quad \Rightarrow \quad 60x = 120 + 900$$

$$60x = 1\,020 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1\,020}{60} = 17 \quad \Rightarrow \quad \therefore \boxed{x = 17}$$

Reemplazamos el valor de x = 17 en la expresión (III):

$$y = (30 - x) \quad \Rightarrow \quad y = 30 - 17 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 13}$$

$\therefore$ Los números pedidos son: $x = 17$; $y = 13$ ***Rpta***

Problema (6): Hallar dos números cuya suma sea 10 y la de sus inversos 5/12.

Resolución:

Sean los dos números: "x" e "y"; sus inversos son: $\frac{1}{x}$ é $\frac{1}{y}$

Del enunciado, planteamos las ecuaciones: $x + y = 10$ ...(1)

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{12} \quad ...(2)$$

De la ecuación (1); despejamos "y":

$$x + y = 10 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = (10 - x)} \quad ...(3)$$

Reemplazamos la ecuacion (3) en (2):

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{(10 - x)} = \frac{5}{12}$$; damos común denominador en el primer miembro.

$$\frac{(10 - x) + x}{x\,(10 - x)} = \frac{5}{12} \quad \Rightarrow \quad \frac{10}{x\,(10 - x)} = \frac{5}{12}$$

Hacemos producto de extremos y medios, obteniendo:

$$\not{10} \cdot 12 = \not{5}x\,(10 - x)$$; sacamos quinta en ambos miembros

$$2 \cdot 12 = x\,(10 - x)$$

$$24 = 10x - x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 10x + 24 = 0$$

$$\begin{array}{lll} x & -6 & \rightarrow -6x \\ x & -4 & \rightarrow -4x \\ \hline & & -10x \end{array} \quad + \quad ...\textit{(Cumple)}$$

Luego: $(x - 6)\,(x - 4) = 0$

De donde: i) $x - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 6}$

ii) $x - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 4}$

- Como se observará "x" toma dos valores positivos x = 6 y x = 4 la cual podemos tomar cualquiera de los dos; tomemos x = 6.

  Luego, reemplazamos el valor de x = 6, en la expresión (3):

  $$y = (10 - x) \quad \Rightarrow \quad y = 10 - 6 \Rightarrow \quad \boxed{y = 4}$$

∴ **Los números pedidos son: x = 6 ; y = 4** ***Rpta.***

Observación: *Cuando "x" toma dos valores positivos, sólo se tomará un solo valor de "x", el otro valor ya no es necesario tomarlo.*

Problema (7): Dos números están en la relación de 2 a 5. Si la suma de sus cuadrados es 261. ¿Cuáles son esos números?

Resolución:

Sean los dos números; x é y.

Del enunciado, planteamos las ecuaciones:

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{5} \quad \ldots(I)$$

$$x^2 + y^2 = 261 \quad \ldots(II)$$

De la ecuación (I), despejamos "y":

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{5} \Rightarrow 5x = 2y \Rightarrow \frac{5x}{2} = y \quad \ldots(III)$$

Reemplazamos la ecuación (III) en (II):

$$x^2 + \left(\frac{5x}{2}\right)^2 = 261 \Rightarrow x^2 + \frac{25}{4}x^2 = 261$$

$$4x^2 + 25x^2 = 261 \cdot 4$$

$$29x^2 = 261 \cdot 4 \Rightarrow x^2 = \frac{\cancel{261} \cdot 4}{\cancel{29}}$$

$$x^2 = 9 \cdot 4 = 36$$

$$x = \pm\sqrt{36}$$

$$\therefore \quad x = \pm 6$$

De donde: $x = 6$

$x = -6$

Si: $x^2 = a$

Entonces: $x = \pm\sqrt{a}$

De donde:

$x = +\sqrt{a}$

$x = -\sqrt{a}$

(Soluciones o raíces de la ecuación: $x^2 = a$)

- De los dos valores que toma "x"; $x = 6$ y $x = -6$, sólo tomaremos el valor positivo; o sea: $x = 6$

  Luego, reemplazamos el valor de $x = 6$; en la expresión (III):

$$\frac{5x}{2} = y \Rightarrow \frac{5\ (6)}{2} = y \Rightarrow 15 = y$$

$\therefore$ Los números pedidos son: $x = 6$; $y = 15$. ***Rpta.***

Problema (8): Hallar un número que disminuido en su raíz cuadrada dé 20

Resolución:

Sea: x = número pedido

Del enunciado, planteamos la ecuación: $x-\sqrt{x}=20 \Rightarrow x-20=\sqrt{x}$

Elevamos ambos miembros al cuadrado:

$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ → ***Binomio Diferencia al Cuadrado.***

$$(x-20)^2=\left(\sqrt{x}\right)^2 \Rightarrow (x-20)^2=x$$

$$x^2-2(x)(20)+(20)^2=x$$

$$x^2-40x+400=x$$

$$x^2-40x+400-x=0$$

$$x^2-41x+400=0$$

400	2
200	2
100	2
50	2
25	5
5	5
1	

(2·2·2·2 = 16; 5·5 = 25)

x ⟶ -25 ⟶ -25x
x ⟶ -16 ⟶ -16x
+ : -41x

$$(x - 25)(x - 16) = 0$$

De donde: i) $x - 25 = 0 \Rightarrow x = 25$

ii) $x - 16 = 0 \Rightarrow x = 16$

- De los dos valores que toma "x" sólo tomaremos $x = 25$ y no $x = 16$; pues cuando $x = 16$; no satisface la ecuación: $x - \sqrt{x} = 20$, veamos:

$$x-\sqrt{x}=20 \Rightarrow 16-\sqrt{16}=20 \Rightarrow 16-4\neq 20$$

∴ El número pedido es igual a 25. ***Rpta.***

Problema (9): Si al denominador de una fracción cuyo numerador es 12, se le agrega 3 unidades, la fracción queda disminuida en 2 unidades. ¿Cuál es ese quebrado?

Resolución:

Sea: $\frac{x}{y}$ = fracción inicial; donde el numerador: $x = 12$.

Luego: $\frac{12}{y}$ = fracción inicial

- Nueva fracción, cuando al denominador se le agrega 3 unidades:

$$\frac{12}{y+3} = \text{Nueva fracción}$$

Del enunciado, obtenemos que: Fracción inicial - Nueva fracción = 2

$$\frac{12}{y} - \frac{12}{y+3} = 2$$; damos común denominador en el primer miembro

$$\frac{12(y+3) - 12y}{y(y+3)} = 2 \Rightarrow \frac{\cancel{12y} + 36 - \cancel{12y}}{y(y+3)} = 2 \Rightarrow \frac{36}{y(y+3)} = 2$$

Sacamos mitad a ambos miembros:

$$36 = 2y(y+3) \Rightarrow 18 = y(y+3)$$

$$18 = y^2 + 3y$$

$$0 = y^2 + 3y - 18$$

$$\begin{array}{lll} y & +6 & \rightarrow +6y \\ y & -3 & \rightarrow -3y \\ & & \overline{+3y} \end{array}$$

+3y ***...(Cumple)***

Luego: $(y+6)(y-3) = 0$

De donde: i) $y + 6 = 0 \Rightarrow y = -6$

ii) $y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3$

• De los dos valores que toma "y" sólo tomaremos el valor positivo o sea: $y = 3$.

$\therefore$ El quebrado es igual a: $\frac{12}{y} = \frac{12}{3}$ ***Rpta.***

Problema (10) : Una persona compró cierto número de libros por 180 soles. Si hubiera comprado 6 libros menos por el mismo precio cada libro le habría costado 1 sol más. ¿Cuántos libros compró y cuánto le costó cada uno?

Resolución:

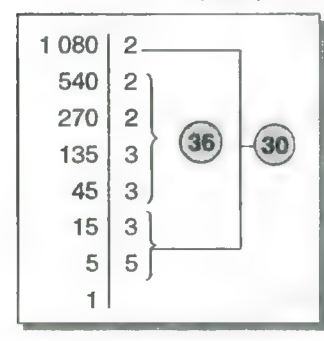
Sea: "x" el número de libros

- Si los "x" libros cuestan 180 soles $\Rightarrow$ cada libro costará: $\dfrac{180}{x}$
- Si el número de libros es: (x - 6) $\Rightarrow$ cada libro costará: $\dfrac{180}{(x-6)}$

El precio en el segundo caso es 1 sol más, luego:

$\dfrac{180}{(x-6)} - \dfrac{180}{x} = 1$; damos común denominador en el primer miembro:

$$\frac{180x - 180\ (x-6)}{x\ (x-6)} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{180x - 180x + 1\ 080}{x\ (x-6)} = 1$$



$$1\ 080 = 1x\ (x-6)$$

$$1\ 080 = x^2 - 6x$$

$$0 = x^2 - 6x - 1\ 080$$

x -36 → -36x
x +30 → +30x
-6x

Luego: $(x - 36)(x + 30) = 0$

De donde: i) $x - 36 = 0 \Rightarrow x = 36$

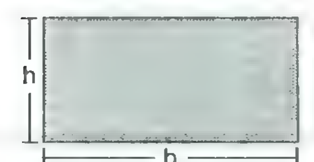
ii) $x + 30 = 0 \Rightarrow x = -30$

- De los dos valores que toma "x" sólo tomaremos el valor positivo o sea: x = 36 y no el negativo x = -30; pues el número de libros no puede ser negativo.

$\therefore$ El número de libros que compró es 36 y cada libro le costó $\dfrac{S/.180}{x} = \dfrac{S/.180}{36} = S/.5$ ***Rpta.***

Problema (11): El perímetro de un rectángulo es de 30 centímetros, y su área es de 54 centímetros cuadrados. Determinar sus dimensiones.

Resolución:



Sabemos que:

$\underbrace{\text{Perímetro } \square}_{30} = \text{Suma de sus 4 lados}$

$30 = 2b + 2h$

Sacamos mitad a cada término, quedando:

$\boxed{15 = b + h}$ ...(I)

Además sabemos que: $\underbrace{\text{área } \square}_{54} = \text{base x altura}$

$\boxed{54 = b \times h}$ ...(II)

De la ecuación (I), despejamos "h": $15 = b + h \Rightarrow \boxed{15 - b = h}$ ...(III)

Reemplazamos la expresión (III) en (II); obteniendo:

$54 = b(15 - b) \Rightarrow 54 = 15b - b^2$

$b^2 - 15b + 54 = 0$

$$\begin{array}{lll} b & -9 & \rightarrow -9b \\ b & -6 & \rightarrow -6b \\ & & \overline{-15b} \end{array}$$

...*(Cumple)*

Luego: $(b - 9)(b - 6) = 0$

De donde: i) $b - 9 = 0 \Rightarrow \boxed{b = 9}$

ii) $b - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{b = 6}$

- Como se observará "b" toma dos valores 9 y 6 de acuerdo a la figura tomamos b = 9; pues la base es mayor que la altura.

  Luego, reemplazamos el valor de "b = 9" en la expresión (III):

  $15 - b = h \Rightarrow 15 - 9 = h \Rightarrow \boxed{6 = h}$

∴ Las dimensiones del rectángulo son: base 9 cm y altura 6 cm. ***Rpta.***

Problema (12) : Hallar un número entero positivo tal que, al sumarlo con su recíproco dé 37/6.

Resolución:

Sea: x = Número entero positivo ; 1/x = Recíproco del número "x"

Del enunciado, planteamos la ecuación:

$$x + \frac{1}{x} = \frac{37}{6}$$; damos común denominador en el primer miembro, obteniendo:

$$\frac{x^2+1}{x} = \frac{37}{6}$$

$$6(x^2+1) = 37x \Rightarrow 6x^2 + 6 = 37x$$

$$6x^2 - 37x + 6 = 0$$

$$\begin{array}{lll} 6x & -1 & \rightarrow -1x \\ x & -6 & \rightarrow -36x \\ & & \overline{-37x} \end{array}$$ ...*(Cumple)*

Luego: $(6x - 1)(x - 6) = 0$

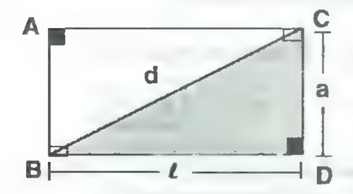
De donde: i) $6x - 1 = 0 \Rightarrow 6x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{6}$ (Número fraccionario)

ii) $x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$ (Número entero positivo)

∴ El número entero positivo es igual a 6. ***Rpta.***

Problema (13) : La diagonal de un rectángulo es 9 centímetros mayor que su ancho y 8 centímetros mayor que su largo. Determinar las dimensiones del rectángulo.

Resolución:



Del enunciado obtenemos:

*) $d - a = 9 \Rightarrow d - 9 = a$ ...(I)

**) $d - \ell = 8 \Rightarrow d - 8 = \ell$ ...(II)

En el ⊿ BDC: Aplicamos el Teorema de Pitágoras:

$$d^2 = a^2 + \ell^2 \qquad ...(III)$$

Reemplazamos las ecuaciones (I) y (II) en (III):

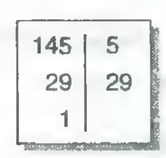
$$d^2 = (d-9)^2 + (d-8)^2$$

$$d^2 = (d^2 - 2d \cdot 9 + 9^2) + (d^2 - 2d \cdot 8 + 8^2)$$

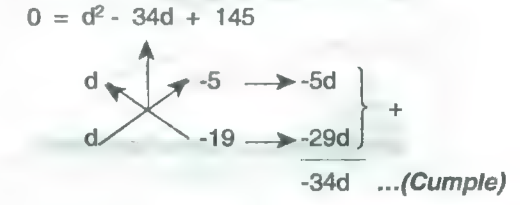
$$d^2 = d^2 - 18d + 81 + d^2 - 16d + 64$$

$$d^2 = 2d^2 - 34d + 145 \Rightarrow 0 = 2d^2 - 34d + 145 - d^2$$

$$0 = d^2 - 34d + 145$$



145	5
29	29
1	



Luego: $(d-5)(d-29) = 0$

De donde: i) $d - 5 = 0 \Rightarrow d = 5$

ii) $d - 29 = 0 \Rightarrow d = 29$

- Como se observará "d" toma dos valores 5 y 29; sólo tomaremos el valor de d = 29 y no d = 5; pues si reemplazamos el valor de d = 5, en (I) y (III), resulta que "a" y "ℓ" son negativos y esto no puede ser; ya que las dimensiones del rectángulo siempre serán positivos.

  Luego, reemplazamos el valor de d = 29; en las ecuaciones (I) y (II):

  *) $d - 9 = a \Rightarrow 29 - 9 = a \Rightarrow 20 = a$

  **) $d - 8 = \ell \Rightarrow 29 - 8 = \ell \Rightarrow 21 = \ell$

∴ Las dimensiones del rectángulo son: largo (ℓ) = 21 cm; ancho (a) = 20 cm. ***Rpta.***

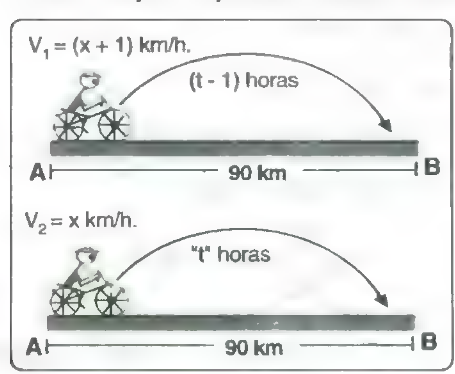
Problema (14) : Dos ciclistas parten en el mismo instante para un punto distante 90 kilómetros. El primero, que corre en cada hora un kilómetro más que

el segundo, llega al final del viaje una hora antes que el otro. ¿Cuál es la velocidad de cada uno de los ciclistas?

Resolución:

Sea: x = La velocidad del segundo ciclista
$x + 1$ = Velocidad del primer ciclista

Para su mejor comprensión construimos el siguiente gráfico:



Sabemos que:

Espacio = (Velocidad) (Tiempo)

$$90 = (x + 1)(t - 1) \quad ...(1)$$

Espacio = (Velocidad) (Tiempo)

$$90 = x\ t$$

$$\frac{90}{x} = t \quad ...(2)$$

Reemplazamos la ecuación (2) en (1):

$$90 = (x+1)\left(\frac{90}{x} - 1\right) \Rightarrow 90 = (x+1)\left(\frac{90-x}{x}\right)$$

$$90x = 90x - x^2 + 90 - x$$

$$90x - 90x + x^2 - 90 + x = 0$$

$$x^2 + x - 90 = 0$$

$$\begin{array}{lll} x & -9 & \rightarrow -9x \\ x & +10 & \rightarrow +10x \\ \hline & & +x \end{array}$$

+x ***...(Cumple)***

Luego: $(x - 9)(x + 10) = 0$

De donde: i) $x - 9 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 9}$

ii) $x + 10 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -10}$

- De los valores que toma "x", sólo tomaremos el positivo, pues la velocidad no puede ser negativa.

∴ Las velocidades de los ciclistas son:
$V_1 = (x + 1)$ km/h = $(9 + 1)$ km/h = 10 km/h y
$V_2 = x$ km/h = 9 km/h **_Rpta._**

Problema (15) : ¿En qué tiempo llenarían A, B y C un depósito, si "A" sólo puede hacerlo en 6 horas más; "B" sólo en 1 hora más y "C" en el doble del tiempo?

Resolución:

Sea: "t" = Tiempo que demoran A, B y C en llenar un depósito.

- En 1 hora los tres A, B y C llenarían: 1/t del depósito.

  *) "A" sólo puede hacerlo en 6 horas más osea: (t + 6) horas.

- En 1 hora "A" sólo llenará: $\dfrac{1}{(t+6)}$ del depósito.

  **) "B" sólo puede hacerlo en 1 hora más osea: (t + 1) horas.

- En 1 hora "B" sólo llenará: $\dfrac{1}{(t+1)}$ del depósito.

  ***) "C" sólo puede hacerlo en el doble del tiempo osea: "2t" horas.

- En 1 hora "C" sólo llenará: $\dfrac{1}{2t}$ del depósito.

Luego:
$$\frac{1}{(t+6)}+\frac{1}{(t+1)}+\frac{1}{2t} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{1}{(t+6)}+\frac{1}{(t+1)} = \frac{1}{t}-\frac{1}{2t}$$

$$\frac{(t+1)+(t+6)}{(t+6)(t+1)} = \frac{2-1}{2t} \Rightarrow \frac{2t+7}{(t+6)\ (t+1)} = \frac{1}{2t}$$

Hacemos producto de extremos y medios: $2t\ (2t+7) = (t+6)\ (t+1)$

$$4t^2+14t = t^2+t+6t+6$$

$$3t^2 + 7t - 6 = 0$$

$$\begin{array}{lcl} 3t & & -2 \rightarrow -2t \\ t & & +3 \rightarrow +9t \end{array}$$

+7t ...(*Cumple*)

Luego: $(3t - 2)(t + 3) = 0$

De donde: i) $3t - 2 = 0 \Rightarrow 3t = 2 \Rightarrow \boxed{t = \frac{2}{3}}$

ii) $t + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{t = -3}$

- De los dos valores que toma "x" sólo tomaremos el valor positivo osea: $t = 2/3$, pues el valor negativo no se toma ya que el tiempo nunca puede ser negativo.

∴ El tiempo en que llenarían A, B y C un depósito es de $t = 2/3$ de hora que convertidos a minutos equivale a: $\frac{2}{3}$ hora $= \frac{2}{3} \times 60$ min. $= 40$ min. ***Rpta.***

Problema (16) : ¿Qué edad tengo si hace 14 años era la raíz cuadrada de la edad que tendré dentro de 16 años?

Resolución:

Sea: Mi edad actual = x

Mi edad hace 14 años = (x - 14)

Edad que tendré dentro de 16 años = (x + 16)

Del enunciado, planteamos la ecuación:

$$(x - 14) = \sqrt{x + 16}$$; elevamos el cuadrado ambos miembros:

$$(x-14)^2 = \left(\sqrt{x+16}\right)^2 \Rightarrow x^2 - 2x \cdot 14 + (14)^2 = x + 16$$

$$x^2 - 28x + 196 = x + 16$$

$$x^2 - 28x + 196 - x - 16 = 0$$

$$x^2 - 29x + 180 = 0$$

$$\begin{array}{lll} x & -20 \rightarrow & -20x \\ x & -9 \rightarrow & -9x \\ \hline & & -29x \end{array}$$

...(Cumple)

Luego: $(x - 20)(x - 9) = 0$

De donde: i) $x - 20 = 0 \Rightarrow x = 20$

ii) $x - 9 = 0 \Rightarrow x = 9$

- De los valores que toma "x" sólo tomaremos $x = 20$; ya que al reemplazar $x = 9$; en la ecuación: $(x - 14) = \sqrt{x+16}$, no satisface dicha ecuación; veamos: $9 - 14 = \sqrt{9+16}$

$-5 \neq 5$ (Falso)

$\therefore$ La edad que tengo es de 20 años. ***Rpta.***

Problema (17) : En una división el dividendo es 438, el divisor es el triple que el cociente y el residuo es la mitad del cociente. Hallar el cociente.

Resolución:

Sea la división:

Dividendo	divisor
Residuo	Cociente

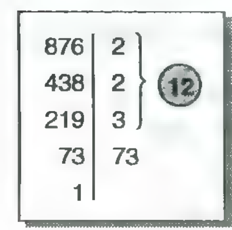
$D = 438$	$d = 3x$
$r = \dfrac{x}{2}$	$q = x$

Por propiedad en la división inexacta: $D = d \cdot q + r$

Luego: $438 = 3x \cdot x + \dfrac{x}{2} \Rightarrow 438 = 3x^2 + \dfrac{x}{2}$

$$876 = 6x^2 + x$$

$$0 = 6x^2 + x - 876$$



876	2
438	2
219	3
73	73
1	

(12)

$$\begin{array}{lll} 6x & +73 \rightarrow & +73x \\ x & -12 \rightarrow & -72x \\ \hline & & +x \end{array}$$

...(Cumple)

Luego: $(6x + 73)(x - 12) = 0$

De donde: i) $6x + 73 = 0 \Rightarrow x = \frac{-73}{6}$ ii) $x - 12 = 0 \Rightarrow x = 12$

- De los dos valores que toma "x", sólo tomaremos el valor positivo osea $x = 12$.

∴ El valor del cociente es igual a 12. ***Rpta.***

TALLER DE EJERCICIOS Nº 46

I. Resolver las siguientes ecuaciones incompletas de segundo grado:

a) $x^2 - 81 = 0$	b) $x^2 - 13 = 12$
c) $3x^2 - 4 = 28 + x^2$	d) $x^2 - 121 = 0$
e) $3(x^2 - 11) + 2(x^2 - 7) = 38$	f) $5(x^2 - 7) = 3(4 + x^2) + 5$
g) $2x^2 + 8 = 0$	h) $3x^2 + 75 = 0$
i) $4x^2 + 20 = 4$	j) $4x^2 - 3x = 0$
k) $2x^2 - 10x = 0$	l) $\frac{5x^2}{3} - \frac{4x}{3} + \frac{x}{3} = 0$

II Halla, por factorización, el conjunto solución de:

a) $x^2 + 11x + 24 = 0$	b) $x^2 + 19x + 84 = 0$
c) $2x^2 + 13x + 6 = 0$	d) $4x^2 - 42x = 7x - 12$
e) $x(x - 3) = 2(x + 7)$	f) $2x(x + 3) = 7(x + 4)$
g) $3x^2 + 6x = 32 + 2x$	h) $6 + 5x^2 = 15x - 4x^2$
i) $x^2 - 21x + 90 = 0$	j) $x^2 + 28x = 4x^2 + 9$
k) $\frac{24 - x}{x - 8} = \frac{24}{x - 4}$	l) $(x + 5)(x - 2) = 4(2x - 1)$
m) $2x^2 - 11x - 21 = 0$	n) $38x + 13 - 3x^2 = 0$
ñ) $6x - x^2 + 27 = 0$	o) $x^2 + 144 = 25x$
p) $\frac{x + 3}{x + 2} = \frac{5x}{x + 6}$	q) $\frac{3}{10} + \frac{1}{x + 3} = \frac{1}{x}$

III. Halla, aplicando la fórmula general, el conjunto solución de:

a) $x^2 - 10x + 1 = 0$	b) $x^2 - 6x + 1 = 0$
c) $5x^2 - 8x + 2 = 0$	d) $3x^2 - 6x + 5 = 0$
e) $5x^2 + 14x - 6 = 0$	f) $3x^2 - 10x + 6 = 0$
g) $2x^2 - 12x + 4 = 0$	h) $7x^2 + 8x - 3 = 0$
i) $3x^2 + 4x - 6 = 0$	j) $9x^2 - 16x + 4 = 0$
k) $3x^2 - 8x + 1 = 0$	l) $\frac{2x-1}{x+1} = \frac{x+1}{x-2}$
m) $(x + 5)^2 + (x + 3) = 5$	n) $(2x + 5)^2 - (x + 3)^2 = 2$
ñ) $4x - x^2 - 8 = 0$	o) $(x - 3)^2 + (x - 1)^2 = 0$

IV. Completa la siguiente tabla, sabiendo que la ecuación que se den a continuación son de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$

Ecuaciones Cuadráticas	a	b	c	$b^2 - 4ac$	Naturaleza de sus raíces
$x^2 - x + 1 = 0$					
$x^2 - 5x + 6 = 0$					
$3x^2 - 2x + 1 = 0$					
$4x^2 - 12x + 9 = 0$					
$2x^2 = 7x - 4$					
$18 - 12x = 2x^2$					
$3x^2 = -x - 4$					

V. Hallar la suma y el producto de las raíces de las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $2x^2 - 3x + 4 = 0$	b) $x^2 - 3x + 6 = 0$
c) $3x^2 - 3x + 2 = 0$	d) $2x^2 - 3x + 9 = 0$
e) $5x^2 + x - 2 = 0$	f) $2x^2 - 5x + 9 = 0$
g) $-x^2 + 2x - 3 = 0$	h) $4x^2 - 6x + 7 = 0$
i) $\frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{5}x + \sqrt{2} = 0$	j) $6x^2 - x + 9 = 0$

VI. Formar las ecuaciones de segundo grado cuyas raíces se dan a continuación:

a) $x_1 = 5; x_2 = -3$	b) $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{3}{2}$
c) $x_1 = 3; x_2 = 1$	d) $x_1 = \frac{2}{3}$; $x_2 = 5$
e) $x_1 = -\frac{4}{3}$; $x_2 = \frac{1}{3}$	f) $x_1 = m$; $x_2 = \frac{1}{m}$
g) $x_1 = 3+\sqrt{2}$; $x_2 = 3-\sqrt{2}$	h) $x_1 = 2+i$; $x_2 = 2-i$
i) $x_1 = a + b; x_2 = a - b$	i) $x_1 = 6$; $x_2 = -10$

VII. Hallar dos números conociendo su suma (S) y su producto (p), dados a continuación:

a) $S = 16; p = 8$	b) $S = 14; p = 36$
c) $S = 16; p = 42$	d) $S = 10; p = -16$
e) $S = 8; p = 24$	f) $S = -4; p = -18$
g) $S = 12; p = 30$	h) $S = \frac{3}{2}$; $p = \frac{1}{2}$
i) $S = \frac{5}{3}$; $p = -\frac{2}{3}$	j) $S = 20$; $p = 4$

VIII. Resuelva, completando el cuadrado, las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 12x + 20 = 0$	b) $3x^2 + 14x - 5 = 0$
c) $2x^2 - 2x - 1 = 0$	d) $5x^2 - 2x - 3 = 0$
e) $4x^2 = 28x - 49$	f) $x^2 - 10x + 12 = 0$
g) $3x^2 + 5x - 2 = 0$	h) $x^2 - 14x - 49 = 0$
i) $2x^2 - 6x + 3 = 0$	j) $4x^2 - x = 3$
k) $-3x^2 + 2x + 3 = 0$	l) $3x^2 - x - 5 = 0$
m) $5x^2 - 2x - 16 = 0$	n) $9x^2 = 6x - 1$
ñ) $3x^2 + x - 1 = 0$	o) $5x^2 = 13x + 6$

IX. Halla el conjunto solución; de las siguientes ecuaciones, aplicando el procedimiento que prefieras:

a) $\frac{2}{x+2} = \frac{x-4}{8}$	b) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x}{2} = x+2$
c) $\frac{2x+5}{2x-2} - \frac{3-x}{x} = \frac{7}{3}$	d) $\frac{4}{x} + \frac{x}{2} = \frac{12}{x}$
e) $\frac{x}{x-1} - \frac{3}{2} = \frac{x-1}{x}$	f) $\frac{x-1}{2x-1} = 1 - \frac{2x-1}{x}$
g) $\frac{3}{x+8} - 2 = \frac{4}{x-2}$	h) $\frac{2x-2}{5} = 1 - \frac{x-6}{x-4}$
i) $\frac{9}{2\ (x-2)} = \frac{5}{x} + \frac{7}{2\ (x+2)}$	j) $\frac{3x-2}{x} + \frac{1}{x^2} = 2$

X. Halla el conjunto solución de cada ecuación:

a) $x^2 = 144$	b) $(x - 3)^2 = 64$
c) $(x + 5)^2 = 196$	d) $(2x + 3)^2 = 289$
e) $(3x - 1)^2 = 2$	f) $(4x + 5)^2 = 441$
g) $\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2 = 49$	h) $\left(\frac{x}{3} + 2\right)^2 = 36$
i) $(5x - 4)^2 = 1\ 296$	j) $(3x - 2)^2 = 1\ 849$

XI. Resuelve los siguientes problemas:

Problema (1): La suma de dos números es 35 y su producto es igual a 294. Hallar los números.

Problema (2): Hallar dos números enteros positivos, cuyo producto sea 700 y cuya diferencia sea 15.

Problema (3): Si a un número se le suma su cuadrado, el resultado es 42. Determinar el número.

Problema (4): Obtener dos número enteros consecutivos tales que su producto sea 182.

Problema (5): La suma de un número y cuatro veces su recíproco es 20/3. Determinar el número.

Problema (6): Un número excede a su cuadrado en 2/9. ¿Cuál es el número?

Problema (7): Obtener dos números enteros pares consecutivos cuyos cuadrados sumen 452.

Problema (8): Un número es la mitad de un segundo número, más 3; y la diferencia de sus cuadrados es 495. Hallense los números.

Problema (9): ¿Cuáles son las dimensiones de un rectángulo que tenga un perímetro de 40 centimetros y un área de 96 centímetros cuadrados?

Problema (10): Un rectángulo es 3 unidades más, largo que ancho, y su área es de 180 unidades cuadrados. ¿Cuáles son sus dimensiones?

Problema (11): El largo de un rectángulo excede al duplo de su ancho en 3 centímetros. Hallense las dimensiones del rectángulo, si su área es de 65 centímetros cuadrados.

Problema (12): De dos números, uno es 4 unidades más que el otro. Si la suma de sus recíprocos es 3/8. ¿Cuáles son los números?

Problema (13): La diagonal de un rectángulo mide 30 centímetros, y la medida del largo es justamente 6 centímetros mayor que la medida del ancho. Hallar el perímetro del rectángulo.

Problema (14): El denominador de una fracción es 5 más que su numerador. Si se suma 3 al numerador y al denominador, la fracción resultante es 5/36 más que la fracción original. Obténgase la fracción original.

Problema (15): El numerador de una fracción es 2 menos que su denominador. Si se aumentan en 3 el numerador y el denominador, la nueva fracción excederá a la fracción original en 1/3. Determinar la fracción original.

Problema (16): Una formación escolar está compuesta por 104 alumnos, dispuestos en filas. El número de alumnos de cada fila es cinco más que el número de filas que hay. ¿Cuántas filas hay?

Problema (17): Una persona compra cierto número de lápices por 360 soles, si cada lápiz le hubiera costado 2 soles menos, hubiera comprado seis más. ¿Cuánto le costó cada lápiz?

Problema (18): Varios amigos alquilaron un microbús en 400 soles para una excursión, a pagar por partes iguales, pero faltaron 2 de ellos y tuvo que pagar 10 soles más cada uno de los que asistieron. ¿Cuántos hicieron la excursión?

Problema (19): Dos números están en la relación de 7 a 5. Si la diferencia de sus cuadrados es 216. ¿Cuáles son esos números?

Problema (20): La suma de dos números es 14 y su producto es igual a 3 veces su diferencia, aumentada en 9. ¿Cuáles son esos números?

Problema (21): Un tubo "A" demora 8 minutos más que un tubo "B" en llenar un estanque, y los dos juntos demoran 3 minutos. ¿Qué tiempo demorará cada tubo separadamente?

Problema (22): Mi hija es 22 años menor que yo, dice un Padre, y el producto de nuestras edades excede en 662 a la suma de las mismas. ¿Qué edad tiene mi hija?

Problema (23): Hallar un número que sumado con su raíz cuadrada de 90.

Problema (24): Dos llaves llenan juntas un estanque en 2 6/7 minutos, y la primera sólo demora 6 minutos menos que la segunda. ¿Qué tiempo demora cada una?

Problema (25): Un conductor de automóvil pudo haber efectuado un viaje de 225 km. en media hora menos, si hubiera viajado 5 km. por hora más rapidamente. ¿Con qué velocidad viajó?

RESPUESTAS TALLER 46

	a) C.S. = {-9, 9}	**b)** C.S. = {-5; 5}	**c)** C.S. = {-4; 4}
	d) C.S. = {-11; 11}	**e)** C.S. = $\{-\sqrt{17}\ ;\ \sqrt{17}\}$	**f)** C.S. = $\{-\sqrt{26}\ ;\ \sqrt{26}\}$
	g) C.S. = {-2i; 2i}	**h)** C.S. = {-5i; 5i}	**i)** C.S. = {-2i; 2i}
	j) C.S. = $\left\{0\ ;\ \frac{3}{4}\right\}$	**K)** C.S. = {0; 5}	**l)** C.S. = $\left\{0\ ;\ \frac{3}{5}\right\}$
	a) C.S. = {-8; -3}	**b)** C.S. = {-12; -7}	**c)** C.S. = $\left\{-6\ ;-\frac{1}{2}\right\}$

d) C.S. = $\left\{\frac{1}{4}\ ;\ 12\right\}$	e) C.S. = {-2; 7}	f) C.S. = $\left\{\frac{-7}{2}\ ;\ 4\right\}$
g) C.S. = $\left\{-4\ ;\ \frac{8}{3}\right\}$	h) C.S. = $\left\{\frac{-1}{3}\ ;\ 2\right\}$	i) C.S. = {6; 15}
j) C.S. = $\left\{\frac{1}{3}\ ;\ 9\right\}$	k) C.S. = {-8; 12}	l) C.S. = {-1; 6}
m) C.S. = $\left\{\frac{-3}{2}\ ;\ 7\right\}$	n) C.S. = $\left\{\frac{-1}{3}\ ;\ 13\right\}$	ñ) C. S. = {-3; 9}
o) C.S. = {9; 16}	p) C.S. = $\left\{\frac{-9}{4}\ ;\ 2\right\}$	q) C.S. = {-5; 2}

III.

a) C.S = $\left\{5-2\sqrt{6}\ ;\ 5+2\sqrt{6}\right\}$	b) C.S. = $\left\{3-2\sqrt{2}\ ;\ 3+2\sqrt{2}\right\}$
c) C.S = $\left\{\frac{4-\sqrt{6}}{5}\ ;\ \frac{4+\sqrt{6}}{5}\right\}$	d) C.S. = $\left\{\frac{3-\sqrt{6}i}{3}\ ;\ \frac{3+\sqrt{6}i}{3}\right\}$
e) C.S. = $\left\{\frac{-7-\sqrt{79}}{5}\ ;\ \frac{-7+\sqrt{79}}{5}\right\}$	f) C.S. = $\left\{\frac{5-\sqrt{7}}{3}\ ;\ \frac{5+\sqrt{7}}{3}\right\}$
g) C.S. = $\left\{3-\sqrt{7}\ ;\ 3+\sqrt{7}\right\}$	h) C.S. = $\left\{\frac{-4-\sqrt{37}}{7}\ ;\ \frac{-4+\sqrt{37}}{7}\right\}$
i) C.S. = $\left\{\frac{-2-\sqrt{22}}{3}\ ;\ \frac{-2+\sqrt{22}}{3}\right\}$	j) C.S. = $\left\{\frac{8-2\sqrt{7}}{9}\ ;\ \frac{8+2\sqrt{7}}{9}\right\}$
k) C.S. = $\left\{\frac{4-\sqrt{13}}{3}\ ;\ \frac{4+\sqrt{13}}{3}\right\}$	l) C.S. = $\left\{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\ ;\ \frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right\}$
m) C.S. = $\left\{\frac{-11-\sqrt{29}}{2}\ ;\ \frac{-11+\sqrt{29}}{2}\right\}$	n) C.S. = $\left\{\frac{-7-\sqrt{7}}{3}\ ;\ \frac{-7+\sqrt{7}}{3}\right\}$
ñ) C.S. = $\left\{2\ (1-i)\ ;\ 2\ (1+i)\right\}$	o) C.S. = {-1 ; 5}

VIII.

a) C.S. = {2; 10}	b) C.S. = $\left\{-5\ ;\ \frac{1}{3}\right\}$

c) C.S. = $\left\{\frac{1-\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right\}$

d) C.S. = $\left\{\frac{-3}{5}\ ;\ 1\right\}$

e) C.S. = $\left\{\frac{7}{2}\right\}$

f) C.S. = $\left\{5-\sqrt{13}\ ;\ 5+\sqrt{13}\right\}$

g) C.S. = $\left\{-2\ ;\ \frac{1}{3}\right\}$

h) C.S. = $\left\{7-7\sqrt{2}\ ;\ 7+7\sqrt{2}\right\}$

i) C.S. = $\left\{\frac{3-\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{3+\sqrt{3}}{2}\right\}$

j) C.S. = $\left\{\frac{-3}{4}\ ;\ 1\right\}$

k) C.S. = $\left\{\frac{1-\sqrt{10}}{3}\ ;\ \frac{1+\sqrt{10}}{3}\right\}$

l) C.S. = $\left\{\frac{1-\sqrt{61}}{6}\ ;\ \frac{1+\sqrt{61}}{6}\right\}$

m) C.S. = $\left\{\frac{-8}{5}\ ;\ 2\right\}$

n) C.S. = $\left\{\frac{1}{3}\right\}$

ñ) C.S. = $\left\{\frac{-1-\sqrt{13}}{6}\ ;\ \frac{-1+\sqrt{13}}{6}\right\}$

o) C.S. = $\left\{-\frac{2}{5}\ ;\ 3\right\}$

XI.

1) 14 y 21
2) 35 y 20
3) 6
4) 13 y 14
5) $\frac{2}{3}$ ó 6
6) $\frac{2}{3}$ ó $\frac{1}{3}$
7) 14 y 16
8) 28 y 17
9) 12 y 8
10) 12 y 15
11) 13 y 5
12) 4 y 8
13) 84 cm.
14) $\frac{4}{9}$
15) $\frac{1}{3}$
16) 8
17) 12 soles
18) 8
19) 21 y 15
20) 11 y 3
21) 12 y 4 min.
22) 18 años
23) 81
24) 4 y 10 min.
25) 45 km/h

EJERCICIOS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA

Organizados por las Academias:
César Vallejo, Trilce, Pitágoras, Sigma, Alfa.

1. Si: "a" y "b" son las raíces de: $x^2 - 2x - 15 = 0$. Hallar: $(a + b)(a^2 + b^2)$

A) 47 B) 9 C) 52 D) 26 E) 68

Resolución:

- De la ecuación: $x^2 - 2x - 15 = 0$; factorizamos, aplicando el Método del Aspa.

$$\begin{matrix} x & & -5 \\ x & & +3 \end{matrix}$$

Donde: $(x - 5)\ (x + 3) = 0$; igualamos cada factor a cero.

i) $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow \boxed{a = 5}$

ii) $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow \boxed{b = -3}$

Luego: $(a + b)(a^2 + b^2) = [(5) + (-3)]\,[(5)^2 + (-3)^2]$

$$= (2)(34) = \boxed{68}$$ **Rpta. E**

2. Si: x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación: $2x^2 + mx + 30 = 0$. ¿Para qué valor de "m" la relación de las raíces es: $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{3}{5}$

A) 8 B) 10 C) 15 D) 16 E) 20

Resolución:

- De la ecuación: $2x^2 + mx + 30 = 0$

i) $x_1 + x_2 = \dfrac{-m}{2}$

ii) $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{30}{2} = 15$

Recuerda que:

Dada la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- $\boxed{x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}}$
- $\boxed{x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}}$

• **De la condición:** $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \boxed{x_1 = \dfrac{3}{5}x_2}$ ...(I)

Reemplazamos (I) en (ii):

$$\frac{3}{5}x_2 \cdot x_2 = 15 \Rightarrow (x_2)^2 = 25 \Rightarrow x_2 = \pm 5 \begin{cases} x_2 = 5 \\ x_2 = -5 \end{cases}$$

Reemplazamos (I) en (i):

$$\frac{3}{5}x_2 + x_2 = -\frac{m}{2} \Rightarrow \frac{8}{5}x_2 = -\frac{m}{2} \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{-5m}{16}}$$

Reemplazamos el valor de $x_2 = -5$; en está última expresión; obteniendo:

$$-5 = \frac{-5m}{16} \Rightarrow \therefore \boxed{16 = m}$$ **Rpta. D**

3. Encontrar el valor que puede tomar "**p**" para que en la ecuación: $3x^2 + (p + 11)x + 24 = 0$

Su conjunto solución sea: $\{r ; 2r\}$ donde: $r > 0$

A) -30 **B)** -29 **C)** -25 **D)** -22 **E)** -20

Resolución:

• De la ecuación: $3x^2 + (p + 11)x + 24 = 0$

i) $x_1 + x_2 = \dfrac{-(p+11)}{3} \Rightarrow r + 2r = \dfrac{-(p+11)}{3} \Rightarrow \boxed{r = \dfrac{-(p+11)}{9}}$

ii) $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{\cancel{24}}{\cancel{3}} \Rightarrow r \cdot 2r = 8 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow \therefore r = \pm 2 \begin{cases} r = 2 \\ r = -2 \end{cases}$

Reemplazamos el valor de $r = 2$; en (i):

$$2 = \frac{-(p+11)}{9} \Rightarrow 18 = -p - 11 \Rightarrow \therefore \boxed{p = -29}$$ **Rpta. B**

4. Si: x' y x" son las raíces de la ecuación: $x^2 + bx + a = 0$.

Hallar: $P = a\,(b + x')^{-1} + a\,(b + x'')^{-1}$

A) 1 **B)** a **C)** b **D)** ab **E)** b/a

Resolución:

- De la expresión: $P = a\,(b+x')^{-1} + a\,(b+x'')^{-1}$; obtenemos:

$$P = \frac{a}{(b+x')} + \frac{a}{(b+x'')}$$; damos común denominador.

$$P = \frac{a\,(b+x'') + a\,(b+x')}{(b+x')\,(b+x'')} = \frac{a\,(b+x''+b+x')}{b^2 + b\,(x'+x'') + x' \cdot x''}$$

$$P = \frac{a\,(2b+x'+x'')}{b^2 + b\,(x'+x'') + x' \cdot x''} \quad \ldots(I)$$

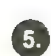
- De la ecuación: $x^2 + bx + a = 0$

i) $x'+x'' = -\dfrac{b}{1} \Rightarrow \boxed{x'+x'' = -b}$

ii) $x' \cdot x'' = \dfrac{a}{1} \Rightarrow \boxed{x' \cdot x'' = a}$

Reemplazamos (i) y (ii) en (I):

$$P = \frac{a\,[2b + (-b)]}{b^2 + b(-b) + a} = \frac{\not{a}\,(b)}{\not{a}} = b \Rightarrow \therefore \boxed{P = b}$$ **Rpta. C**



5. Resolver: $\left(2\sqrt{12} + 3\sqrt{3} + 6\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right)^{2/5} = \sqrt{3^{2x^2-2x-2}}$

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

Resolución:

La ecuación, se puede escribir de la manera siguiente:

$$\left(2\sqrt{4 \cdot 3} + 3\sqrt{3} + 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2/5} = 3^{\frac{2x^2-2x-2}{2}}$$

$$\left(4\sqrt{3}+3\sqrt{3}+\frac{6\sqrt{3}}{3}\right)^{2/5} = 3^{\frac{\not 2\,(x^2-x-1)}{\not 2}}$$

$$9\sqrt{3} = 3^2 \cdot 3^{1/2} = 3^{5/2}$$

$$\left(9\sqrt{3}\right)^{2/5} = 3^{x^2-x-1}$$

$$\left(3^{5/2}\right)^{2/5} = 3^{x^2-x-1} \Rightarrow 3^1 = 3^{x^2-x-1}$$

Por comparación de bases y exponentes:

$$1 = x^2 - x - 1 \quad \Rightarrow \quad 0 = x^2 - x - 2$$

$$\begin{matrix} x & & -2 \\ x & & +1 \end{matrix}$$

Donde: $(x - 2)(x + 1) = 0$

i) $x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$ ii) $x + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}$

∴ El conjunto solución de dicha ecuación: C.S. = {2} **Rpta. B**

6. ¿En: $x^2 + 2x + m = 0$; que valor deberá tener "m" para que represente la diferencia de las dos raíces?

A) 2 **B)** $-2+2\sqrt{2}$ **C)** $-2-2\sqrt{2}$ **D)** -2 **E)** 2 respuestas

Resolución:

- De la ecución: $x^2 + 2x + m = 0$

i) $x_1 + x_2 = -2$

ii) $x_1 \cdot x_2 = m$

➡ **Por Dato:** $\boxed{x_1 - x_2 = m}$ ...(I)

* Elevamos al cuadrado ambos miembros de la ecuación (i):

$$(x_1 + x_2)^2 = (-2)^2 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2\underbrace{x_1 \cdot x_2}_{m} = 4$$

$$\boxed{x_1^2 + x_2^2 = 4 - 2m} \quad \text{...(II)}$$

** Elevamos al cuadrado ambos miembros de la ecuación (I):

$$(x_1 - x_2)^2 = m^2 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2\underbrace{x_1 \cdot x_2}_{m} = m^2$$

$$\boxed{x_1^2 + x_2^2 = m^2 + 2m} \quad ...(III)$$

- Igualamos las ecuaciones (II) y (III):

$$m^2 + 2m = 4 - 2m \quad \Rightarrow \quad m^2 + 4m - 4 = 0$$

De esta última ecuación, obtenemos:

$$m = \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4\ (-4)}}{2\ (1)}$$

$$m = \frac{-4 \pm 4\sqrt{2}}{2} = \frac{2\ (-2 \pm 2\sqrt{2})}{2}$$

$$m = -2 \pm 2\sqrt{2} \quad \begin{cases} \boxed{m = -2 + 2\sqrt{2}} \\ \boxed{m = -2 - 2\sqrt{2}} \end{cases}$$

Recuerda que:

Dada la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Entonces:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Rpta. E

7. Si a un número se le hace $3\frac{1}{2}$ veces su valor resulta la mitad de su cuadrado, más 3. ¿Cuál es el número?

A) $\frac{7+\sqrt{37}}{2}$ **B)** 2 **C)** $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ **D)** 6 **E)** 3

Resolución:

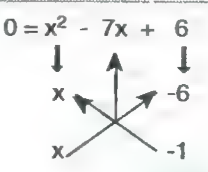
Sea el número pedido = x

- De acuerdo al enunciado, planteamos la siguiente ecuación:

$$3\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x^2 + 3 \text{ ; damos común denominador:}$$

$$\frac{7}{2}x = \frac{x^2 + 6}{2} \Rightarrow 7x = x^2 + 6 \text{ ; transponemos términos:}$$

$$0 = x^2 - 7x + 6$$



Donde: $(x - 6)(x - 1) = 0$

i) $x - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 6}$; ii) $x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

$\therefore$ **El número pedido es: 6** **Rpta. D**

8. Determinar los valores de "K" para los cuales la siguiente ecuación: $(4 - K)x^2 + 2Kx + 2 = 0$; tiene raíces iguales. Dar como respuesta uno de ellos.

A) 1 **B)** -2 **C)** 4 **D)** 3 **E)** -4

Resolución:

- De la ecuación: $(4 - K)\,x^2 + 2\,Kx + 2 = 0$

i) $x_1 + x_2 = \dfrac{-2K}{4-K} \Rightarrow \boxed{x_1 + x_2 = \dfrac{2K}{K-4}}$

ii) $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{2}{4-K}$

- Como la ecuación tiene raíces iguales: $\boxed{x_1 = x_2}$

Luego:

De (i): $x_1 + x_1 = \dfrac{2K}{K-4} \Rightarrow \cancel{2}x_1 = \dfrac{\cancel{2}K}{K-4} \Rightarrow \boxed{x_1 = \dfrac{K}{K-4}}$ ...(I)

De (ii): $x_1 \cdot x_1 = \dfrac{2}{4-K} \Rightarrow \boxed{(x_1)^2 = \dfrac{2}{4-K}}$ ...(II)

Reemplazamos (I) en (II):

Recuerda que:

$\boxed{(A - B)^2 = (B - A)^2}$

$$\left(\frac{K}{K-4}\right)^2 = \frac{2}{4-K} \Rightarrow \frac{K^2}{\cancel{(4-K)}^2} = \frac{2}{\cancel{(4-K)}}$$

$$\frac{K^2}{(4-K)} = 2 \Rightarrow K^2 = 8 - 2K$$

$$K^2 + 2K - 8 = 0$$

K → +4

K → -2

Donde: $(K+4)(K-2)=0$

i) $K+4=0 \Rightarrow K=-4$ ii) $K-2=0 \Rightarrow K=2$

$\therefore$ Uno de los valores de "K" es: -4 **Rpta. E**

9. Si: "r" y "s" son raíces de la ecuación: $\dfrac{a+b}{ab} = \dfrac{1}{a+b+x} - \dfrac{1}{x}$; entonces:

$r^2 + s^2$; es igual a:

A) $a+b$ **B)** a^2+b^2 **C)** a^2-b^2 **D)** $(a-b)^2$ **E)** $(a+b)^2$

Resolución:

- Dando común denominador en el segundo miembro, obtenemos:

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{x-(a+b+x)}{(a+b+x)\cdot x}$$

$$\frac{(a+b)}{ab} = \frac{-(a+b)}{(a+b+x)\cdot x} \Rightarrow (a+b+x)\cdot x = \frac{-(a+b)\cdot ab}{(a+b)}$$

$$(a+b)x + x^2 = -ab$$

$$x^2 + (a+b)x + ab = 0$$

Donde: i) $r+s=-(a+b)$; ii) $r.s=ab$

- Elevamos al cuadrado ambos miembros de la ecuación (i):

$$(r+s)^2 = [-(a+b)]^2$$

$$r^2 + 2rs + s^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad ...(III)$$

Reemplazamos (ii) en (III): $r^2 + 2ab + s^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$\therefore$ $r^2 + s^2 = a^2 + b^2$ **Rpta. B**

10. Si: x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación: $x^2 - 2x + 6 = 0$.

Hallar el valor de: $E = \dfrac{2-x_1}{2+x_1} + \dfrac{2-x_2}{2+x_2}$

A) 4 B) -2 C) -2/7 D) -4/7 E) 3

Resolución:

- De la expresión "E"; obtenemos:

$$E = \frac{(2-x_1)(2+x_2)+(2-x_2)(2+x_1)}{(2+x_1)(2+x_2)}$$

Recuerda que:

- $\dfrac{A}{B}+\dfrac{C}{D} = \dfrac{A\cdot D+B\cdot C}{B\cdot D}$

- Efectuamos los productos indicados; obteniendo:

$$E = \frac{4+\cancel{2x_2}-\cancel{2x_1}-x_1\cdot x_2+4+\cancel{2x_1}-\cancel{2x_2}-x_1\cdot x_2}{4+2x_2+2x_1+x_1\cdot x_2}$$

$$E = \frac{8-2x_1\cdot x_2}{4+2(x_1+x_2)+x_1\cdot x_2} \quad \ldots(I)$$

- De la ecuación: $x^2 - 2x + 6 = 0$

i) $x_1 + x_2 = \dfrac{-(-2)}{1} \Rightarrow \boxed{x_1 + x_2 = 2}$

ii) $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{6}{1} \Rightarrow \boxed{x_1 \cdot x_2 = 6}$

Reemplazando (i) y (ii) en (I); obtenemos:

$$E = \frac{8-2(6)}{4+2(2)+6} = \frac{-4}{14} = -\frac{2}{7} \Rightarrow \therefore \boxed{E = -\frac{2}{7}}$$ **Rpta. C**

11. En la ecuación: $2x^2 - (m-3)x + (m-1) = 0$

¿Qué valor debe darse a "m" para que las raíces difieran en uno?

A) 2 B) 6 C) 9 D) 11 E) 13

Resolución:

- De la ecuación: $2x^2 - (m - 3)x + (m - 1) = 0$

i) $x_1 + x_2 = \dfrac{(m-3)}{2}$

ii) $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{m-1}{2}$

➡ **Dato:** $x_1 - x_2 = 1$

Donde: $x_2 = x_1 - 1$ (iii)

Reemplazamos (iii) en (i): $x_1 + (x_1 - 1) = \dfrac{m-3}{2}$

$$2x_1 = \frac{m-3}{2} + 1 \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{m-1}{4}} \quad \text{(I)}$$

Reemplazamos (iii) en (ii): $\boxed{x_1 \,(x_1 - 1) = \dfrac{m-1}{2}}$ ...(II)

Reemplazamos (I) en (II):

$$\left(\frac{\cancel{m-1}}{4}\right)\left[\left(\frac{m-1}{4}\right) - 1\right] = \frac{\cancel{(m-1)}}{2}$$

$$\frac{m-1-4}{4} = 2 \Rightarrow \therefore \boxed{m = 13}$$ **Rpta. E**

4.5 ECUACIONES BICUADRADAS

4.5.1 ECUACIONES TRINOMIAS:

Son aquellas ecuaciones que constan de tres términos y son de la forma:

$ax^{2n} + bx^n + c = 0$; donde el primer término después de ordenado en forma descendiente con respecto a la variable "x", su exponente es el doble con respecto al exponente del segundo término, el tercer término es el término independiente.

Ejemplos de Ecuaciones Trinomias:

$\underbrace{2x^4 - 7x^2 + 6 = 0}$; $\underbrace{6x^8 + 2x^4 - 8 = 0}$; $\underbrace{5x^6 - 6x^3 + 1 = 0}$

Ec. Trinomia de Cuarto Grado — *Ec. Trinomia de Octavo Grado* — *Ec. Trinomia de Sexto Grado*

4.5.2 ECUACIÓN BICUADRADA:

Existen ecuaciones de grado superior al segundo, que mediante un cambio de incógnita (Cambio de Variable) se reducen a ecuaciones de Segundo Grado. Un caso notable es el de la Ecuación Bicuadrada que es de forma:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Mediante el cambio de variable: $x^2 = y$; la ecuación se escribe así:

$$a\,(x^2)^2 + b\,(x^2) + c = 0 \quad \Rightarrow \quad ay^2 + by + c = 0$$

Luego: $$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{...(I)}$$

Reemplazamos la expresión (I), en la expresión: $x^2 = y$; obteniendo:

$$x^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

De donde: $$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Ejemplo (1): Resolver la ecuación: $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Resolución:

La ecuación dada se puede escribir así: $(x^2)^2 - 13\,(x^2) + 36 = 0$ ...(I)

Hacemos cambio de variable. $x^2 = y$ ...(II)

Reemplazamos (II) en (I):

$$y^2 - 13y + 36 = 0$$

$$y = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4\,(1)\,(36)}}{2\,(1)} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2}$$

$$y = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} \begin{cases} y_1 = \frac{13+5}{2} = 9 \Rightarrow \boxed{y_1 = 9} \\ y_2 = \frac{13-5}{2} = 4 \Rightarrow \boxed{y_2 = 4} \end{cases}$$

*) Reemplazamos el valor de y = 9, en la expresión (II):

$$x^2 = y \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3 \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

**) Reemplazamos el valor de y = 4, en la expresión (II):

$$x^2 = y \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2 \begin{cases} x_3 = 2 \\ x_4 = -2 \end{cases}$$

∴ El conjunto solución de la ecuación:
$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ es: C.S. = {+3; -3; +2; -2} ***Rpta.***

4.5.3 NÚMERO DE RAÍCES DE UNA ECUACIÓN BICUADRADA

Como el grado de una ecuación indica el número de raíces ó soluciones de la ecuación, entonces una ecuación bicuadrada que es de grado 4; tendrá 4 raíces ó soluciones. En el ejemplo anterior hemos notado que la ecuación: $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$; tiene 4 raíces.

4.5.4 PROPIEDADES DE LAS RAÍCES DE UNA ECUACIÓN BICUADRADA

1. Suma de las raíces: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

2. Producto de las raíces: $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \frac{a}{b}$

3. Suma de productos binarios: $x_1 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_4 = \frac{b}{a}$

4.5.5 RESOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN BICUADRADA

Una ecuación bicuadrada puede resolverse por factorización o por aplicación de la fórmula general de las ecuaciones de segundo grado.

Ejemplo (2): Resolver la ecuación: $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

Resolución:

Factorizamos el trinomio $x^4 - 10x^2 + 9$; aplicando el Método del Aspa:

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

$$\begin{array}{lll} x^2 & -9 & \rightarrow -9x^2 \\ x^2 & -1 & \rightarrow -1x^2 \\ \hline & & -10x^2 \end{array} \quad + \quad \textit{...(Cumple)}$$

Luego: $(x^2 - 9)(x^2 - 1) = 0$; igualamos cada factor a cero.

i) $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3$ → $x_1 = 3$; $x_2 = -3$

ii) $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} \Rightarrow x = \pm 1$ → $x_3 = 1$; $x_4 = -1$

∴ El conjunto solución de la ecuación: $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ es: C.S. = {3; -3; 1; -1} ***Rpta.***

Ejemplo (3): Resolver la ecuación: $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

Resolución:

Factorizamos el trinomio: $4x^4 - 17x^2 + 4$; aplicando el Método del Aspa:

$$4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$$

$$\begin{array}{lll} 4x^2 & -1 & \rightarrow -x^2 \\ x^2 & -4 & \rightarrow -16x^2 \\ \hline & & -17x^2 \end{array} \quad + \quad \textit{...(Cumple)}$$

Luego: $(4x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0$; igualamos cada factor a cero.

i) $4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$ — $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = -\frac{1}{2}$

ii) $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2$ — $x_3 = 2$; $x_4 = -2$

$\therefore$ El conjunto solución de la ecuación: $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$; es: C.S. = $\left\{\frac{1}{2}\,;\ \frac{-1}{2}\,;\ 2\ ;\ -2\right\}$ ***Rpta.***

Ejemplo (4): Resolver la ecuación: $x^4 - 16 = 0$

Resolución:

La ecuación dada se puede escribir asi: $\left(x^2\right)^2 - (4)^2 = 0$

Por Diferencias de Cuadrados: $\left(A^n\right)^2 - \left(B^m\right)^2 = (A^n + B^m)\ (A^n - B^m)$

Obtenemos:

$\left(x^2\right)^2 - (4)^2 = 0 \Rightarrow (x^2 + 4)\ (x^2 - 4) = 0$; igualamos cada factor a cero.

i) $x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$

ii) $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

$\therefore$ El conjunto solución de la ecuación: x^4 -1 6 = 0; es: C.S. = {2i; -2i; 2; -2} ***Rpta.***

Ejemplo (5): Resolver la ecuación: $9x^4 - 25x^2 + 16 = 0$.

Resolución:

- La ecuación dada se puede escribir así: $9\ (x^2)^2 - 25\ (x^2) + 16 = 0$ ...(1)

Hacemos cambio de variable: $x^2 = y$ ...(2)

Reemplazamos (2) en (1); obteniendo:

$9y^2 - 25y + 16 = 0$; aplicamos la fórmula general de segundo grado.

$$y = \frac{-(-25) \pm \sqrt{(-25)^2 - 4\ (9)\ (16)}}{2\ (9)} = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{18}$$

$$y = \frac{25 \pm \sqrt{49}}{18} = \frac{25 \pm 7}{18} \begin{cases} y_1 = \dfrac{25+7}{18} \Rightarrow \boxed{y_1 = \dfrac{16}{9}} \\ y_2 = \dfrac{25-7}{18} \Rightarrow \boxed{y_2 = 1} \end{cases}$$

*) Reemplazamos el valor de $y = \frac{16}{9}$ en la expresión (2):

$$x^2 = y \Rightarrow x^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{16}{9}} \Rightarrow x = \pm\frac{4}{3} \begin{cases} \boxed{x_1 = \dfrac{4}{3}} \\ \boxed{x_2 = \dfrac{-4}{3}} \end{cases}$$

**) Reemplazamos el valor de y = 1; en la expresión (2):

$$x^2 = y \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} \Rightarrow x = \pm 1 \begin{cases} \boxed{x_3 = 1} \\ \boxed{x_4 = -1} \end{cases}$$

$\therefore$ El conjunto solución de la ecuación: $9x^4 - 25x^2 + 16 = 0$;

es: $C.S. = \left\{\frac{4}{3}\ ;\ \frac{-4}{3}\ ;\ 1\ ;\ -1\right\}$ ***Rpta.***

TALLER DE EJERCICIOS Nº 47

I. Resuelve las siguientes ecuaciones por el método que prefieras:

a) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$	**b)** $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$
c) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$	**d)** $25x^4 - 29x^2 + 4 = 0$
e) $x^4 - 625 = 0$	**f)** $4x^4 - 13x^2 + 3 = 0$

g) $x^4 - 256 = 0$	h) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$
i) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$	j) $9x^4 - 37x^2 + 4 = 0$
k) $x^4 - 41x^2 + 400 = 0$	l) $5x^4 - 47x^2 + 18 = 0$
m) $2x^4 + 20x^2 + 48 = 0$	n) $9x^4 - 40x^2 + 16 = 0$
ñ) $18x^4 - 27x^2 + 4 = 0$	o) $3x^4 + 8x^2 - 3 = 0$

II. Hallar la suma y el producto de las raices de las siguientes ecuaciones:

a) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$	b) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$
c) $9x^4 - 37x^2 + 4 = 0$	d) $2x^4 - 12x^2 + 10 = 0$
e) $4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$	f) $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$
g) $x^4 - 41x^2 + 400 = 0$	h) $3x^4 - 26x^2 - 9 = 0$
i) $3x^4 - 10x^2 - 4 = 0$	j) $2x^4 + 7x^2 - 1 = 0$
k) $m^2x^4 - (2m^4 + 1)\,x^2 + 2m^2 = 0$	l) $4x^4 + 9a^2x^2 - 100a^4 = 0$
m) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$	n) $9x^4 - 49x^2 + 20 = 0$
ñ) $x^4 - 5a^2x^2 + 4a^4 = 0$	o) $21x^4 - 25x^2 - 4 = 0$

RESPUESTAS TALLER 47

I.

a) C.S. = $\{-3; 3; -i; i\}$	b) C.S. = $\{-1; 2; -2i; 2i\}$
c) C.S. = $\{-4; -2; 2; 4\}$	d) C.S. = $\left\{\frac{-2}{5}\ ;\ -1\ ;\ \frac{2}{5}\ ;\ 1\right\}$
e) C.S. = $\{-5; 5; -5i; 5i\}$	f) C.S. = $\left\{\frac{-1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \sqrt{3}\ ;\ -\sqrt{3}\right\}$
g) C.S. = $\{-4; 4; -4i; 4i\}$	h) C.S. = $\left\{\frac{-1}{2}\ ;\ -2\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 2\right\}$
j) C.S. = $\left\{\frac{-1}{3}\ ;\ -2\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ 2\right\}$	k) C.S. = $\{-5; -4; 4; 5\}$
l) C.S. = $\left\{-\frac{\sqrt{10}}{5}\ ;\ \frac{\sqrt{10}}{5}\ ;\ -3\ ;\ 3\right\}$	m) C.S. = $\left\{-2i\ ;\ -\sqrt{6}i\ ;\ 2i\ ;\ \sqrt{6}i\right\}$

n) C.S. $=\left\{\frac{-2}{3}\ ;\ -2\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ 2\right\}$	ñ) C.S. $=\left\{-\frac{\sqrt{6}}{6}\ ;\ -\frac{2\sqrt{3}}{3}\ ;\ \frac{\sqrt{6}}{6}\ ;\ \frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$

4.6 ECUACIONES IRRACIONALES

Una ecuación es Irracional si la incógnita esta bajo un signo radical.

Ejemplo:

1. $\sqrt{x-6}=3$ 2. $\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}=1$ • Estas ecuaciones se llaman **Ecuaciones Irracionales Simples** • Estas ecuaciones contienen radicales cuadráticos	3. $\sqrt[3]{x+1}=2$ 4. $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+18}=5$ • Estas ecuaciones se llaman **Ecuaciones Irracionales Compuestas** • Estas ecuaciones contienen radicales cúbicos.

4.6.1 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES IRRACIONALES CUADRÁTICAS

Consideramos dos casos:

1ER. CASO : **Cuando la ecuación tiene sólo un término con una variable en un radicando.**

- Se procede de la siguiente manera:

1. Se aisla en el primer miembro al término que contiene la variable en el radical
2. Se eleva cada miembro de la ecuación a la potencia entera igual al indice de la raíz.
3. Se resuelve la ecuación resultante y se verifican los resultados.

Ejemplo (1): Resolver la ecuación: $x=2-\sqrt{x^2-2}$

Resolución:

- Aislamos el radical: $\sqrt{x^2-2}=2-x$

- Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$\left(\sqrt{x^2-2}\right)^2 = (2-x)^2$$

$$\cancel{x^2}-2 = 2^2-2(2)x+\cancel{x^2}$$

$$-2 = 4-4x \Rightarrow 4x = 4+2 \Rightarrow 4x = 6$$

Simplificando: $x = \frac{\cancel{6}}{\cancel{4}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{x=\frac{3}{2}}$

Comprobación:

$$x = 2-\sqrt{x^2-2} \Rightarrow \frac{3}{2} = 2-\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-2} = 2-\sqrt{\frac{9}{4}-2}$$

$$\frac{3}{2} = 2-\sqrt{\frac{1}{4}} = 2-\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{2\cdot 2-1}{2} = \frac{3}{2}$$

$\therefore$ El conjunto solución de la ecuación: $x = 2-\sqrt{x^2-2}$; es: $\left\{\frac{3}{2}\right\}$ ***Rpta.***

Ejemplo ②: Resolver la ecuación: $x-\sqrt{x}-6 = 0$

Resolución:

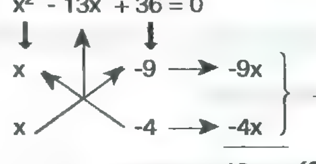
La ecuación dada, se puede escribir así: $x-6 = \sqrt{x}$

Elevamos al cuadrado ambos miembros: $(x-6)^2 = (\sqrt{x})^2$

$$x^2-2x\cdot 6+6^2 = x$$

$$x^2-12x+36 = x$$

Factorizamos por el método del aspa: $x^2 - 13x + 36 = 0$



-13x ...*(Cumple)*

Luego: $(x - 9)(x - 4) = 0$

De donde: i) $x - 9 = 0 \Rightarrow x = 9$

ii) $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

Comprobación:

Para: $x = 9 \Rightarrow x - \sqrt{x} - 6 = 0 \Rightarrow 9 - \sqrt{9} - 6 = 0$

$9 - 3 - 6 = 0$

$0 = 0$ ***...(Proposición Verdadera)***

Para: $x = 4 \Rightarrow x - \sqrt{x} - 6 = 0 \Rightarrow 4 - \sqrt{4} - 6 = 0$

$4 - 2 - 6 = 0$

$-4 = 0$ ***...(Proposición Falsa)***

$\therefore$ El conjunto solución de la ecuación: $x - \sqrt{x} - 6 = 0$; es: $\{9\}$ ***Rpta.***

Ejemplo (3): Resolver la ecuación: $3x + \sqrt{x - 1} = 7$

Resolución:

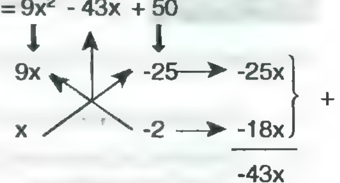
Pasamos "3x" al segundo miembro: $\sqrt{x - 1} = 7 - 3x$

Elevamos al cuadrado ambos miembros: $\left(\sqrt{x - 1}\right)^2 = (7 - 3x)^2$

$$x - 1 = 7^2 - 2(7)(3x) + (3x)^2$$

$$x - 1 = 49 - 42x + 9x^2$$

Factorizamos por el método del aspa: $0 = 9x^2 - 43x + 50$



Luego: $(9x - 25)(x - 2) = 0$

De donde: i) $9x - 25 = 0 \Rightarrow 9x = 25 \Rightarrow x = \frac{25}{9}$

ii) $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

Comprobación:

Para: $x = \frac{25}{9} \Rightarrow 3x + \sqrt{x-1} = 7 \Rightarrow 3\left(\frac{25}{9}\right) + \sqrt{\frac{25}{9} - 1} = 7$

$$\frac{75}{9} + \sqrt{\frac{25-9}{9}} = 7 \Rightarrow \frac{75}{9} + \frac{4}{3} = 7$$

$$\frac{75+12}{9} = 7 \Rightarrow \boxed{\frac{87}{9} = 7}$$ ***...(Proposición Falsa)***

Para: $x = 2 \Rightarrow 3x + \sqrt{x-1} = 7 \Rightarrow 3(2) + \sqrt{2-1} = 7$

$$6 + 1 = 7$$

$$\boxed{7 = 7}$$ ***...(Proposición Verdadera)***

$\therefore$ El conjunto solución de la ecuación: $3x + \sqrt{x-1} = 7$; es: $\{2\}$ ***Rpta.***

SOLUCIONES EXTRAÑAS EN UNA ECUACIÓN IRRACIONAL

En los ejemplos anteriores 2 y 3; hemos obtenido dos valores para la variable "x"; pero al hacer la comprobación sólo un valor para "x" nos ha conducido a una proposición verdadera, y el otro valor nos ha llevado a una proposición falsa; llamándosele **"Solución Extraña"**.

2DO. CASO : Cuando la ecuación tiene más de un radical cuadrático.

Para resolver estas ecuaciones se procede de la siguiente manera.

1. Se aisla un radical de preferencia el más complejo.
2. Se eleva ambos miembros de la ecuación al cuadrado y se simplifica la ecuación resultante.

3. Se repiten los pasos anteriores hasta que se eliminen los radicales que contienen variables.

4. Se resuelve la ecuación resultante y se verifican los resultados.

Ejemplo (1): Resolver la ecuación: $\sqrt{x}+\sqrt{2x+1}=5$

Resolución:

1. Se aisla un radical: $\sqrt{2x+1} = 5-\sqrt{x}$

2. Elevamos al cuadrado ambos miembros: $(\sqrt{2x+1})^2=(5-\sqrt{x})^2$

$$2x+1 = 5^2-2\ (5)\ (\sqrt{x})+(\sqrt{x})^2$$

$$2x+1 = 25-10\sqrt{x}+x \Rightarrow x = 24-10\sqrt{x}$$

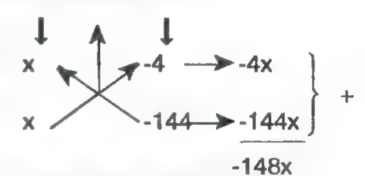
3. Aislamos el radical que aún queda: $10\sqrt{x}=24-x$

4. Elevamos ambos miembros al cuadrado: $(10\sqrt{x})^2 = (24-x)^2$

$$100x = (24)^2-2\ (24)x+x^2$$

$$100x = 576-48x+x^2$$

Factorizamos por el método del aspa: $0 = x^2-148x+576$



Luego: $(x-4)(x-144)=0$

De donde: i) $x-4=0 \Rightarrow \boxed{x=4}$; ii) $x-144=0 \Rightarrow \boxed{x=144}$

Comprobación:

Para: $\boxed{x=4} \Rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{2x+1}=5 \Rightarrow \sqrt{4}+\sqrt{2\ (4)+1} = 5$

$2+3=5 \Rightarrow \boxed{5=5}$ ***...(Proposición Verdadera)***

Para: $x = 144 \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{2x+1} = 5 \Rightarrow \sqrt{144} + \sqrt{2\ (144)\ +1} = 5$

$12 + 17 \neq 5 \Rightarrow \boxed{29 \neq 5}$ ***...(Proposición Falsa)***

$\therefore$ El conjunto solución de la ecuación: $\sqrt{x} + \sqrt{2x+1} = 5$; es: $\{4\}$ ***Rpta.***

Ejemplo (2): Resolver la ecuación: $\sqrt{x+7} + \sqrt{x-5} = \sqrt{2x+18}$

Resolución:

- Elevamos ambos miembros al cuadrado:

$$\left(\sqrt{x+7} + \sqrt{x-5}\right)^2 = \sqrt{(2x+18)^2}$$

- En el primer miembro, aplicamos: $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$; obteniendo:

$$(\sqrt{x+7})^2 + 2\sqrt{x+7} \cdot \sqrt{x-5} + (\sqrt{x-5})^2 = 2x+18$$

$$x + 7 + 2\sqrt{(x+7)\ (x-5)} + x - 5 = 2x + 18$$

$$\cancel{2x} + 2 + 2\sqrt{(x+7)\ (x-5)} = \cancel{2x} + 18$$

$$2\sqrt{(x+7)\ (x-5)} = 16 \text{ ; simplificamos:}$$

$$\sqrt{(x-7)\ (x-5)} = 8$$

- Elevamos ambos miembros al cuadrado: $\left(\sqrt{(x+7)\ (x-5)}\right)^2 = (8)^2$

$$(x+7)\ (x-5) = 64$$

$$x^2 - 5x + 7x - 35 = 64$$

- Factorizamos por el método del aspa: $x^2 + 2x - 99 = 0$

$x \quad\quad -9 \longrightarrow -9x$

$x \quad\quad +11 \longrightarrow 11x$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad + \ 2x$

Luego: $(x - 9)(x + 11) = 0$

De donde: i) $x - 9 = 0 \Rightarrow$ $x = 9$; ii) $x + 11 = 0 \Rightarrow$ $x = -11$

Comprobación:

Para: $x = 9$ $\Rightarrow$ $\sqrt{x+7} + \sqrt{x-5} = \sqrt{2x+18}$

$$\sqrt{9+7} + \sqrt{9-5} = \sqrt{2\,(9)+18} \Rightarrow 4 + 2 = 6$$

$$\boxed{6 = 6}$$ ***...(Proposición Verdadera)***

Para: $x = -11$ $\Rightarrow$ $\sqrt{x+7} + \sqrt{x-5} = \sqrt{2x+18}$

$$\sqrt{-11+7} + \sqrt{-11-5} = \sqrt{2\,(-11)+18}$$

$$\sqrt{-4} + \sqrt{-16} = \sqrt{-4} \Rightarrow 2i + 4i \neq \boxed{2i}$$

...(Prop. Falsa)

$\therefore$ El conjunto solución de la ecuación:
$\sqrt{x+7} + \sqrt{x-5} = \sqrt{2x-18}$; es: $\{9\}$ ***Rpta.***

Ejemplo (3): Resolver la ecuación: $\sqrt{x-a} + \sqrt{b-x} = \sqrt{b-a}$

Resolución:

- Elevamos ambos miembros al cuadrado:

$$(\sqrt{x-a} + \sqrt{b-x})^2 = (\sqrt{b-a})^2$$

$$(\sqrt{x-a})^2 \quad 2\sqrt{x-a} \cdot \sqrt{b-x} + (\sqrt{b-x})^2 = b - a$$

$$\cancel{x} - a + 2\sqrt{(x-a)\,(b-x)} + b - \cancel{x} = b - a$$

$$(b-a) + 2\sqrt{(x-a)\,(b-x)} = (b-a)$$

$$2\sqrt{(x-a)\,(b-x)} = (b-a) - (b-a)$$

$$2\sqrt{(x-a)\,(b-x)} = 0$$

Luego: $(x - a)(b - x) = 0$; igualamos cada factor a cero.

i) $x - a = 0 \Rightarrow \boxed{x = a}$; ii) $b - x = 0 \Rightarrow \boxed{b = x}$

Comprobación:

Para: $x = a \Rightarrow \sqrt{x-a} + \sqrt{b-x} = \sqrt{b-a} \Rightarrow \sqrt{a-a} + \sqrt{b-a} = \sqrt{b-a}$

$$0 + \sqrt{b-a} = \sqrt{b-a} \Rightarrow \boxed{\sqrt{b-a} = \sqrt{b-a}}$$ ... *(Prop. Verdadera)*

Para: $x = b \Rightarrow \sqrt{x-a} + \sqrt{b-x} = \sqrt{b-a} \Rightarrow \sqrt{b-a} + \sqrt{b-b} = \sqrt{b-a}$

$$\sqrt{b-a} + 0 = \sqrt{b-a} \Rightarrow \boxed{\sqrt{b-a} = \sqrt{b-a}}$$ ... *(Prop. Verdadera)*

∴ El conjunto solución de la ecuación: $\sqrt{x-a} + \sqrt{b-x} = \sqrt{b-a}$ es: {a; b} ***Rpta.***

Ejemplo (4): Resolver la ecuación: $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+4} = \sqrt{2x+6} + \sqrt{x-1}$

Resolución:

Elevamos ambos miembros al cuadrado:

$$(\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+4})^2 = (\sqrt{2x+6} + \sqrt{x-1})^2$$

$$(\sqrt{2x-1})^2 + 2\sqrt{2x-1}\cdot\sqrt{x+4} + (\sqrt{x+4})^2 = (\sqrt{2x+6})^2 + 2\sqrt{2x+6}\cdot\sqrt{x-1} + (\sqrt{x-1})^2$$

$$\cancel{2x} - 1 + 2\sqrt{(2x-1)\ (x+4)} + \cancel{x} + 4 = \cancel{2x} + 6 + 2\sqrt{(2x+6)\ (x-1)} + \cancel{x} - 1$$

$$2\sqrt{(2x-1)\ (x+4)} = 2 + 2\sqrt{(2x+6)\ (x-1)}$$

$$\cancel{2}\sqrt{(2x-1)\ (x+4)} = \cancel{2}\ (1 + \sqrt{(2x+6)\ (x-1)}$$

simplificamos: $\sqrt{(2x-1)\ (x+4)} = (1 + \sqrt{(2x+6)\ (x-1)}$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$\left(\sqrt{(2x-1)\ (x+4)}\right)^2 = \left(1 + \sqrt{(2x+6)\ (x-1)}\right)^2$$

$$(2x-1)(x+4) = 1^2 + 2\cdot 1\cdot\sqrt{(2x+6)(x-1)} + \left(\sqrt{(2x+6)(x-1)}\right)^2$$

$$(2x-1)(x+4) = 1 + 2\sqrt{(2x+6)(x-1)} + (2x+6)(x-1)$$

$$\cancel{2x^2} + 7x - 4 = 1 + 2\sqrt{(2x+6)(x-1)} + \cancel{2x^2} + 4x - 6$$

$$3x+1 = 2\sqrt{(2x+6)(x-1)}$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$(3x+1)^2 = \left(2\sqrt{(2x+6)(x-1)}\right)^2$$

$$9x^2+6x+1 = 4(2x+6)(x-1)$$

$$9x^2+6x+1 = 4(2x^2+4x-6)$$

$$9x^2+6x+1 = 8x^2+16x-24$$

$x^2-10x+25 = 0$; Factorizamos por el método del aspa:

$$\begin{array}{lcl} x & -5 & \rightarrow -5x \\ x & -5 & \rightarrow -5x \\ & & \overline{-10x} \end{array}$$

Luego: $(x-5)(x-5)=0$

De donde: i) $x-5=0 \Rightarrow \boxed{x=5}$; ii) $x-5=0 \Rightarrow \boxed{x=5}$

$\therefore$ El conjunto solución de la ecuación es: {5} ***Rpta.***

Ejemplo 5: Resolver la ecuación: $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2} = \dfrac{3}{\sqrt{2+x}}$

Resolver:

El término que se encuentra en el denominador de la fracción del segundo miembro pasa a multiplicar a los términos del primer miembro así:

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2} = \frac{3}{\sqrt{2+x}} \quad ; \quad \boxed{\sqrt{2+x}=\sqrt{x+2}}$$

$$(\sqrt{x+2})^2+\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2} = 3$$

$$\sqrt{(x-2)\ (x+2)} = 3-x-2$$

$$\sqrt{x^2-2^2} = 1-x$$

elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$\left(\sqrt{x^2-2^2}\right)^2 = (1-x)^2 \Rightarrow \not{x^2}-4 = 1-2x+\not{x^2} \Rightarrow \therefore\ x=\frac{5}{2}$$

comprobación:

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2} = \frac{3}{\sqrt{2+x}} \Rightarrow \sqrt{\frac{5}{2}+2}+\sqrt{\frac{5}{2}-2} = \frac{3}{\sqrt{2+5/2}}$$

$$\sqrt{\frac{9}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{3}{\sqrt{9/2}} \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow 2\sqrt{2} \neq \sqrt{2}$$ *(Proposición Falsa)*

$\therefore$ El conjunto solución es el conjunto vacío: ϕ ***Rpta.***

TALLER DE EJERCICIOS Nº 48

I. Resolver las ecuaciones siguientes indicando el conjunto solución:

a) $\sqrt{x+3} = 2$	**b)** $\sqrt{x+1}+1 = x$
c) $\sqrt{2x-1}+2 = x$	**d)** $\sqrt{5x-4}+x = 8$
e) $x+\sqrt{25+x^2} = 1$	**f)** $\sqrt{2x+5}+3 = 3x$
g) $1-\sqrt{x+3} = x-8$	**h)** $5+\sqrt{x+3} = \frac{4}{3}x$
i) $x+\sqrt{x} = 20$	**j)** $\sqrt{4x+29}-x = 2$
k) $\sqrt{2x-3}+3 = x$	**l)** $2-\sqrt{x^2+1} = x$

m) $\sqrt{x^2+3x-4-1} = x$	n) $2x-\sqrt{4x^2-3x-2} = 1$
ñ) $\dfrac{x-\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}-1} = \dfrac{3}{5}$	

II. Resolver las ecuaciones siguientes indicando el conjunto solución:

a) $\sqrt{5+2x}-\sqrt{5-2x} = 2$	b) $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-4} = 3$
c) $\sqrt{4x-3}+2\sqrt{x} = 3$	d) $\sqrt{36+x}-2 = \sqrt{x}$
e) $\sqrt{x}-\sqrt{x-8} = \sqrt{x-5}$	f) $\sqrt{3x-1}+\sqrt{3x+1} = 2$
g) $\sqrt{x+3a^2}-\sqrt{x-5a^2} = 2a$	h) $\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1} = \sqrt{2x-5}$
i) $\sqrt{1+x}+\sqrt{x-2} = \sqrt{2x+3}$	j) $\sqrt{3+x}+\sqrt{x} = \dfrac{6}{\sqrt{3+x}}$
k) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1} = \sqrt{5x}$	l) $\sqrt{1+4x}-\sqrt{1-4x} = 4\sqrt{x}$
m) $\sqrt{4x+9}-\sqrt{x+6} = \sqrt{x-1}$	n) $\sqrt{2x-3n} = 3\sqrt{n}-\sqrt{2x}$
ñ) $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-3} = \sqrt{3x-3}+\sqrt{x}$	

RESPUESTAS TALLER 48

I.	a) C.S. = {1}	b) C.S. = {3}	c) C.S. = {5}
	d) C.S. = {4}	e) C.S. = {-12}	f) C.S. = {2}
	g) C.S. = {6}	h) C.S. = {6}	i) C.S. = {16}
	j) C.S. = {5}	k) C.S. = {6}	l) C.S. = {3/4}
	m) C.S. = {5}	n) C.S. = {3}	ñ) C.S. = {4}
II.	a) C.S. = {2}	b) C.S. = {4}	c) C.S. = {1}
	d) C.S. = {64}	e) C.S. = {9}	f) C.S. = {5/12}
	g) C.S. = {$6a^2$}	h) C.S. = {3}	i) C.S. = {3}
	j) C.S. = {1}	k) C.S. = {5}	l) C.S. = {0}
	m) C.S. = {10}	n) C.S. = {2n}	ñ) C.S. = {4}

4.7 ECUACIONES QUE SE RESUELVEN, APLICANDO EL MÉTODO DE LOS DIVISORES BINOMIOS.

Se basa en el siguiente criterio de divisibilidad: "Sí un P(x) se anula para $x = \pm a$; uno de sus factores será: $(x \pm a)$"

4.7.1 FORMA DE CALCULAR LOS POSIBLES VALORES QUE ANULAN A UN POLINOMIO

Los posibles valores que anulan a un polinomio, son los divisores de:

$$\frac{\text{TÉRMINO INDEPENDIENTE DEL POLINOMIO}}{\text{COEFICIENTE DEL TÉRMINO DE MAYOR GRADO}}$$

Ejemplo (1): Los posibles valores que anulan a: $5x^3 - 3x^2 - 2$ son los divisores de:

Término independiente

Coeficiente del término de mayor grado

(2) → divisores de 2: $\pm 1, \pm 2$; (5) → divisores de 5: $\pm 1; \pm 5$

Luego se toma un divisor del numerador y se les combina con los divisores del denominador así:

Los posibles valores serán: : $\frac{\pm 1}{\pm 1}$; $\frac{\pm 1}{\pm 5}$; $\frac{\pm 2}{\pm 1}$; $\frac{\pm 2}{\pm 5}$

: $\boxed{\pm 1 ;\ \pm\frac{1}{5} \quad \pm 2 \quad \pm\frac{2}{5}}$

Ejemplo (2): Los posibles valores que anulan a: $x^3 - 7x + 6$ son los divisores de:

$\frac{6}{1}$ · Divisores de 6: $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

Los posibles valores serán: : $\frac{\pm 1}{1}$; $\frac{\pm 2}{1}$; $\frac{\pm 3}{1}$; $\frac{\pm 6}{1}$

: $\boxed{\pm 1 ;\ \pm 2 \quad \pm 3 \quad \pm 6}$

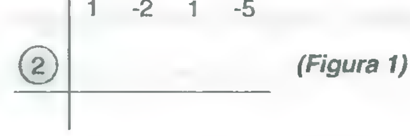
MÉTODO DE RUFFINI:

Para dividir por el método de Ruffini se trazan dos rayas que se intersectan, una vertical y una horizontal.

Encima de la raya horizontal y a la derecha de la vertical se coloca los coeficientes del dividendo con su propio signo y encima de la raya horizontal y a la izquierda de la vertical se coloca aquel valor de "x" que anule el divisor (ver figura 1)

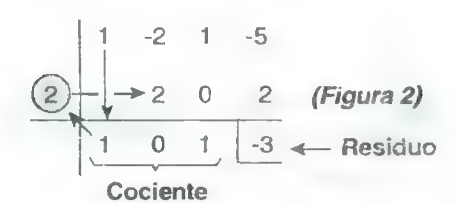
Ejemplo: Dividir $x^3 - 2x^2 + x - 5$ entre $x - 2$

La disposición de los coeficientes sería:



(Figura 1)

Para comenzar a dividir se procede de la siguiente manera: el primer coeficiente se baja de frente y se escribe en el resultado debajo de la línea horizontal (ver figura 2). Este resultado se multiplica por el número encerrado en el círculo y se coloca debajo del siguiente coeficiente del dividendo, esta columna se suma y se obtiene un segundo coeficiente en el resultado el cual a su vez se vuelve a multiplicar por el número en el círculo y se coloca en la columna que sigue debajo del siguiente coeficiente del dividendo, esta operación se repite hasta agotar los coeficientes del dividendo. El último coeficiente del resultado constituye el residuo y los anteriores constituyen los coeficientes del cociente, de esta manera tendríamos:



(Figura 2)

Nota: Nótese que el grado del cociente es uno menor que el grado del dividendo.

Luego: El cociente sería: $Q = 1x^2 + 0x + 1 \Rightarrow Q = x^2 + 1$

y el Residuo sería: $R = -3$

Ejemplo: Resolver la ecuación: $\frac{10}{x^3} + \frac{17}{x^2} = -1 - \frac{8}{x}$

Resolución:

Damos común denominador en los dos miembros obteniendo:

$$\frac{10+17x}{\cancel{x^3}} = \frac{-x^3-8x^2}{\cancel{x^2}} \Rightarrow 10+17x = -x^3-8x^2$$

Donde: $\boxed{(1)x^3 + 8x^2 + 17x + (10) = 0}$

Los posibles valores que anulan a dicha ecuación son las raíces de la ecuación, para hallar dichos valores lo hacemos de la siguiente manera:

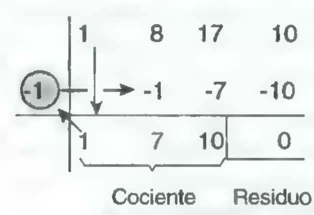
$\frac{10}{1}$ Divisores de 10: ± 1 ; ± 2 ; ± 5 ; ± 10

Los únicos valores que anulan la ecuación:

$x^3 + 8x^2 + 17x + 10 = 0$ son cuando $x = -1$

$x = -2$ y $x = -5$

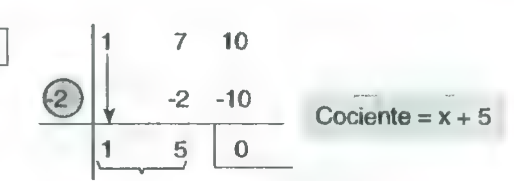
Ahora aplicamos el método de Ruffini; cuando: $\boxed{x = -1}$



Nota: El grado del cociente es uno menos que el grado del dividendo.

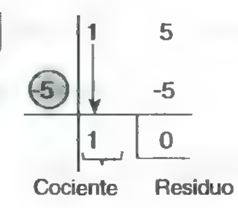
El cociente es: $x^2 + 7x + 10$

Aplicamos Ruffini cuando: $\boxed{x = -2}$



Cociente = x + 5

Aplicamos Ruffini; cuando: $\boxed{x = -5}$



$\therefore$ El conjunto solución de la ecuación: $\frac{10}{x^3}+\frac{17}{x^2} = -1-\frac{8}{x}$ es: $\boxed{S = \{-1, -2, -5\}}$

Ejemplo: Hallar el conjunto solución de la ecuación: $6-\frac{5}{x}-\frac{30}{x^2}=\frac{25x+6}{x^4}$

Resolución:

Damos común denominador en el primer miembro, obteniendo:

$$\frac{6x^2-5x-30}{x^2}=\frac{25x+6}{x^4}$$; hacemos producto de extremos y medios

$$x^4\ (6x^2-5x-30)=x^2\ (25x+6)$$

$$6x^6-5x^5-30x^4=25x^3+6x^2$$

$$6x^6-5x^5-30x^4-25x^3-6x^2=0$$; factorizamos x^2

$$x^2\ (6x^4-5x^3-30x^2-25x-6)=0$$; igualamos cada factor a cero

i) $x^2=0 \Rightarrow x=0$ (No es solución)

ii) $6x^4-5x^3-30x^2-25x-6=0$

Los valores que anulan a dicha ecuación son las raíces de la ecuación, para hallar dichos valores procedemos de la siguiente manera:

(6) → divisores de 6: ± 1 ; ± 2 ; ± 3 ; ± 6

(6) → divisores de 6: ± 1 ; ± 2 ; ± 3 ; ± 6

Los posibles valores que anulan a la ecuación son:

$$\left\{\pm 1\ ;\ \pm\frac{1}{2}\ ;\ \pm\frac{1}{3}\ ;\ \pm\frac{1}{6}\ ;\ \pm 2\ ;\ \pm\frac{2}{3}\ ;\ \pm 3\ ;\ \pm\frac{3}{2}\ ;\ \pm 6\right\}$$

Los únicos valores que anulan la ecuación $6x^4-5x^3-30x^2-35x-6=0$ son cuando:

$x=-1$; $x=-1/2$; $x=3$ y $x=-2/3$

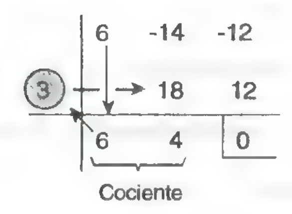
Ahora aplicamos el método de Ruffini, cuando: $x=-1$

	6	-5	-30	-25	-6
-1		-6	11	19	6
	6	-11	-19	-6	0

Cociente (6, -11, -19, -6) — Residuo (0)

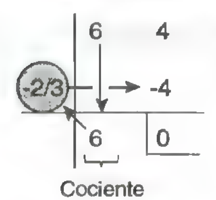
∴ Cociente: $6x^3-11x^2-19x-6$

Aplicamos el método de Ruffini; cuando $x = -1/2$



$\therefore$ Cociente: $6x^2 - 14x - 12$

Aplicamos el método de Ruffini, cuando: $x = 3$



$\therefore$ Cociente: $6x + 4$

Aplicamos el método de Ruffini; cuando: $x = -2/3$

$\therefore$ El conjunto solución de la ecuación:

$$6 - \frac{5}{x} - \frac{30}{x^2} = \frac{25x+6}{x^4}\text{; es:}$$

$S = \{-1 ; -1/2 ; 3 ; -2/3\}$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 49

Resuelve las ecuaciones siguientes:

1. $\frac{1}{x} + 1 = \frac{x}{x+1}$	**2.** $\frac{2x+5}{x+2} = \frac{2x-13}{x-4}$
3. $\frac{4x-1}{x+19} - \frac{4x+23}{x+3} = 0$	**4** $\frac{3x-6}{x-5} = \frac{3x-12}{x-1}$
5. $\frac{11x+7}{7+3x} = 4$	**6.** $\frac{2x-1}{3} - \frac{1}{4x-1} = 0$

7. $\dfrac{x-3}{4x} = \dfrac{\dfrac{7-2x}{2}+1}{8x}$	**8.** $\dfrac{\dfrac{x-1}{x+1}+1}{\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}} = 2$
9. $\dfrac{6-3x}{x+4}+\dfrac{2x+5}{x-2}-2 = 0$	**10.** $\dfrac{2}{2x+1}+1 = \dfrac{7}{4}$
11. $1-\dfrac{4}{x^2} = 4x-\dfrac{16}{x}$	**12.** $\dfrac{17x-6}{x^2}+x-4x^2+28 = 0$
13. $\dfrac{x^2-1}{x^2}-\dfrac{6}{x^3} = 0$	**14.** $1-\dfrac{4}{x^2} = \dfrac{2x^4-11x^2+12}{x^3}$

RESPUESTAS TALLER 49

1. S = {-1/2}	**2.** S = {-1}	**3.** S = {-5}
4. S = {3}	**5.** S = {-21}	**6.** S = {-1/4, 1}
7. S = {7/2}	**8.** S = {5}	**9.** S = {-1, 8}
10. S = {5/6}	**11.** S = {-2, 2, 1/4}	**12.** S = {-2, 3, -1, 1/4}
13. S = {2}	**14.** S = {-1, -2, 2, 3/2}	

4.8 INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA VARIABLE

Una Inecuación de primer grado con una variable es aquella que tiene una sola variable (incógnita) con exponente 1.

Las inecuaciones de primer grado con una variable son de la forma:

$$ax + b > c \;; \qquad ax + b \geq c$$

$$ax + b < c \;; \qquad ax + b \leq c$$

Donde: **a, b** y **c** son números reales y **a** $\neq 0$.

• Son inecuaciones de primer grado, por ejemplo:

a) $3x + 6 > 0$; b) $5x - 10 \geq 0$; c) $(2/3)x + 4 < 7$; d) $(3/4)x - 5 \leq 2$

4.8.1 RESOLVER UNA INECUACIÓN

Es hallar su conjunto solución, esto es, el conjunto de todos los valores de "x" que convierten el enunciado abierto en una proposición verdadera.

Para resolver una inecuación se sigue el mismo proceso que para las ecuaciones.

4.8.2 PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES

A continuación anotamos las propiedades de la relacion mayor que (>); siendo las mismas o muy parecidas para las otras relaciones de desigualdad o sea: <; ≥, ≤.

1. ***Propiedad Aditiva:*** $a > b \Rightarrow a + c > b + c$

2. ***Propiedad Cancelativa:*** $a + c > b + c \Rightarrow a > b$

3. ***Propiedad Multiplicativa:*** $a > b \text{ y } c > 0 \Rightarrow ac > bc$

   $a > b \text{ y } c < 0 \Rightarrow ac < bc$

4. ***Propiedad Cancelativa:*** $ac > bc \text{ y } c > 0 \Rightarrow a > b$

   $ac > bc \text{ y } c < 0 \Rightarrow a < b$

5. ***Propiedad de los Inversos:***

$$a > b \; ; \; a > 0 \; ; \; b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

$$a > b \; ; \; a > 0 \; ; \; b < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

$$a > b \; ; \; a < 0 \; ; \; b < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

Propiedades de Monotomía

i) $a > b \quad \text{y} \quad c > d \Rightarrow a + c > b + d$

ii) $b > a > 0 \text{ y } d > c > 0 \Rightarrow bd > ac > 0$

EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE INECUACIONES DE PRIMER GRADO

1 Halla el conjunto solución de la siguiente inecuacion: $\frac{2}{3}x - 1 < 3 - x$; utiliza intervalos para dar tu respuesta.

Resolución:

$$\frac{2x}{3} - 1 < 3 - x$$

$2x - 3 < 9 - 3x$; transponemos términos:

$$2x + 3x < 9 + 3$$

$$5x < 12 \Rightarrow \therefore \boxed{x < \frac{12}{5}}$$

El conjunto solución de la inecuación es: $\langle -\infty \ ; \ 12/5 \rangle$ ***Rpta.***

Halla el conjunto solución de la siguiente inecuación: $\frac{4}{3}x \geq \frac{1}{2}(x - 3)$; utiliza intervalos para dar tu respuesta:

Resolución:

$2(4x) \geq 3 . 1 (x - 3)$; hemos efectuado producto de extremos y medios

$8x \geq 3x - 9$; transponemos términos

$$8x - 3x \geq -9 \Rightarrow 5x \geq -9 \Rightarrow \therefore \boxed{x \geq -\frac{9}{5}}$$

El conjunto solución de la inecuación es: C.S. = $[-9/5 \ ; \ \infty\rangle$ ***Rpta.***

Halla el conjunto solución de la siguiente inecuación:
$x (x + 4) < x (x-9) + 3$; utiliza intervalos para dar tu respuesta.

Resolución:

$x (x + 4) < x (x - 9) + 3$; efectuando los productos indicados obtenemos:

$\cancel{x^2} + 4x < \cancel{x^2} - 9x + 3$; transponemos términos:

$$4x + 9x < 3 \Rightarrow 13x < 3 \Rightarrow \therefore \quad x < \frac{3}{13}$$

El conjunto solución de la inecuacion es: C.S. = $\langle -\infty \; ; \; 3/13 \rangle$ **Rpta.**

Halla el conjunto solución de la siguiente inecuación: $(x - 2)^2 - (x+3)^2 \geq 3 - 6x$; utiliza intervalos para dar tu respuesta.

Resolución:

Recuerda que:

- $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
- $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

$$(x-2)^2 - (x+3)^2 \geq 3 - 6x$$

$$(x^2 - 4x + 4) - (x^2 + 6x + 9) \geq 3 - 6x$$

$$\cancel{x^2} - 4x + 4 - \cancel{x^2} - 6x - 9 \geq 3 - 6x$$

$$-10x - 5 \geq 3 - 6x \text{ ; transponemos términos:}$$

$$-10x + 6x \geq 3 + 5$$

$$-4x \geq 8 \text{ ; multiplicamos por -1 ambos miembros:}$$

$$-1\,(-4x) \leq 8\,(-1) \Rightarrow 4x \leq -8 \Rightarrow x \leq -2$$

Recuerda que:

$8 \geq 5$;

Si multiplicamos por -1 ambos miembros: La desigualdad cambia de sentido: $-1\,(8) \leq -1\,(5)$

$\therefore \quad -8 \leq -5$

El conjunto solución de la inecuación es: C.S. = $\langle -\infty \; ; \; -2]$ **Rpta.**

5 Halla el conjunto solución de la inecuación: $\dfrac{x-3}{4} + \dfrac{x+3}{5} > \dfrac{1}{2}$; utiliza intervalos para dar tu respuesta:

Resolución:

- En primer lugar, hallamos el m.c.m. de los denominadores, así:

$$\frac{5\,(x-3)}{\cancel{20}} + \frac{4\,(x+3)}{\cancel{20}} > \frac{1 \cdot 10}{\cancel{20}}$$

Simplificamos los denominadores, resulta:

$$5x - 15 + 4x + 12 > 10$$
$$9x > 10 + 15 - 12$$
$$9x > 13$$
$$\therefore \quad x > 13/9$$

4 - 5 - 2	2
2 - 5 - 1	2
1 - 5 - 1	5
1 - 1 - 1	

m.c.m. (4; 5 y 2) = 2 . 2 . 5 = 20

El conjunto solución de la inecuación es: C.S = $\langle 13/9\ ;\ \infty \rangle$ **Rpta.**

6 Halla el conjunto solución de la siguiente inecuación: $\frac{2}{3}x + \frac{1}{2} \leq \frac{3x}{4} + 1$; utiliza intervalos para dar tu respuesta:

Resolución:

• En primer lugar, hallamos el m.c.m. de los denominadores, así:

$$\frac{4\,(2x)}{12} + \frac{1\,(6)}{12} \leq \frac{3\,(3x)}{12} + \frac{1 \cdot 12}{12}$$

3 - 2 - 4	2
3 - 1 - 2	2
3 - 1 - 1	3
1 - 1 - 1	

m.c.m. (3, 2 y 4) = 2 . 2 . 3 = 12

Simplificando los denominadores, resulta:

$$8x + 6 \leq 9x + 12$$
$$8x - 9x \leq 12 - 6 \Rightarrow -x \leq 6$$

multiplicamos por -1 ambos miembros:

$$-1\,(-x) \geq 6\,(-1) \Rightarrow \therefore \ x \geq -6$$

$\therefore$ El conjunto solución de la inecuación es: C.S = $[-6\ ;\ \infty \rangle$ **Rpta.**

TALLER DE EJERCICIOS Nº 50

- Halla el conjunto solución de las siguientes inecuaciones. Utiliza intervalos para dar tu respuesta:

1. $\frac{2}{5}x-3 > 2+x$	**2.** $6-\frac{4}{3}x \leq 5+\frac{x}{2}$
3. $\frac{1}{3}(x+2) > \frac{1}{4}(x-3)$	**4.** $\frac{2}{5}(x+6) \leq \frac{2}{3}(x+2)$
5. $\frac{6x-1}{2} < 4-x$	**6.** $2x+3 \geq \frac{3x-2}{2}$
7. $x(x+2)+6 < x(x-3)$	**8.** $x(x+6)-x(x-3) \geq 4x-5$
9. $(x+4)^2-(x-4)^2 < 15x+3$	**10.** $(x-6)^2 \leq x^2-20$
11. $(x-2)(x+6) \geq x^2+2$	**12.** $\frac{x+1}{4}-\frac{2-x}{3} > \frac{1}{6}$
13. $\frac{2}{7}x-\frac{1}{3} \leq \frac{2}{21}x-1$	**14.** $\frac{6}{3}+\frac{1-8x}{4} \geq 6$
15. $x(x^2-3)-(x-2)^3 \leq 6x^2$	**16.** $x(x-2)-(x+5) < x(x-8)$

RESPUESTAS TALLER 50

1. C.S. = $\langle -\infty ; -25/3 \rangle$	**2.** C.S. = $[6/11 ; \infty \rangle$
3. C.S. = $\langle -17 ; \infty \rangle$	**4.** C.S. = $[4 ; \infty \rangle$
5. C.S. = $\langle \infty ; 9/8 \rangle$	**6.** C.S. = $[-8 ; \infty \rangle$
7. C.S. = $\langle -\infty ; -6/5 \rangle$	**8.** C.S. = $[-1 ; \infty \rangle$
9. C.S. = $\langle -\infty ; 3 \rangle$	**10.** C.S. = $[14/3 ; \infty \rangle$
11. C.S. = $[7/2 ; \infty \rangle$	**12.** C.S. = $\langle 1 ; \infty \rangle$
13. C.S. = $\langle -\infty ; -7/2]$	**14.** C.S. = $\langle -\infty ; -15/8]$
15. C.S. = $[8/15 ; \infty \rangle$	**16.** C.S. = $\langle -\infty ; 1 \rangle$

4.8.3 INECUACIONES DE TRES PARTES:

Se denominan Inecuaciones de Tres Partes a las inecuaciones que tienen la siguiente forma:

a) $2x - 1 < x + 6 < 3x - 8$

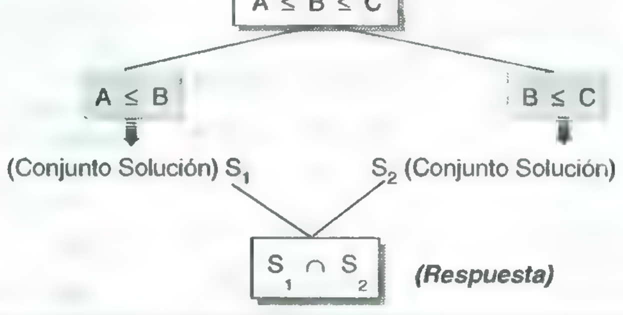
b) $x+6 < 2x+\frac{1}{3} \leq 3x+1$

c) $-6 \leq 2x + 8 \leq 4$

d) $\frac{2}{3} \leq x-2 < \frac{3}{4}x-1$

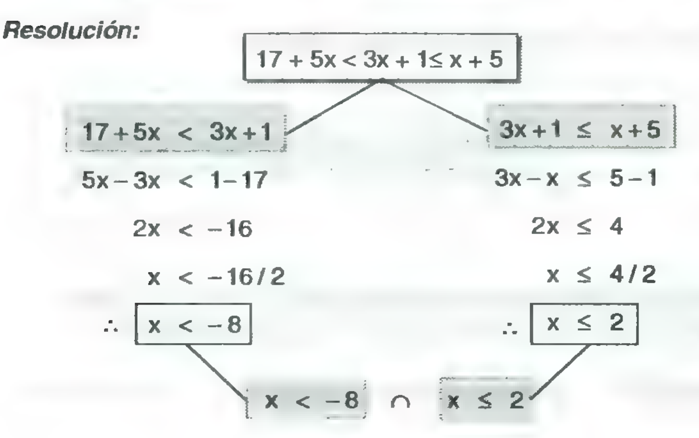
En general: $A \leq B \leq C$

El conjunto solución de una Inecuación de tres partes se halla aplicando el siguiente esquema:

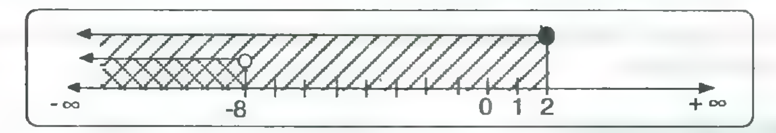


Ejemplo (1): Hallar el conjunto solución de: $17 + 5x < 3x + 1 \leq x + 5$

Resolución:



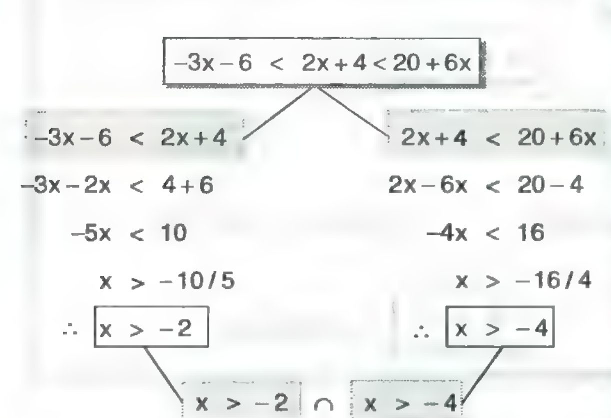
graficamos estos resultados en la recta numérica.



El conjunto solución de la inecuación es: C.S. = $\langle -\infty\ ;\ -8 \rangle$ **Rpta.**

Ejemplo (2): Hallar el conjunto solución de: $-3x - 6 < 2x + 4 < 20 + 6x$

Resolución:

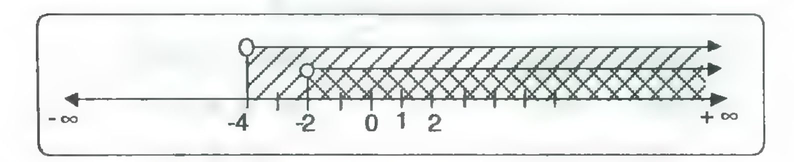


Recuerda que:

Cuando la incógnita (x) está precedido del signo menos; multiplicamos ambos miembros por -1, cambiando el signo de la desigualdad. Veamos:

$$-5x < 10$$
$$-1\,(-5x) > -1\,(10)$$
$$5x > -10$$
$$x > -10/5$$

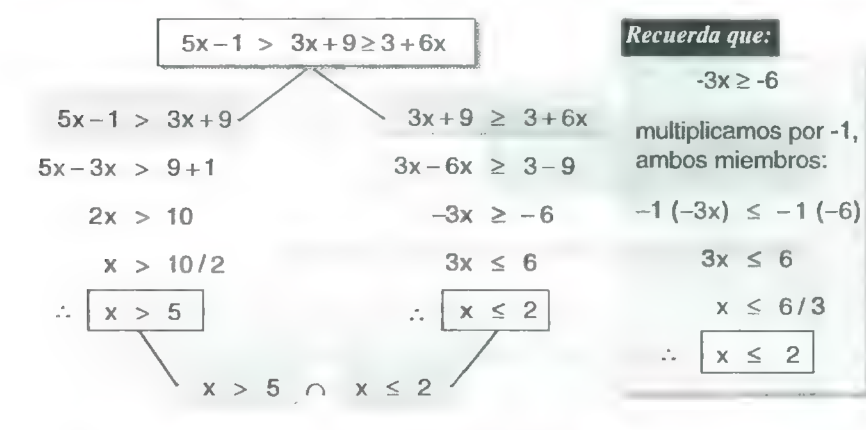
graficamos estos resultados en la recta numérica.



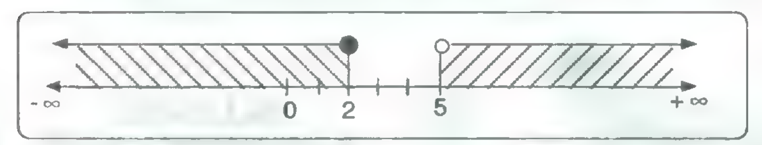
El conjunto solución de la inecuación es: C.S. = $\langle -2\ ;\ \infty \rangle$ **Rpta.**

Ejemplo (3): Hallar el conjunto solución de: $5x - 1 > 3x + 9 \geq 3 + 6x$

Resolución:



graficamos estos resultados en la recta numérica.



El conjunto solución de la inecuación es: C.S. = ϕ (Conjunto Vacío) ***Rpta.***

Ejemplo (4): Hallar el conjunto solución de: $\frac{x+1}{3} < \frac{2x+3}{2} < \frac{7+8x}{6}$

Resolución:

• En primer lugar, hallamos el m.c.m. de los denominadores; así:

$$\frac{2\ (x+1)}{6} < \frac{3\ (2x+3)}{6} < \frac{7+8x}{6}$$

3 - 2 - 6	2
3 - 1 - 3	3
1 - 1 - 1	

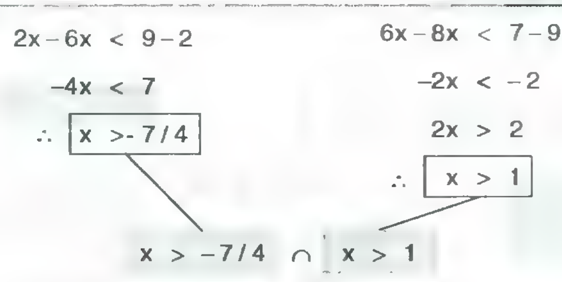
m.c.m. (3, 2 y 6) = 2 . 3
= 6

Simplificamos los denominadores; resulta:

$$2\ (x+1) < 3\ (2x+3) < 7+8x$$

$$\boxed{2x+2 < 6x+9 < 7+8x}$$

$$2x+2 < 6x+9 \qquad\qquad 6x+9 < 7+8x$$



$$2x-6x < 9-2 \qquad\qquad 6x-8x < 7-9$$

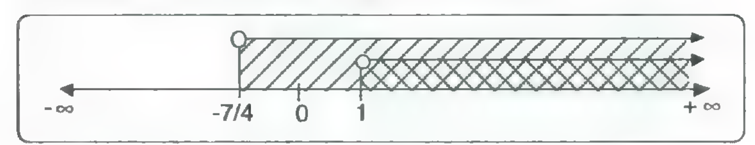
$$-4x < 7 \qquad\qquad -2x < -2$$

$$\therefore \boxed{x > -7/4} \qquad\qquad 2x > 2$$

$$\therefore \boxed{x > 1}$$

$$x > -7/4 \;\cap\; x > 1$$

graficamos estos resultados en la recta numérica.



El conjunto solución de la inecuación es: C.S. = $\langle 1\,;\,\infty\rangle$ ***Rpta.***

TALLER DE EJERCICIOS Nº 51

- Halla el conjunto solución de las siguientes inecuaciones. Utiliza intervalos para dar la respuesta:

1. $3x-8 \leq 5x-2 < 16-4x$	**2.** $12-3x < 4-5x \leq 10-3x$
3. $-4x-1 < 2x+9 < 6x-3$	**4.** $6-x \leq \frac{x}{2}+4 < 8+\frac{3}{2}x$
5. $\frac{4}{3}x-1 < x+3 \leq 2x-6$	**6.** $\frac{x}{2}-3 > \frac{2x}{3}+1 \leq \frac{x}{6}-2$
7. $5x-\frac{1}{4} < \frac{x}{2}+3 < x-4$	**8.** $-\frac{x}{4} < \frac{7x}{4}+2 < \frac{13+2x}{4}$
9. $\frac{x}{2} < \frac{3x}{4}+\frac{10}{8} \leq \frac{7}{4}-\frac{x}{2}$	**10.** $3x-1 \leq \frac{4}{5}x < x+2$

RESPUESTAS TALLER 51

1. C.S. = $[-3 ; 2\rangle$	2. C.S. = $[-3 ; \infty\rangle$	3. C.S. = $\langle 3 ; \infty\rangle$
4. C.S. = $[4/3 ; \infty\rangle$	5. C.S. = $[9; 12\rangle$	6. C.S. = $\langle -\infty ; -24\rangle$
7. C.S. = ϕ	8. C.S. = $\langle -1 ; 1\rangle$	9. C.S. = $\langle -5 ; 2/5]$
10. C.S. = $\langle -10 ; 5/11]$		

4.9.4 INECUACIONES CUADRÁTICAS

Una inecuación cuadrática es una desigualdad condicional que reducida a su más simple expresión, tiene la forma:

$$\boxed{ax^2 + bx + c > 0} \quad (1) \text{ ó } \quad \boxed{ax^2 + bx + c < 0} \quad (2)$$

Donde: a, b, c son números reales; siendo: $a \neq 0$

Para determinar los valores de "x" que satisfacen las inecuaciones (1) y (2).

Existen los siguientes métodos:

Ejemplo 1: Resolver: $x^2 - 4 < x + 2$

Resolución:

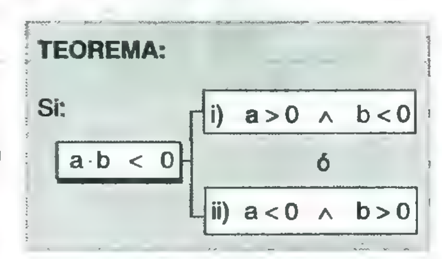
Transponiendo términos se obtiene: $x^2 - x - 6 < 0$

a) Primer Método (Método de Factorización):

Factorizando el primer miembro de la inecuación: $x^2 - x - 6 < 0$; obtenemos:

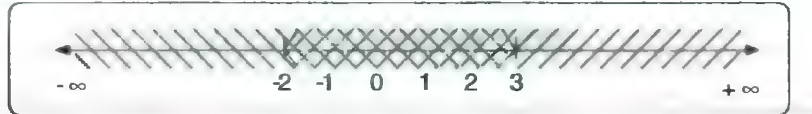
$$(x + 2)(x - 3) < 0$$

Por Teorema:



i) $(x+2) > 0 \quad \wedge \quad (x-3) < 0$

$$\boxed{x > -2} \cap \boxed{x < 3}$$



Conjunto Solución: $C.S_1 = x \in \langle -2 \,;\, 3 \rangle$

ii) $(x+2) < 0 \quad \wedge \quad (x-3) > 0$

$x < -2 \quad \cap \quad x > 3$

- ∞ -2 -1 0 1 2 3 + ∞

Conjunto Solución: $C.S_2 = \phi$

Luego:

El conjunto de la inecuación: $x^2 + 4 < x + 2$ es: $C.S. = \{x/x \in \langle -2 \,;\, 3 \rangle\}$

b) Segundo Método (Método de Completar el Cuadrado):

Transponiendo términos en la inecuación: $x^2 - 4 < x + 2$; se obtiene:

$$x^2 - x < 6$$

mitad de 1 es $\frac{1}{2}$; elevado al cuadrado $= \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Luego; sumamos y restamos $\frac{1}{4}$ al primer miembro:

$$x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} < 6 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} < 6$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 < 6 + \frac{1}{4}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{25}{4}$$

TEOREMA:

Si: $a^2 < k$

Entonces: $-\sqrt{k} < a < \sqrt{k}$

Siendo: $k > 0$

Por Teorema: $-\sqrt{\dfrac{25}{4}} < \left(x-\dfrac{1}{2}\right) < \sqrt{\dfrac{25}{4}}$

$\dfrac{-5}{2} < \left(x-\dfrac{1}{2}\right) < \dfrac{5}{2}$; sumamos $\dfrac{1}{2}$ a ambos miembros.

$$\frac{-5}{2}+\frac{1}{2} < x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2} < \frac{5}{2}+\frac{1}{2}$$

$$-2 < x < 3 \Leftrightarrow x \in \langle -2 ; 3 \rangle$$

c) Tercer Método: (Método de los Puntos Críticos)

$$x^2-4 < x+2 \Leftrightarrow x^2-x-6 < 0$$

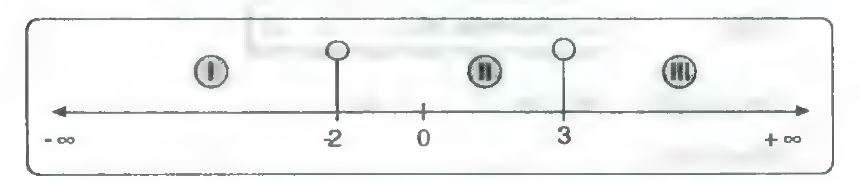
$$(x-3)\,(x+2) < 0$$

$x^2 - x - 6 = (x - 3)\,(x + 2)$

x -3

x +2

A continuación se encuentran aquellos valores de "x" que anulan a los factores (x - 3) y (x + 2) siendo estos: x = 3 y x = -2 **(Puntos Críticos)**; colocándolos en la recta numérica.



Nótese que ambos valores (-2 y 3) se excluyen ya que no existe el signo igual en la inecuación. Después de colocar estos valores se forman tres zonas que hemos representado por (I) ; (II) y (III)

A continuación se toma un valor cualquiera de la zona I y se reemplaza en el primer miembro; por ejemplo: x = -4

Donde: (x - 3) (x + 2) para: x = -4; resulta: (-4 -3) (-4 + 2) = 14 (positivo)

Luego: Toda la zona (I) es positiva

Se toma un valor de la zona II y se reemplaza en el primer miembro de la inecuación; por ejemplo: $x = 1$

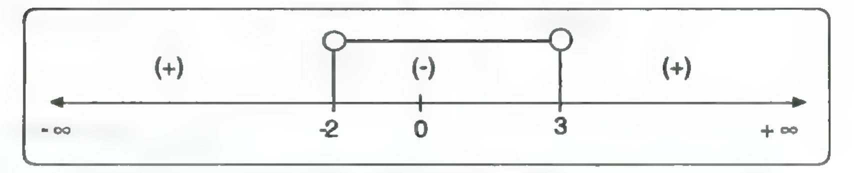
Donde: $(x - 3)(x + 2)$ para: $x = 1$; resulta: $(1 - 3)(1 + 2) = -6$ (Negativo)

Luego: Toda la zona (II) es negativa

Se toma un valor de la zona III y se reemplaza en el primer miembro de la inecuación; por ejemplo: $x = 5$

Donde: $(x - 3)(x + 2)$ para: $x = 5$; resulta: $(5 - 3)(5 + 2) = 14$ (Positivo)

Luego: Toda la zona (III) es positiva



Como la inecuación es $(x-3)(x+2) < 0$; nos interesa las zonas negativas vale decir la zona II.

Luego: **La respuesta es:** $x \in \langle -2 ; 3 \rangle$

Ejemplo (2): Resolver: $x^2 - 7 > 1 - 2x$

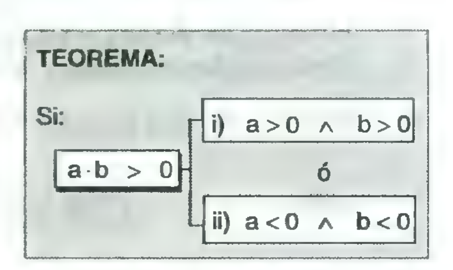
Resolución:

Transponiendo términos se obtiene: $x^2 + 2x - 8 > 0$

a) Método de Factorización:

Factorizando el primer miembro se obtiene: $(x + 4)(x - 2) > 0$

Por teorema:



i) $(x+4) > 0 \quad \wedge \quad (x-2) > 0$

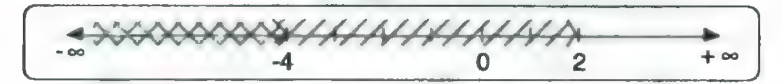
$x > -4 \quad \cap \quad x > 2$

$-\infty$ -4 0 2 $+\infty$

Conjunto Solución 1: $C.S_1 = x \in \langle 2 ; \infty \rangle$

ii) $(x+4) < 0 \quad \wedge \quad (x-2) < 0$

$x < -4 \quad \cap \quad x < 2$



Conjunto Solución 2: $C.S_2 = x \in \langle -\infty ; -4 \rangle$

Luego, conjunto solución de la inecuación: $x^2 - 7 > 1 - 2x$; será:

Conjunto Solución = $C.S_2 \cup C.S_1 : x \in \{\langle -\infty ; -4 \rangle \cup \langle 2 ; \infty \rangle\}$

b) Método de Completar el Cuadrado:

La inecuación: $x^2 - 7 > 1 - 2x$; se puede escribir como:

$$x^2 + 2x > 8$$

→ mitad de 2 es 1; el cuadrado de $1 = 1^2 = 1$

Luego, sumamos y restamos 1 al primer miembro:

$x^2 + 2x + 1 - 1 > 8 \Rightarrow (x+1)^2 - 1 > 8$ Donde: $(x+1)^2 > 9$

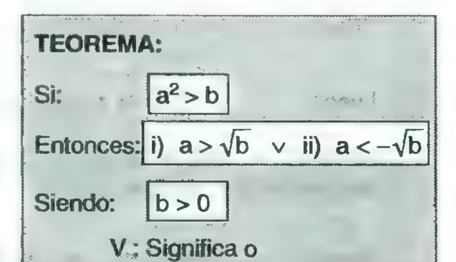
Por teorema:

i) $x+1 > \sqrt{9} \quad \vee \quad$ ii) $x+1 < -\sqrt{9}$

$x+1 > 3 \qquad x+1 < -3$

$x > 2 \quad \cup \quad x < -4$

$x \in \langle 2 ; \infty \rangle \quad \cup \quad x \in \langle -\infty ; -4 \rangle$



$\therefore$ Conjunto Solución: $x \in \{\langle -\infty ; -4 \rangle \cup \langle 2 ; \infty \rangle\}$

c) **Método de los Puntos Críticos**

$$x^2 - 7 > 1 - 2x \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2x - 8 > 0$$

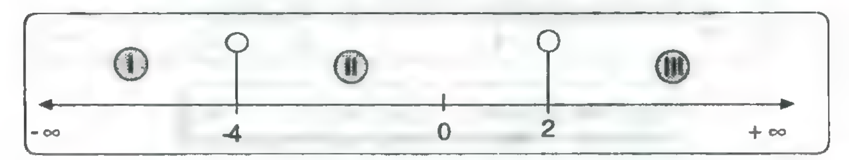
$$(x+4)\ (x-2) > 0$$

$x^2 + 2x - 8 = (x+4)\ (x-2)$

x +4

x -2

- A continuación se encuentran aquellos valores de "x" que anulan a los factores (x + 4) (x - 2), siendo estos: **x = -4 y x = 2 (puntos críticos)**; colocándolos en la recta numérica.



Nótese que ambos valores (-4 y 2) se excluyen ya que no existe el signo igual en la inecuación. Después de colocar estos valores se forman tres zonas que hemos representado por I, II y III.

A continuación se toma un valor cualquiera de la zona I y se reemplaza en el primer miembro de la inecuación; por ejemplo: $x = -5$

Donde: $(x + 4)\ (x - 2) = (-5 + 4)\ (-5 - 2) = 7$ ***(Positivo)***

Luego: Toda la zona I es positiva

Se toma un valor de la zona II y se reemplaza en el primer miembro de la inecuación; por ejemplo: $x = -2$

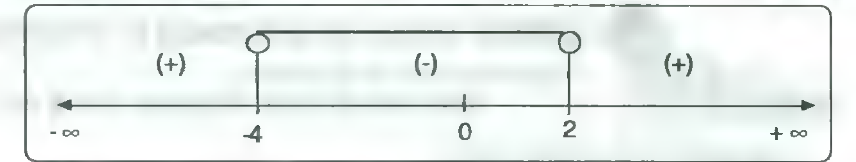
Donde: $(x + 4)\ (x - 2) = (-2 + 4)\ (-2 -2) = -8$ ***(Negativo)***

Luego: Toda la zona II es negativa.

Se toma un valor de la zona III y se reemplaza en el primer miembro de la inecuación; por ejemplo: $x = 6$

Donde: $(x + 4)\ (x - 2) = (6 + 4)\ (6 - 2) = 40$ ***(Positivo)***

Luego: Toda la zona III es positiva



Como la inecuación es: $(x + 4)(x - 2) > 0$; nos interesan las zonas positivas vale decir las zonas (I) y (III).

Luego: **La respuesta es:** $\langle -\infty ; -4 \rangle \cup \langle 2 ; \infty \rangle$

TALLER DE EJERCICIOS Nº 52

- Halla el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

1. $x^2 + 5x - 14 > 0$	**2.** $x^2 - x - 12 > 0$
3. $x^2 + 8x + 15 < 0$	**4.** $x^2 - 4x - 21 < 0$
5. $-2x^2 + 3x - 1 > 0$	**6.** $x(3x + 2) < (x + 2)^2$
7. $3x^2 - 7x + 4 > 0$	**8.** $4x^2 - 2x > x + 1$
9. $3x^2 - 5 < 2x$	**10.** $4x^2 + 1 < 8x$

RESPUESTAS TALLER 52

1. $\langle -\infty ; -7 \rangle \cup \langle 2 ; +\infty \rangle$	**2.** $\langle -\infty ; -3 \rangle \cup \langle 4 ; +\infty \rangle$
3. $\langle -5 ; -3 \rangle$	**4.** $\langle -3 ; 7 \rangle$
5. $\langle 1/2 ; 1 \rangle$	**6.** $\langle -1 ; 2 \rangle$
7. $\langle -\infty ; 1 \rangle \cup \langle 4/3 ; \infty \rangle$	**8.** $\langle -\infty ; -1/4 \rangle \cup \langle 1 ; +\infty \rangle$
9. $\langle -1 ; 5/3 \rangle$	**10.** $\left\langle \frac{2-\sqrt{3}}{2} ; \frac{2+\sqrt{3}}{2} \right\rangle$

EJERCICIOS TOMADOS EN LOS CONCURSOS DE MATEMÁTICA

Organizados por las Academias:
César Vallejo, Trilce, Pitágoras. Sigma, Alfa.

1. ¿Cuál es el mayor valor entero que puede tomar "x" en:

$$\frac{5x+2}{5} > \frac{4}{3}(1+x) < 11+2x?$$

A) -1 **B)** -3 **C)** 5 **D)** -9 **E)** 6

Resolución:

• Dando común denominador, obtenemos:

$$\frac{3\ (5x+2)}{15} > \frac{20\ (1+x)}{15} < \frac{15\ (11+2x)}{15}$$

• Quitando los denominadores, resulta:

$$3\ (5x+2) > 20\ (1+x) < 15\ (11+2x)$$

$$\underbrace{15x+6 > 20+20x}_{(1)} \quad \underbrace{20+20x < 165+30x}_{(2)}$$

De (1): $15x+6 > 20+20x$; transponemos términos:

$$6-20 > 20x-15x$$

$$-14 > 5x \Rightarrow x < \frac{-14}{5} \Rightarrow \therefore \boxed{x<-2,8}$$

De (2): $20+20x < 165+30x$; transponemos términos:

$$20-165 < 30x-20x$$

$$-145 < 10x \Rightarrow x > \frac{-145}{10} \Rightarrow \therefore \boxed{x>-14,5}$$

* De las expresiones: x < -2,8 y x > -14,5 el mayor valor entero que puede tomar "x" es: -3

Rpta. B

2. Después de resolver: (x + 3) (x - 5) + 3 (x - 3) > (x - 5) (x + 5). La solución de "x" es:

A) IR **B)** ϕ **C)** IR^+ **D)** IR^- E) <-1; ∞>

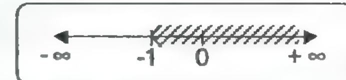
Resolución:

Efectuando los productos indicados; obtenemos:

$\cancel{x^2} - 2x - 15 + 3x - 9 > \cancel{x^2} - 25$; transponemos términos.

$$-2x + 3x > -25 + 15 + 9$$

$$\therefore \quad x > -1$$



Luego: El conjunto solución es: <-1; ∞> **Rpta. E**

3. La solución de la inecuación: $3 + \frac{x-3}{6} > \frac{x+5}{3} - 2\frac{1}{3}$; es:

A) x > 19 **B)** x > 21 **C)** x < 21 **D)** x < 19 **E)** x < 25

Resolución:

La inecuación: $3 + \frac{x-3}{6} > \frac{x+5}{3} - 2\frac{1}{3}$; se puede escribir de la manera siguiente: $3 + \frac{x-3}{6} > \frac{x+5}{3} - \frac{7}{3}$

Dando común denominador, obtenemos:

$$\frac{6 \cdot 3 + (x-3)}{6} > \frac{2\ (x+5) - 2\ (7)}{6}$$

Quitando los denominadores, resulta:

$$6 \cdot 3 + (x-3) > 2\ (x+5) - 2\ (7)$$

$$18 + x - 3 > 2x + 10 - 14 \text{ ; transponemos términos}$$

$$18 - 3 - 10 + 14 > 2x - x$$

$$19 > x \Rightarrow x < 19$$ **Rpta. D**

4. Resolver: $a(x-b) - b(x-a) \geq a^2 - b^2$. Si además: $a < b$.

A) $x \geq a$ **B)** $x \geq b$ **C)** $x \geq a+b$ **D)** $x \geq a-b$ **E)** $x \leq a+b$

Resolución:

Efectuando los productos indicados, resulta:

$$ax - ab - bx + ab \geq \underbrace{a^2 - b^2}$$

$$x(a-b) \geq (a+b)(a-b)$$

$$\therefore \boxed{x \geq a+b} \quad \textbf{Rpta. C}$$

5. Hallar todos los valores enteros y positivos de "x" que satisfagan a la inecuación siguiente: $(6x-2)\dfrac{5}{8} - \left(1-\dfrac{2x}{3}\right)\dfrac{7}{3} < 4x + \left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{5}{12}\right)\dfrac{2}{3}$

A) 10 **B)** 15 **C)** 9 **D)** 6 **E)** 22

Resolución:

La inecuación se puede escribir de la manera siguiente:

$$\frac{5\ (6x-2)}{8} - \frac{7}{3}\left(\frac{3-2x}{3}\right) < 4x + \frac{2}{3}\left(\frac{6x-5}{12}\right)$$

$$\frac{5\ (6x-2)}{8} - \frac{7}{9}(3-2x) < 4x + \frac{6x-5}{18}$$

Damos común denominador: $\dfrac{45\ (6x-2) - 56\ (3-2x)}{72} < \dfrac{288x + 4\ (6x-5)}{72}$

Quitamos los denominadores:

$$270x - 90 - 168 + 112x < 288x + 24x - 20$$

$$382x - 258 < 312x - 20$$

$$70x < 238 \Rightarrow \boxed{x < 3{,}4}$$

Los valores enteros y positivos que toma "x" son: 3; 2; 1 y 0.

Luego: **La suma de dichos valores enteros es: 6** **Rpta. D**

6. El doble de un número entero, más 5 es mayor que 50 y el triple del número, disminuido en 2 puede ser hasta 67. Calcular la suma de las cifras del número.

A) 22 **B)** 5 **C)** 7 **D)** 4 **E)** 2

Resolución:

Sea el número pedido = x

• **De acuerdo al enunciado:** planteamos las siguientes inecuaciones:

*) $2x + 5 > 50 \Rightarrow 2x > 45 \Rightarrow \therefore \boxed{x > 22{,}5}$

**) $3x - 2 \leq 67 \Rightarrow 3x \leq 69 \Rightarrow \therefore \boxed{x \leq 23}$

• De las expresiones: $x > 22{,}5$ y $x \leq 23$; el valor que toma "x" es 23.

$\therefore$ La suma de las cifras del número: 23 es: 5 **Rpta. B**

7. Resolver: $(x^2 + 1)(x + 2) \leq x^3 + 2(x - 3)(x + 3)$

A) $x \leq -18$ **B)** $x \leq -20$ **C)** $x \leq -16$ **D)** $x \leq 22$ **E)** $x \leq 16$

Resolución:

• Efectuando los productos indicados; obtenemos:

$$\cancel{x^3} + 2x^2 + x + 2 \leq \cancel{x^3} + 2(x^2 - 9)$$

$$\cancel{2x^2} + x + 2 \leq \cancel{2x^2} - 18 \Rightarrow \therefore \boxed{x \leq -20}$$ **Rpta. B**

8. Para que valores de "x" se verifica la desigualdad: $1 < \dfrac{3x + 10}{x + 7} < 2$

A) $-3 < x < 4$ **B)** $-3 < 2x < 4$ **C)** $-3 < x < 2$ **D)** $-3/2 < x < 4$ **E)** $-3/2 < x < 2$

Resolución:

La desigualdad: $1 < \dfrac{3x + 10}{x + 7} < 2$; se puede escribir así:

$$1\,(x+7) < 3x+10 < 2\,(x+7)$$

$$\underbrace{x+7 < 3x+10}_{(1)} \quad \underbrace{3x+10 < 2x+14}_{(2)}$$

De la expresión 1: $x+7 < 3x+10$; transponemos términos:

$$7-10 < 3x-x$$

$$-3 < 2x \Rightarrow \therefore \boxed{-3/2 < x}$$

De la expresión 2: $3x+10 < 2x+14$; transponemos términos:

$$3x-2x < 14-10 \Rightarrow \therefore \boxed{x<4}$$

Luego; de las expresiones: $\boxed{-\frac{3}{2} < x}$ y $\boxed{x<4;}$

obtenemos: $\boxed{-\frac{3}{2} < x < 4}$ **Rpta. D**

9. Hallar un número de dos cifras sabiendo que la suma de sus cifras es mayor que 9, y que la diferencia entre la cifra de las decenas y el duplo de la que ocupa el lugar de las unidades, es mayor que 6.

A) 36 **B)** 57 **C)** 87 **D)** 91 **E)** 27

Resolución:

Sea: $\overline{d\mu}$ = número de dos cifras

• **De acuerdo al enunciado;** planteamos las inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{ll} *) & d+\mu > 9 \\ **) & d-2\mu > 6 \end{array}\right\} \text{ Restamos miembro a miembro (-M.A.M)}$$

-M.A.M.: $3\mu \geq 3 \Rightarrow \therefore \boxed{\mu \geq 1}$

• De las inecuaciones:

*) $d+\mu>9 \Rightarrow 2d+2\mu>18$

**) $d-2\mu>6 \Rightarrow d-2\mu>6$

Sumamos miembro a miembro

Σ M.A.M: $3d>24 \Rightarrow \therefore\ d>8$

Como "d" es mayor que 8, el único valor que puede tomar "d" es 9 $(d=9)$; mientras $u \geq 1$; los valores que toma "μ" son: 1; 2; 3; 4; ......; 9.

Luego: El número pedido de dos cifras es: $\overline{d\mu}=91$ **Rpta. D**

10. Resolver e indicar el menor valor de "x".

$$\frac{1}{3}(x-2)+\frac{1}{4}(x-1)+\frac{1}{6}(x+1) \geq \frac{1}{2}(11-x)$$

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

Resolución:

Dando común denominador; resulta:

$$\frac{4(x-2)+3(x-1)+2(x+1)}{12} \geq \frac{6(11-x)}{12}$$

Quitamos los denominadores:

$$4(x-2)+3(x-1)+2(x+1) \geq 6(11-x)$$

$$4x-8+3x-3+2x+2 \geq 66-6x \text{; transponemos términos:}$$

$$4x+3x+2x+6x \geq 66+8+3-2$$

$$15x \geq 75 \Rightarrow x \geq 5$$

Luego: El menor valor de "x" es: 5 **Rpta. C**

¿SABÍAS QUE...

$$100 = \begin{array}{l} 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \times 9 \\ 1 + 2 \times 3 + 4 \times 5 - 6 + 7 + 8 \times 9 \\ 1 + 2 \times 3 + 4 + 5 + 67 + 8 + 9 \\ 1 \times 2 + 34 + 56 + 7 - 8 + 9 \end{array}$$

Investiga sobre otros casos posibles.

....

....

Capítulo 5 Sistemas de Ecuaciones de Primer Grado

5.1 ECUACIONES SIMULTÁNEAS

Son dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas que ha de ser resueltas simultáneamente.

Las ecuaciones simultáneas forman un sistema de ecuaciones.

5.2 SISTEMA DE ECUACIONES

Sistema de ecuaciones es la reunión de varias ecuaciones simultáneas, en las cuales a cada incógnita corresponde el mismo valor.

Ejemplo de un sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 18 & \Rightarrow \textit{1ra. Ecuación} \\ 6x - 2y = 10 & \Rightarrow \textit{2da. Ecuación} \end{cases}$$

Este sistema tiene dos incógnitas que son "x" e "y"; consta también de dos ecuaciones en las cuales las incógnitas tienen el mismo valor.

5.2.1 ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS VARIABLES

Definición: La igualdad: $5x + 2y = 9$; es una ecuación de Primer Grado con dos variables o incógnitas.

Los dos miembros se hacen idénticos, si atribuimos a "x", por ejemplo, el valor 3 y a "y" el valor -3; pues resulta:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 9 \\ 5 \cdot 3 + 2(-3) = 15 - 6 = 9 \end{cases} \Rightarrow$$

El sistema de valores:

$x = 3$; $y = -3$

es una solución de la ecuación dada.

Es fácil ver que no es ésta la única solución de dicha ecuación, pues, a cada valor arbitrario que demos a "x" corresponderá otro valor determinado para "y" resultando por tanto, infinitas soluciones.

Así: haciendo:

$x = 1$	;	resulta $y = 2$ pues:	$5(1) + 2(2) = 9$
$x = 3$	;	resulta $y = -3$ pues:	$5(3) + 2(-3) = 9$
$x = -1$	;	resulta $y = 7$ pues:	$5(-1) + 2(7) = 9$
$x = -3$	;	resulta $y = 12$ pues:	$5(-3) + 2(12) = 9$
⋮		⋮	⋮

En General: Una ecuación de primer grado con dos variables tiene infinitas soluciones.

Se llama **solución** de una ecuación con varias variables o incógnitas a todo sistema de valores atribuidos a dichas variables, que convierte en una igualdad numérica.

5.2.2 GRÁFICA DE UNA ECUACIÓN DE PRIMER GRADO CON DOS VARIABLES

Sea la ecuación: $3x - y = 8$

a) Despejamos "y" en la ecuación: $3x - y = 8 \Rightarrow \boxed{y = 3x - 8}$

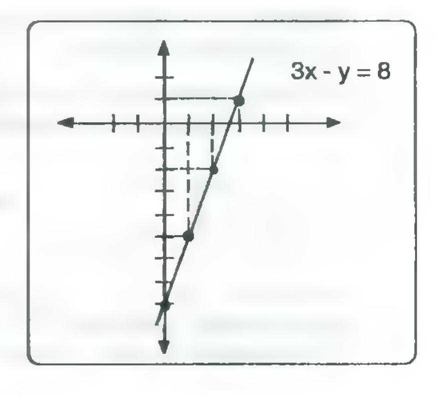
Damos valores arbitrarios a "x"; y hallando los correspondientes de "y" formamos el siguiente cuadro:

x	y = 3x - 8		Pares Ordenados
0	$y = 3(0) - 8 = -8$	➡	(0, -8)
1	$y = 3(1) - 8 = -5$	➡	(1, - 5)
2	$y = 3(2) - 8 = -2$	➡	(2, -2)
3	$y = 3(3) - 8 = 1$	➡	(3, 1)
-1	$y = 3(-1) - 8 = -11$	➡	(-1, -11)
⋮	⋮		⋮ ⋮

b) Marquemos en el sistema de Coordenadas Cartesianas los pares ordenados que se muestran en el cuadro.

c) La recta que pasa por estos puntos es la gráfica de la ecuación:

$$\boxed{3x - y = 8}$$



La gráfica de toda ecuación de primer grado con dos variables es, pues, una recta.

5.2.3 SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS VARIABLES

Sean las ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 3x - y &= 4 \quad ...(1) \\ x + 3y &= 8 \quad ...(2) \end{aligned}\right\}$$

Como sabe toda ecuación de primer grado con dos variables tiene infinitas soluciones.

Así, en las dos ecuaciones, despejamos "y".

De la ecuación **(1)**: $y = 3x - 4$

x	y = 3x - 4	
0	y = 3(0) - 4 = -4	➡ (0, -4)
1	y = 3(1) - 4 = -1	➡ (1, - 1)
2	y = 3(2) - 4 = -2	➡ **(2, 2)**
-1	y = 3(-1) - 4 = -7	➡ (-1, -7)
-2	y = 3(-2) - 4 = -10	➡ (-2, -10)
⋮	⋮	⋮ ⋮

De la ecuación **(2)**: $y = \frac{8-x}{3}$

x	$y = \frac{8-x}{3}$	
0	$y = \frac{8-0}{3} = \frac{8}{3}$	➡ $\left(0, \frac{8}{3}\right)$
1	$y = \frac{8-1}{3} = \frac{7}{3}$	➡ $\left(1, \frac{7}{3}\right)$
2	$y = \frac{8-2}{3} = 2$	➡ **(2, 2)**
-1	$y = \frac{8-(-1)}{3} = 3$	➡ (-1, 3)
-2	$y = \frac{8-(-2)}{3} = \frac{10}{3}$	➡ $\left(-2, \frac{10}{3}\right)$
⋮	⋮	⋮

Como se observará de los dos cuadros, la única solución que satisface simúltaneamente a las dos ecuaciones es:

(2, 2)

Entonces estas dos ecuaciones forman el **sistema de ecuaciones simultáneas.**

$$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ x + 3y = 8 \end{cases}$$

➡ ***Cuyo conjunto solución es:*** C.S. = {2; 2}

En General diremos:

Dos o más ecuaciones forman un sistema o son simultáneas cuando tienen las mismas soluciones.

5.2.4 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN SISTEMA DE DOS ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS VARIABLES

Resolver gráficamente el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Resolución:

a) Despejamos "y" en la primera ecuación: $y = 7 - 2x$

x	y = 7 - 2x	
0	y = 7 - 2(0) = 7	➡ (0, 7)
1	y = 7 - 2(1) = 5	➡ (1, 5)
2	y = 7 - 2(2) = 3	➡ **(2, 3)**
3	y = 7 - 2(3) = 1	➡ (3, 1)
-1	y = 7 - 2(-1) = 9	➡ (-1, 9)
⋮	⋮ ⋮	⋮ ⋮

Damos valores arbitrarios a "x", y hallando los correspondientes de "y" formamos el siguiente cuadro de valores:

- ***Estos pares ordenados son algunos de las tantas soluciones de la ecuación:***

$$2x + y = 7$$

Representando gráficametne obtenemos una línea recta ℓ_1. (Ver Fig. **(I)**)

b) Despejamos "y" en la segunda ecuación: $y = 2x - 1$; y damos valores:

x	y = 2x - 1	
0	y = 2(0) - 1 = -1	➡ (0, -1)
1	y = 2(1) - 1 = 1	➡ (1, 1)
2	y = 2(2) - 1 = 3	➡ **(2, 3)**
3	y = 2(3) - 1 = 5	➡ (3, 5)
-1	y = 2(-1) - 1 = -3	➡ (-1, -3)
⋮	⋮ ⋮	⋮ ⋮

- ***Estos pares ordenados son algunas de las tantas soluciones de la ecuación:***

$$2x - y = 1$$

Representando gráficametne obtenemos una línea recta ℓ_2.
(Ver Fig. **(I)**)

Las dos rectas se cortan en el punto **E(2, 3)** luego la solución del sistema es:

$x = 2$; $y = 3$

Ya que estos valores satisfacen las ecuaciones.

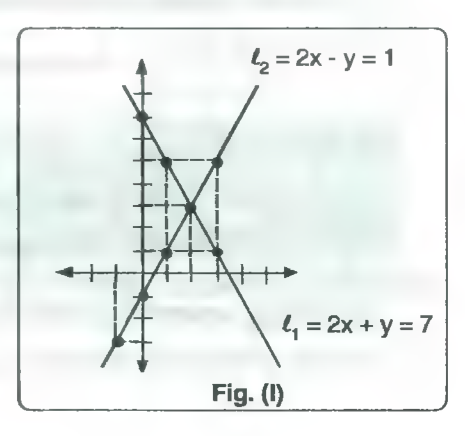


Fig. (I)

En General se tiene que:

- ❑ El conjunto de puntos de ℓ_1 son las soluciones de la primera ecuación.
- ❑ El conjunto de puntos de ℓ_2 son las soluciones de la segunda ecuación.
- ❑ La intersección de esas dos rectas es el punto **E**, solución del **sistema.**

5.2.5 FORMA GENERAL DE UN SISTEMA DE DOS ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS VARIABLES

Todo sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos variables o incógnitas tiene la siguiente forma general :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

En la cual:
a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 y c_2 son números reales

Son ejemplos de Sistemas de Ecuaciones de Primer Grado con dos variables:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 3y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - y = 8 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 7x - 5y = 2 \\ 8x - 3y = 5 \end{cases}$$

5.2.6 CONJUNTO SOLUCIÓN

El conjunto solución de un **Sistema** de dos ecuaciones de primer grado con dos variables, tiene como elementos a las soluciones comunes de dichas ecuaciones.

- ❑ El conjunto solución puede tener ***un sólo elemento*** (un sólo par ordenado). En este caso, se dice que el sistema es ***Consistente.***

Ejemplo:

$$\begin{cases} 3x - y = 5 \quad \text{.......... (1)} \\ x + y = 3 \quad \text{.......... (2)} \end{cases}$$

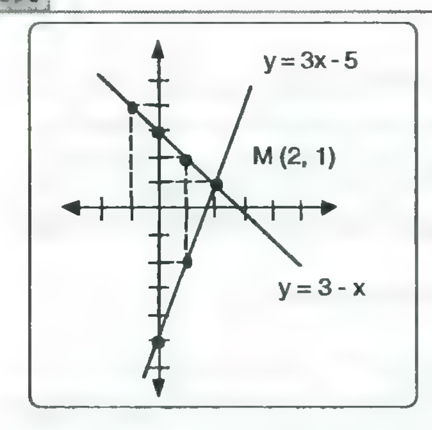
Resolución: De las dos ecuaciones despejamos "y"

De la ecuación (1): $y = 3x - 5$

x	$y = 3x - 5$	
0	$y = 3(0) - 5 = -5$	➠ (0, –5)
1	$y = 3(1) - 5 = -2$	➠ (1, –2)
2	$y = 3(2) - 5 = 1$	➠ (2, 1)
–1	$y = 3(-1) - 5 = -8$	➠ (–1, –8)
⋮	⋮	⋮

De la ecuación (2): $y = 3 - x$

x	$y = 3 - x$	
0	$y = 3 - 0 = 3$	➠ (0, 3)
1	$y = 3 - 1 = 2$	➠ (1, 2)
2	$y = 3 - 2 = 1$	➠ (2, 1)
–1	$y = 3 - (-1) = 4$	➠ (–1, 4)
⋮	⋮	⋮



- Las dos rectas se cortan en el punto M (2, 1) , luego la solución del sistema es:

  $\boxed{x = 2}$; $\boxed{y = 1}$

  Ya que estos valores satisfacen las dos ecuaciones.

> ❑❑ El conjunto solución puede tener infinitos elementos, esto sucede cuando el sistema es dependiente, vale decir; cuando las ecuaciones son equivalentes.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 3x - y = 1 & \text{.......... (I)} \\ 6x - 2y = 2 & \text{.......... (II)} \end{cases}$$

Resolución:

De las ecuaciones despejamos "y"

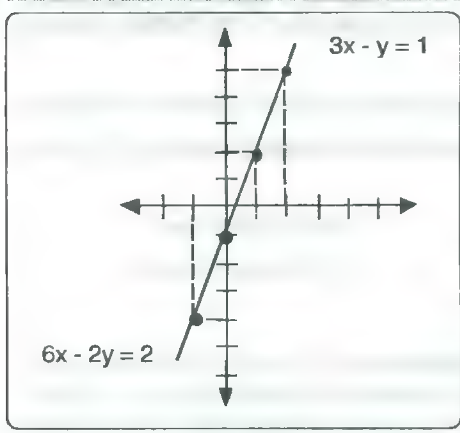
De la ecuación (I): $\boxed{y = 3x - 1}$

De la ecuación (II): $\boxed{y = \dfrac{6x - 2}{2}}$

x	$y = 3x - 1$	
0	$y = 3(0) - 1 = -1$	➡ (0, –1)
1	$y = 3(1) - 1 = 2$	➡ (1, 2)
2	$y = 3(2) - 1 = 5$	➡ (2, 5)
–1	$y = 3(-1) - 1 = -4$	➡ (–1, –4)
⋮	⋮	⋮

x	$y = \dfrac{6x - 2}{2}$	
0	$y = \dfrac{6(0) - 2}{2} = -1$	➡ (0, –1)
1	$y = \dfrac{6(1) - 2}{2} = 2$	➡ (1, 2)
2	$y = \dfrac{6(2) - 2}{2} = 5$	➡ (2, 5)
–1	$y = \dfrac{6(-1) - 2}{2} = -4$	➡ (–1, –4)
⋮	⋮	⋮

Como se observará las dos ecuaciones tienen los mismos pares ordenados.



- Las dos ecuaciones tienen como gráfica a una misma recta .
- Como las dos ecuaciones tienen las mismas soluciones, estas ecuaciones son equivalentes.

❑❑❑ El conjunto solución puede carecer de elementos (Conjunto Vacío). Cuando esto sucede se dice que el sistema es ***Inconsistente o Incompatible o Absurdo.***

Ejemplo:
$$\begin{cases} x + y = 3 \quad .... (1) \\ x + y = -1 \quad .... (2) \end{cases}$$

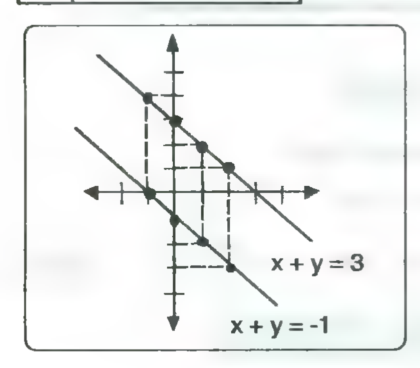
Resolución: De las dos ecuaciones despejamos "y"

De la ecuación (1): $y = 3 - x$

x	y = 3 – x	
0	y = 3 – 0 = 3	➠ (0, 3)
1	y = 3 – 1 = 2	➠ (1, 2)
2	y = 3 – 2 = 1	➠ (2, 1)
–1	y = 3 - (–1) = 4	➠ (-1, 4)
⋮	⋮	⋮

De la ecuación (2): $y = -1 - x$

x	y = –1 – x	
0	y = –1 – 0 = –1	➠ (0, –1)
1	y = –1 – 1 = –2	➠ (1, –2)
2	y = –1 – 2 = –3	➠ (2, –3)
–1	y = –1 – (–1) = 0	➠ (–1, 0)
⋮	⋮	⋮



- Las dos ecuaciones tienen como gráfica a dos rectas paralelas.
- Como se observará en la gráfica, las dos ecuaciones no tienen ningún punto en común.

5.2.7 RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE DOS ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS VARIABLES

- Resolver un Sistema de Ecuaciones, es hallar el conjunto solución del Sistema.
- Para resolver un Sistema de Ecuaciones puede utilizarse uno de los métodos siguientes:

a) Por reducción **b)** Por sustitución

c) Por igualación y **d)** Por determinantes.

A) Método de Reducción :

Consiste este método en conseguir, multiplicando por números convenientes, que una misma incógnita tenga coeficientes opuestos en ambas ecuaciones. Sumándolas después, se obtiene una ecuación con una sola incógnita. Resuelta esta ecuación y llevando el valor hallado a cualquiera de las ecuaciones primeras, se obtiene el valor de otra incógnita (***Este método se emplea con más frecuencia).***

Ejemplo: *Resolver el sistema:*

$$\begin{cases} 3x + 2y = 16 \text{ .... } (1) \\ 5x - 3y = -5 \text{ .... } (2) \end{cases}$$

Resolución:

1) Decidimos eliminar la variable "y"; para conseguirlo multiplicamos la primera ecuación por 3 y la segunda ecuación por 2, obteniendo así el Sistema Equivalente:

$$3x + 2y = 16 \ \Rightarrow \ \text{por } 3 \ \Rightarrow \ \boxed{9x + 6y = 48} \text{ .... } (3)$$

$$5x - 3y = -5 \ \Rightarrow \ \text{por } 2 \ \Rightarrow \ \boxed{10x - 6y = -10} \text{ .... } (4)$$

2) Sumamos miembro a miembro las ecuaciones **(3)** y **(4)**:

$$\begin{array}{r} 9x + \not{6y} = 48 \\ 10x - \not{6y} = -10 \\ \hline \end{array}$$

Σ **M.A.M** = Significa sumando miembro a miembro

Σ **M.A.M**: $19x = 38$

$$x = \frac{38}{19} = 2 \ \Rightarrow \ \therefore \ \boxed{x = 2}$$

3) Reemplazamos el valor de $\boxed{x = 2}$; en la ecuación **(1)**:

$$3x + 2y = 16 \ \Rightarrow \ 3(2) + 2y = 16 \ \Rightarrow \ 6 + 2y = 16$$

$$2y = 10 \ \Rightarrow \ y = \frac{10}{2} = 5 \ \Rightarrow \ \therefore \ \boxed{y = 5}$$

Rpta: *El conjunto solución del sistema es: C.S. = {2, 5}*

OTRA FORMA:

Resolver el sistema: $\begin{cases} 3x + 2y = 16 & \text{.......... (1)} \\ 5x - 3y = -5 & \text{.......... (2)} \end{cases}$

Resolución:

1) Decidimos eliminar la variable "x", para conseguirlo multiplicamos la primera ecuación por 5 y la segunda ecuación por –3, obteniendo así el sistema Equivalente:

$$3x + 2y = 16 \Rightarrow \text{por } 5 \Rightarrow \boxed{15x + 10y = 80} \text{ .... (3)}$$

$$5x - 3y = -5 \Rightarrow \text{por } -3 \Rightarrow \boxed{-15x + 9y = 15} \text{ .... (4)}$$

2) Sumamos miembro a miembro las ecuaciones **(3)** y **(4)**:

$$\left.\begin{array}{r} 15x + 10y = 80 \\ -15x + 9y = 15 \end{array}\right\}$$

$$\Sigma \text{ M.A.M: } \quad 19y = 95 \Rightarrow y = \frac{95}{19} = 5 \Rightarrow \therefore \boxed{y = 5}$$

3) Reemplazamos el valor de $\boxed{y = 5}$; en la ecuación **(1)**:

$$3x + 2y = 16 \Rightarrow 3x + 2(5) = 16 \Rightarrow 3x = 6$$

$$x = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 2}$$

Rpta: El conjunto solución del sistema es: C.S. = {2 , 5}

B) Método por Sustitución:

De una de las ecuaciones del sistema se despeja una variable o incógnita , por ejemplo la "y"; se sustituye la expresión que se obtiene en la otra ecuación, con lo que se obtiene otra ecuación en "x". Resuelta esta ecuación, se sustituye el valor de "x" hallado en la ecuación explicitada, con lo que se obtiene el valor de "y".

Ejemplo: Resolver el sistema: $\begin{cases} x - y = -1 & \text{.......... (1)} \\ 3x + 2y = 12 & \text{.......... (2)} \end{cases}$

Resolución:

1) En la primera ecuación despejamos "y", obteniendo: $\boxed{y = x + 1}$ .... **(3)**

2) Sustituyendo "y" en la ecuación **(2)**:

$$3x + 2(x + 1) = 12 \Rightarrow 3x + 2x + 2 = 12 \Rightarrow 5x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 2}$$

3) Reemplazamos el valor de $\boxed{x = 2}$; en la ecuación **(3)**:

$$y = 2 + 1 \Rightarrow \therefore \boxed{y = 3}$$

Rpta: El conjunto solución del Sistema es: c.s.= {2; 3}

C) Método de Igualación:

Consiste este método en despejar una misma variable en las dos ecuaciones e igualar las expresiones obtenidas, con lo que se elimina una incógnita, obteniendo así una tercera ecuación.

Se resuelve esta última ecuación y se obtiene el valor de una variable; el valor de la otra se halla por sustitución en cualquier ecuación del sistema.

Ejemplo: *Resolver el sistema:*
$$\begin{cases} 8x - 2y = 20 \text{ .... (I)} \\ 3x + 2y = 13 \text{ .... (II)} \end{cases}$$

Resolución:

1) Despejamos "y" en cada ecuación:

De la ecuación **(I)**: $y = \dfrac{8x \quad 20}{2}$	De la ecuación **(II)**: $y = \dfrac{13 - 3x}{2}$

2) Igualamos las segundas partes, obtenemos:

$$\boxed{\frac{8x - 20}{2} = \frac{13 - 3x}{2}}$$; simplificando los denominadores:

$8x - 20 = 13 - 3x$; transponemos términos:

$$8x + 3x = 13 + 20$$

$$11x = 33 \Rightarrow x = \frac{33}{11} = 3 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 3}$$

3) Reemplazamos el valor de $\boxed{x = 3}$; en la primera ecuación del sistema :

$$8x - 2y = 20 \Rightarrow 8(3) - 2y = 20 \Rightarrow 24 - 2y = 20$$

$$4 = 2y \Rightarrow \frac{4}{2} = y \Rightarrow \therefore \boxed{y = 2}$$

Rpta: El conjunto solución del sistema es: C.S. = {3; 2}

D) Método por Determinantes:

Para resolver un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos variables por determinantes, necesitamos conocer previamente dos conceptos fundamentales: El de **matriz** y el de **determinantes.**

5.3 MATRIZ

La definiremos como un conjunto de objetos ordenados en filas y columnas y encerrados entre corchetes o paréntesis.

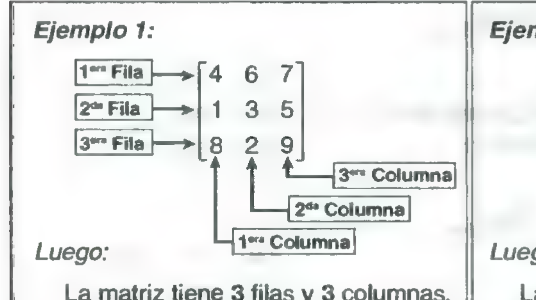
Ejemplos:

1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$	2) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$	3) $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$

5.3.1 ORDEN DE UNA MATRIZ

El orden de una matriz es el producto indicado del número de filas por el número de columnas de la matriz.

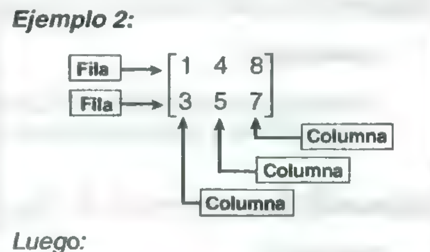
Ejemplo 1:



Luego:

La matriz tiene **3** filas y **3** columnas, entonces es de orden **3×3**.

Ejemplo 2:



Luego:

La matriz tiene **2** filas y **3** columnas, luego es de orden **2×3**.

5.3.2 ELEMENTOS DE UNA MATRIZ:

Los elementos de una matriz son los diversos objetos distribuidos en filas y columnas.

Ejemplo: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Sus elementos son: $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$

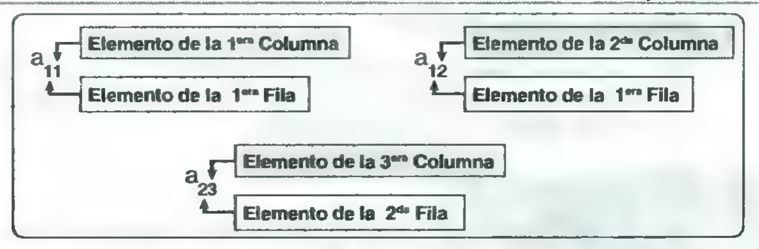
5.3.3 NOTACIÓN

Una matriz usualmente se denota por letra mayúscula A, B, C, etc, y sus elementos por letras minúsculas; a_{ij} ; b_{ij} ; c_{ij} ; etc.

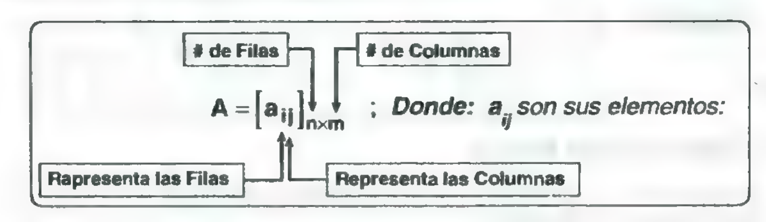
Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Donde:



Frecuentemente también se denota por:



Ejemplo (1): Escribir la matriz $A = [a_{ij}]_{3\times2}$

Resolución:

Como la matriz es de orden 3×2, quiere decir que hay 3 filas y 2 columnas, veamos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Ejemplo (2): Escribir la matriz $B = [a_{ij}]_{4\times3}$

Resolución:

Como la matriz es de orden 4×3, quiere decir que hay 4 filas y 3 columnas, veamos:

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}$$

Ejemplo (3): Sea:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 8 \\ 6 & 1 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Donde:

- El elemento a_{32} será: **0**
- El elemento a_{24} será: **6**
- El elemento a_{22} será: **1**
- El elemento a_{33} será: **7**

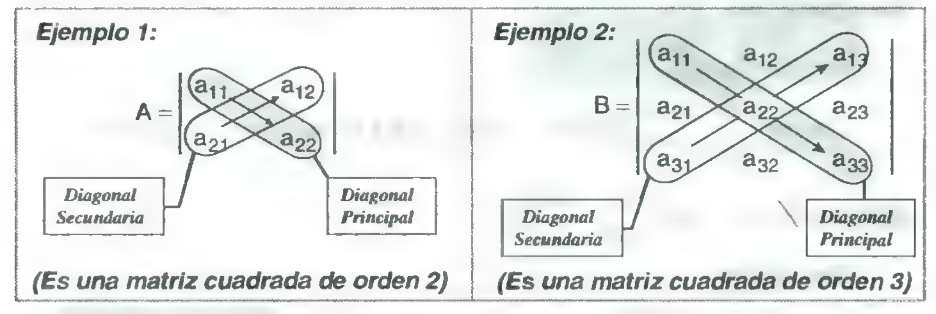
Observación:

Una matriz no tiene valor numérico es simplemente una manera conveniente de representar arreglos de números .

5.3.4 MATRIZ CUADRADA

Es aquella que tiene igual número de filas y columnas.

En una **matriz cuadrada**, la diagonal principal es la línea formada por los elementos: a_{11} ; a_{22} ; a_{33} ; .... ; a_{nn}



(Es una matriz cuadrada de orden 2) *(Es una matriz cuadrada de orden 3)*

5.4 DETERMINANTE

Se denomina determinante de una matriz cuadrada, al número que le corresponde a dicha matriz.

Al determinante de una matriz cuadrada **A** se le simboliza por $|\mathbf{A}|$.

Ejemplo: *Si la matriz es:* $A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ *; su determinante es:* $|A| = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

***)** A cada matriz cuadrada le corresponde como determinante un único número real.

****)** El procedimiento para obtener el determinante depende del orden de la matriz.

5.4.1 DETERMINANTE DE SEGUNDO ORDEN:

Es el desarrollo de la matriz cuadrada que tiene 2 filas y 2 columnas; está definido por el producto de los elementos de la diagonal principal menos el producto de elementos de la diagonal secundaria.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Recuerda que:

Producto Negativo

Producto Positivo

$|A| = a_1 b_2 - a_2 b_1$ ó $d(A) = a_1 b_2 - a_2 b_1$

* Al determinante de la matriz **A** se le denota por: $|\mathbf{A}|$ ó por **d(A)**.

Ejemplo 1 :Si: $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

Resolución:

$$|A|=\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}=3\times 8-4\times 7=-4 \Rightarrow \therefore \boxed{|A|=-4}$$

Ejemplo 2 :Si: $A=\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

Resolución:

$$|A|=\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}=(7)(5)-(-3)(2)=35+6=41 \Rightarrow \therefore \boxed{|A|=41}$$

Ejemplo 3 :Si: $B=\begin{bmatrix} 2 & 1/3 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$

Resolución:

$$|B|=\begin{bmatrix} 2 & 1/3 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}=(2)(-4)-(-6)\left(\frac{1}{3}\right)=-8+2=-6 \Rightarrow \therefore \boxed{|B|=-6}$$

Ahora veamos el proceso de resolución de un Sistema de dos ecuaciones empleando Determinantes.

Supongamos el Sistema de Ecuaciones de Primer Grado con coeficientes literales:

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{a_1x+b_1y=c_1} \text{ .... (1)} \\ \boxed{a_2x+b_2y=c_2} \text{ .... (2)} \end{array}\right\}$$

Se trata de resolver el Sistema de Ecuaciones:

a) Si multiplicamos la primera ecuación por b_2 y la segunda ecuación por $-b_1$, se obtiene el Sistema Equivalente :

$$\boxed{a_1b_2x+b_1b_2y=c_1b_2} \text{ .... (3)}$$

$$\boxed{-a_2b_1x-b_1b_2y=-c_2b_1} \text{ .... (4)}$$

b) Sumamos miembro a miembro las ecuaciones **(3)** y **(4)**; obteniendo :

$$a_1b_2x-a_2b_1x=c_1b_2-c_2b_1$$

$$x(a_1b_2-a_2b_1)=b_2c_1-b_1c_2$$

$$\boxed{x=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}}$$

c) Si multiplicamos la primera ecuación por a_2 y la segunda ecuación por $-a_1$, se obtiene el sistema equivalente :

$$a_1x + b_1y = c_1 \Rightarrow \boxed{a_1a_2x + a_2b_1y = a_2c_1} \quad .... (5)$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \Rightarrow \boxed{-a_1a_2x - a_1b_2y = -a_1c_2} \quad .... (6)$$

d) Sumamos miembro a miembro las ecuaciones **(5)** y **(6)**; obteniendo:

$$a_2b_1y - a_1b_2y = a_2c_1 - a_1c_2$$

$$y(a_2b_1 - a_1b_2) = a_2c_1 - a_1c_2$$

$$\boxed{y = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2}} \quad ó \quad \boxed{y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}}$$

Luego, expresamos en función de determinantes a :

Al determinante del denominador se le llama Determinante del Sistema, si éste es nulo , el sistema es Indeterminado.

$$\boxed{x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}} \Rightarrow x = \frac{\begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}} \Rightarrow y = \frac{\begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}}$$

5.4.2 REGLA DE CRAMER

"El valor de una de las variables o incógnitas es igual al cociente de dos determinantes , en el denominador aparece el determinante del sistema y en el numerador aparece también pero reemplazando los coeficientes de la incógnita por los términos independientes correspondientes.

Ejemplo (1):
Halla por determinantes, el conjunto solución del sistema:

$$\begin{cases} 5x + 2y = \boxed{39} \\ 3x - 5y = \boxed{11} \end{cases}$$

Resolución:

Aplicando la **Regla de Cramer** se procede de la manera siguiente :

1º) Se halla el determinante del sistema **d(s)**.

$$d(s) = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = (5)(-5) - (3)(2) = -25 - 6 = -31 \Rightarrow \therefore \boxed{d(s) = -31}$$

2º) Se halla el determinante que corresponde a la variable "x".

$$d(x)=\begin{bmatrix} 39 & 2 \\ 11 & -5 \end{bmatrix}=(39)(-5)-(11)(2)=-195-22=-217 \Rightarrow \therefore \boxed{d(x)=-217}$$

3º) Se halla el determinante que corresponde a la variable "y".

$$d(y)=\begin{bmatrix} 5 & 39 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}=(5)(11)-(3)(39)=55-117=-62 \Rightarrow \therefore \boxed{d(y)=-62}$$

4º) El valor de la variable "x" se halla dividiendo el determinante que corresponde a la variable "x" entre el determinante del sistema:

O sea: $x=\dfrac{d(x)}{d(s)} \Rightarrow x=\dfrac{-217}{-31} \Rightarrow \therefore \boxed{x=7}$

5º) El valor de la variable "y" se halla dividiendo el determinante que corresponde a la variable "y" entre el determinante del sistema.

O sea: $y=\dfrac{d(y)}{d(s)} \Rightarrow y=\dfrac{-62}{-31} \Rightarrow \therefore \boxed{y=2}$

Rpta: El conjunto solución del sistema es: C. S. = {7 , 2}

Ejemplo 2:
Halla por determinantes el conjunto solución del sistema: $\begin{cases} 8x+y=21 \\ 9x-2y=-7 \end{cases}$

Resolución:

Aplicando la **Regla de Cramer**, tenemos que :

$$x=\dfrac{\begin{bmatrix} 21 & -1 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 9 & -2 \end{bmatrix}}=\dfrac{(21)(-2)-(-7)(-1)}{(8)(-2)-(9)(-1)}=\dfrac{-42-7}{-16+9}=\dfrac{-49}{-7} \Rightarrow \therefore \boxed{x=7}$$

$$y=\dfrac{\begin{bmatrix} 8 & 21 \\ 9 & -7 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 9 & -2 \end{bmatrix}}=\dfrac{(8)(-7)-(9)(21)}{-7}=\dfrac{-56-189}{-7}=\dfrac{-245}{-7} \Rightarrow \therefore \boxed{y=35}$$

Rpta: El conjunto solución del sistema: {7, 35}

Ejemplo ③:

Hallar por determinantes el conjunto solución del sistema:
$$\begin{cases} 10x + 4y = \boxed{3} \\ -5x + 20y = \boxed{4} \end{cases}$$

Resolución:

Aplicando la **Regla de Cramer**, obtenemos que:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & 4 \\ -5 & 20 \end{vmatrix}} = \frac{(3)(20)-(4)(4)}{(10)(20)-(-5)(4)} = \frac{60-16}{200+20} = \frac{44}{220} = \frac{1}{5} \Rightarrow \therefore \boxed{x = \frac{1}{5}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & 4 \\ -5 & 20 \end{vmatrix}} = \frac{(10)(4)-(-5)(3)}{(10)(20)-(-5)(4)} = \frac{40+15}{200+20} = \frac{55}{220} = \frac{1}{4} \Rightarrow \therefore \boxed{y = \frac{1}{4}}$$

Rpta: El conjunto solución del sistema es: C.S. = {1/5 ; 1/4}

Ejemplo ④:

Hallar por determinantes el conjunto solución del sistema:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y = \boxed{1} \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = \boxed{5} \end{cases}$$

Resolución:

Aplicando la **Regla de Cramer** , obtenemos que :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{3}{4} \\ 5 & -\frac{1}{4} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{vmatrix}} = \frac{(1)\left(-\frac{1}{4}\right)-(5)\left(-\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{-\frac{1}{4}+\frac{15}{4}}{-\frac{1}{6}+\frac{3}{8}} = \frac{\frac{14}{4}}{\left(\frac{-4+9}{24}\right)} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{5}{24}}$$

$$x = \frac{7 \cdot \cancel{24}}{5 \cdot \cancel{2}} = \frac{7 \cdot 12}{5} \Rightarrow \therefore \boxed{x = \frac{84}{5}}$$

$$y=\frac{\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & 1\\ \frac{1}{2} & 5\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{3}{4}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)(5)-\left(\frac{1}{2}\right)(1)}{\frac{5}{24}}=\frac{\frac{10}{3}-\frac{1}{2}}{\frac{5}{24}}=\frac{\left(\frac{20-3}{6}\right)}{\frac{5}{24}}=\frac{\frac{17}{6}}{\frac{5}{24}}$$

$$y=\frac{17\cdot 24}{5\cdot 6}=\frac{17\cdot 4}{5}\Rightarrow \therefore\ \boxed{y=\frac{68}{5}}$$

Rpta: El conjunto solución del sistema es: $C.S.=\left\{\frac{84}{5};\frac{68}{5}\right\}$

Ejemplo (5):
Hallar por determinantes el conjunto solución del sistema: $\begin{cases}0{,}3x-y=1{,}2\\ 0{,}4x+y=3\end{cases}$

Resolución:

Aplicando la Regla de Cramer, obtenemos que :

$$x=\frac{\begin{bmatrix}1{,}2 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}0{,}3 & -1\\ 0{,}4 & 1\end{bmatrix}}=\frac{(1{,}2)(1)-(3)(-1)}{(0{,}3)(1)-(0{,}4)(-1)}=\frac{1{,}2+3}{0{,}3+0{,}4}=\frac{4{,}2}{0{,}7}=\frac{42}{7}=6\Rightarrow\ \therefore\ x=6$$

$$y=\frac{\begin{bmatrix}0{,}3 & 1{,}2\\ 0{,}4 & 3\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}0{,}3 & -1\\ 0{,}4 & 1\end{bmatrix}}=\frac{(0{,}3)(3)-(0{,}4)(1{,}2)}{(0{,}3)(1)-(0{,}4)(-1)}=\frac{0{,}9-0{,}48}{0{,}7}=\frac{0{,}42}{0{,}7}=\frac{42}{70}=\frac{3}{5}\Rightarrow\ \therefore\ y=\frac{3}{5}$$

Rpta: El conjunto solución del sistema es: $C.S.=\left\{6;\frac{3}{5}\right\}$

Ejemplo (6):
Hallar por determinantes el conjunto solución del sistema: $\begin{cases}\frac{2}{5}x-\frac{3}{2}y=5\\ \frac{4}{5}x-\frac{5}{2}y=9\end{cases}$

Resolución:

Aplicando la **Regla de Cramer**,obtenemos que:

$$x=\frac{\begin{bmatrix}5 & -\frac{3}{2}\\ 9 & -\frac{5}{2}\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{3}{2}\\ \frac{4}{5} & -\frac{5}{2}\end{bmatrix}}=\frac{(5)\left(-\frac{5}{2}\right)-(9)\left(-\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)-\left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}=\frac{-\frac{25}{2}+\frac{27}{2}}{-1+\frac{6}{5}}=\frac{\frac{2}{2}}{\frac{1}{5}}=5 \Rightarrow \therefore \boxed{x=5}$$

$$y=\frac{\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & 5\\ \frac{4}{5} & 9\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{3}{2}\\ \frac{4}{5} & -\frac{5}{2}\end{bmatrix}}=\frac{\left(\frac{2}{5}\right)(9)-\left(\frac{4}{5}\right)(5)}{\frac{1}{5}}=\frac{\frac{18}{5}-\frac{20}{5}}{\frac{1}{5}}=\frac{-\frac{2}{5}}{\frac{1}{5}}=-2 \Rightarrow \therefore \boxed{y=-2}$$

Rpta: El conjunto solución del sistema es: C.S. = {5 , -2}

5.5 RESOLUCIÓN DE OTROS TIPOS DE SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS VARIABLES

1. Resolver el sistema:
$$\begin{cases} 2(2x-5)+3y=-10 \quad \text{.......... (1)} \\ 4(8-3x)+3(15-2y)=41 \quad \text{.......... (2)} \end{cases}$$

Resolución:

Efectuamos los productos indicados en cada ecuación dada :

$$2(2x-5)+3y=-10$$

$$4x-10+3y=-10 \Rightarrow \boxed{4x+3y=0} \quad \text{.......... (I)}$$

$$4(8-3x)+3(15-2y)=41$$

$$32-12x+45-6y=41 \Rightarrow \boxed{-12x-6y=-36} \quad \text{.......... (II)}$$

- De la ecuación **(I)**; despejamos "y"

$$4x+3y=0 \Rightarrow \boxed{y=-\frac{4}{3}x} \quad \text{.......... (III)}$$

- En la ecuación **(II)**, sacamos sexta a cada término, obteniendo:

$$-12x-6y=-36 \Rightarrow -2x-y=-6$$

Cambiamos de signo a sus términos, quedando así:

$$\boxed{2x + y = 6} \quad \text{.........} \ \textbf{(IV)}$$

Sustituimos la **(III)** en **(IV)**:

$$2x + \left(-\frac{4}{3}x\right) = 6 \Rightarrow 6x - 4x = 18 \Rightarrow 2x = 18 \Rightarrow x = \frac{18}{2} = 9$$

$$\therefore \ \boxed{x = 9}$$

Reemplazamos el valor de $\boxed{x = 9}$ en **(III)**:

$$y = -\frac{4}{3}(9) \Rightarrow y = -4(3) = -12 \Rightarrow \therefore \ \boxed{y = -12}$$

Rpta: El conjunto solución del sistema es: C.S. = {9 , –12}

2. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x+5}{2} + \dfrac{2(y-1)}{3} = x + \dfrac{y}{2} \quad \text{.........} \ \textbf{(1)} \\[2ex] \dfrac{3x-1}{4} + \dfrac{y+10}{5} = x + 2 \quad \text{.........} \ \textbf{(2)} \end{cases}$$

Resolución:

En la ecuación **(1)** y **(2)**, aplicamos: $\boxed{\dfrac{A}{B} + \dfrac{C}{D} = \dfrac{A \cdot D + C \cdot B}{B \cdot D}}$

Obteniendo De **(1)**:

$$\frac{3(x+5) + 2 \cdot 2(y-1)}{\not{2} \cdot 3} = \frac{2x + y}{\not{2}}$$; simplificamos los "2"en los denominadores.

$$\frac{3x + 15 + 4y - 4}{3} = 2x + y \Rightarrow 3x + 4y + 11 = 3(2x + y)$$

$$3x + 4y + 11 = 6x + 3y$$

$$\boxed{11 = 3x - y} \quad \text{..........} \ \textbf{(I)}$$

Obteniendo De **(2)**:

$$\frac{5(3x-1) + 4(y+10)}{4 \cdot 5} = x + 2$$

$$\frac{15x - 5 + 4y + 40}{20} = x + 2 \Rightarrow 15x + 4y + 35 = 20(x + 2)$$

$$15x + 4y + 35 = 20x + 40$$

$$\boxed{-5 = 5x - 4y} \quad \text{..........} \ \textbf{(II)}$$

De la ecuación **(I)** despejamos "y" :

$$\boxed{y = 3x - 11} \text{ .... (III)}$$

Sustituimos **(III)** en **(II)**:

$$-5 = 5x - 4(3x - 11) \Rightarrow -5 = 5x - 12x + 44$$

$$7x = 49 \Rightarrow x = \frac{49}{7} = 7 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 7}$$

Reemplazamos el valor de $\boxed{x = 7}$ en la ecuación **(III)**:

$$y = 3(7) - 11 \Rightarrow \therefore \boxed{y = 10}$$

Rpta: El conjunto solución del sistema es: C.S. = {7; 10}

3. Resolver el sistema :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{y} = \dfrac{-5}{3} & \text{.......... (1)} \\ \dfrac{4}{x} + \dfrac{6}{y} = \dfrac{1}{3} & \text{.......... (2)} \end{cases}$$

Resolución:

1º) Decidimos eliminar la variable "y"; para conseguirlo multiplicamos la primera ecuación por 3.

$$\frac{1}{x} - \frac{2}{y} = \frac{-5}{3} \xrightarrow{\textbf{Por 3}} \frac{3}{x} - \frac{\not 6}{\not y} = -\frac{15}{3} \text{ .... (3)}$$

$$\frac{4}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{3} \longrightarrow \frac{4}{x} + \frac{\not 6}{\not y} = \frac{1}{3} \text{ .... (4)}$$

$$\Sigma \textbf{ M.A.M: } \frac{7}{x} = \frac{-14}{3} \Rightarrow \frac{7 \cdot 3}{-14} = x \Rightarrow \therefore \boxed{-\frac{3}{2} = x}$$

Reemplazamos el valor de $\boxed{x = -\frac{3}{2}}$; en la ecuación **(1)**:

$$\frac{1}{\left(-\frac{3}{2}\right)} - \frac{2}{y} = -\frac{5}{3} \Rightarrow -\frac{2}{3} - \frac{2}{y} = -\frac{5}{3} \Rightarrow -\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{2}{y}$$

$$1 = \frac{2}{y} \Rightarrow \therefore \boxed{y = 2}$$

Rpta: El conjunto solución del sistema es: C.S. = $\left\{-\frac{3}{2};\ 2\right\}$

(4) Resolver el sistema:
$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{y+1}=\dfrac{3}{2} & \text{.......... (1)} \\[2ex] \dfrac{5-y}{x-1}=\dfrac{1}{2} & \text{.......... (2)} \end{cases}$$

Resolución:

De la ecuación **(1)**, se obtiene:

$$2(x+1)=3(y+1) \Rightarrow 2x+2=3y+3 \Rightarrow \therefore \boxed{x=\frac{3y+1}{2}} \text{ .... (3)}$$

De la ecuación **(2)** se obtiene :

$$2(5-y)=1(x-1) \Rightarrow 10-2y=x-1 \Rightarrow \therefore \boxed{x=11-2y} \text{ .... (4)}$$

Igualamos las ecuaciones **(3)** y **(4)** :

$$\frac{3y+1}{2}=11-2y \Rightarrow 3y+1=22-4y \Rightarrow y=\frac{21}{7} \Rightarrow \therefore \boxed{y=3}$$

Reemplazamos el valor de $\boxed{y=3}$; en la ecuación **(4)**:

$$x=11-2(3) \Rightarrow \therefore \boxed{x=5}$$

Rpta: El conjunto solución del sistema es: C.S. = {5; 3}

Caso Particular:

Cuando las incógnitas de un sistema se encuentran en los denominadores, el sistema se resuelve por medio del método de la reducción o también por un método particular en el que no se suprimen sus denominadores sino que se adoptan otras incógnitas en vez de "$\frac{1}{x}$" y "$\frac{1}{y}$".

Ejemplo (1): Resuelve el sistema:
$$\begin{cases} \dfrac{6}{x}+\dfrac{12}{y}=7 & \text{.......... (1)} \\[2ex] \dfrac{8}{x}-\dfrac{6}{y}=2 & \text{.......... (2)} \end{cases}$$

Resolución:

Las ecuaciones dadas , se pueden escribir así:

$$\boxed{6\left(\frac{1}{x}\right)+12\left(\frac{1}{y}\right)=7} \text{ .... (1)} \qquad \boxed{8\left(\frac{1}{x}\right)-6\left(\frac{1}{y}\right)=2} \text{ .... (2)}$$

Hacemos que: $\boxed{\frac{1}{x}=a}$ y $\boxed{\frac{1}{y}=b}$

Luego, las ecuaciones dadas toman la siguiente forma :

$$\boxed{6a+12b=7} \quad .... \textbf{(I)}$$

$$\boxed{8a-6b=2} \quad .... \textbf{(II)}$$

Multiplicamos "×**2**" a cada uno de los términos de la ecuación (II) ; obteniendo:

$$\boxed{16a-12b=4} \quad .... \textbf{(III)}$$

Sumamos miembro a miembro las ecuaciones **(I)** y **(III)** :

$$6a+12b=7 \quad .... \textbf{(I)}$$

$$16a-12b=4 \quad .... \textbf{(III)}$$

$$\Sigma\ \textbf{M.A.M:} \quad 22a=11 \Rightarrow a=\frac{11}{22} \Rightarrow \therefore \ a=\frac{1}{2}$$

Reemplazamos el valor de $\boxed{a=\frac{1}{2}}$, en la ecuación **(I)**:

$$6\left(\frac{1}{2}\right)+12b=7 \Rightarrow 12b=4 \Rightarrow \therefore \ b=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

Luego, hallamos los valores de "**x**" e "**y**"

$\frac{1}{x}=a \Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{1}{2} \Rightarrow \therefore \ x=2$	$\frac{1}{y}=b \Rightarrow \frac{1}{y}=\frac{1}{3} \Rightarrow \therefore \ y=3$

Rpta: El conjunto solución del sistema es: C.S. = { 2; 3 }

Ejemplo 2 **:**Resolver el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{24}{x}+\dfrac{33}{y}=15 & .... \textbf{(1)} \\ \dfrac{12}{x}-\dfrac{3}{y}=1 & .... \textbf{(2)} \end{cases}$$

Resolución:

Las ecuaciones dadas , se pueden escribir así:

$$\boxed{24\left(\frac{1}{x}\right)+33\left(\frac{1}{y}\right)=15} \quad .... \textbf{(1)} \qquad \boxed{12\left(\frac{1}{x}\right)-3\left(\frac{1}{y}\right)=1} \quad .... \textbf{(2)}$$

Hacemos que: $\boxed{\dfrac{1}{x}=a}$ y $\boxed{\dfrac{1}{y}=b}$

Luego las ecuaciones dadas toman la siguiente forma:

$$\boxed{24a+33b=15} \;\ldots\ldots\ldots \textbf{(I)}$$

$$\boxed{12a-3b=1} \;\ldots\ldots\ldots \textbf{(II)}$$

Multiplicamos "×11" a cada término de la ecuación **(II)**, obteniendo:

$$\boxed{132a-33b=11} \;\ldots\ldots\ldots \textbf{(III)}$$

Sumamos miembro a miembro las ecuaciones **(I)** y **(III)**:

$$24a+33b=15 \;\ldots\ldots\ldots \textbf{(I)}$$

$$132a-33b=11 \;\ldots\ldots\ldots \textbf{(III)}$$

$$\Sigma\,\textbf{M.A.M:}\quad 156a=26 \Rightarrow a=\frac{26}{156} \Rightarrow \therefore\; a=\frac{1}{6}$$

Reemplazamos el valor de $\boxed{a=\dfrac{1}{6}}$; en la ecuación **(I)**:

$$24\left(\frac{1}{6}\right)+33b=15 \Rightarrow 33b=11 \Rightarrow \therefore\; \boxed{b=\frac{11}{33}=\frac{1}{3}}$$

Luego, hallamos los valores de "**x**" e "**y**"

$\dfrac{1}{x}=a \Rightarrow \dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{6} \Rightarrow \therefore\; \boxed{x=6}$	$\dfrac{1}{y}=b \Rightarrow \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3} \Rightarrow \therefore\; \boxed{y=3}$

Rpta: El conjunto solución del sistema es: C.S. = {6 ; 3}

(5.) Resolver el sistema:
$$\begin{cases} \dfrac{2x+1}{3}-\dfrac{y-1}{4}=1 & \ldots\ldots\ldots\ \textbf{(1)} \\[2ex] \dfrac{x+2}{2}-\dfrac{y+1}{5}=1 & \ldots\ldots\ldots\ \textbf{(2)} \end{cases}$$

Resolución:

De la ecuación **(1)**; se obtiene :

$$\frac{4(2x+1)-3(y-1)}{3\cdot 4}=1$$

Recuerda que:

$$\frac{A}{B}-\frac{C}{D}=\frac{A\cdot D-B\cdot C}{B\cdot D}$$

$$8x + 4 - 3y + 3 = 1 \cdot 3 \cdot 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{8x - 3y = 5} \quad \text{......... (3)}$$

De la ecuación **(2)**; se obtiene:

$$\frac{5(x+2) - 2(y+1)}{2 \cdot 5} = 1$$

$$5x + 10 - 2y - 2 = 1 \cdot 2 \cdot 5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{5x - 2y = 2} \quad \text{......... (4)}$$

Multiplicamos por **"2"** a los términos de la ecuación **(3)**; obteniendo:

$$\boxed{16x - 6y = 10} \quad \text{......... (5)}$$

Multiplicamos por **"–3"** a los términos de la ecuación **(4)**; obteniendo:

$$\boxed{-15x + 6y = -6} \quad \text{......... (6)}$$

Sumamos miembro a miembro las ecuaciones **(5)** y **(6)**:

$$16x - \cancel{6y} = 10 \quad \text{......... (5)}$$

$$-15x + \cancel{6y} = -6 \quad \text{......... (6)}$$

$$\Sigma \text{ M.A.M:} \quad x = 4$$

Reemplazamos el valor de $\boxed{x = 4}$; en la ecuación **(3)**:

$$8(4) - 3y = 5 \quad \Rightarrow \quad 3y = 27 \quad \Rightarrow \quad \therefore \boxed{y = 9}$$

Rpta: El conjunto solución del sistema es: C.S. = {4; 9}

6. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 5\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 8 & \text{......... (1)} \\ 3\sqrt{x} + 4\sqrt{y} = 7 & \text{......... (2)} \end{cases}$$

Resolución:

Multiplicamos por **"4"** a los términos de la ecuación **(1)**; obteniendo:

$$\boxed{20\sqrt{x} + 12\sqrt{y} = 32} \quad \text{......... (3)}$$

Multiplicamos por **"–3"** a los términos de la ecuación **(2)**; obteniendo:

$$\boxed{-9\sqrt{x} - 12\sqrt{y} = -21} \quad \text{......... (4)}$$

Sumamos miembro a miembro las ecuaciones **(3)** y **(4)**:

$$20\sqrt{x} + 12\sqrt{y} = 32 \quad \text{......... (3)}$$

$$-9\sqrt{x} - 12\sqrt{y} = -21 \quad \text{......... (4)}$$

Recuerda que:

$$\sqrt[n]{A} = x \Rightarrow A = x^n$$

Σ **M.A.M:** $11\sqrt{x} = 11 \Rightarrow \sqrt{x} = \dfrac{11}{11} = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1^2 = 1$

$\therefore \boxed{x = 1}$

Reemplazamos el valor de $\boxed{x = 1}$; en la ecuación **(1)**:

$$5\left(\sqrt{1}\right) + 3\sqrt{y} = 8 \Rightarrow 5 + 3\sqrt{y} = 8 \Rightarrow \sqrt{y} = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow \sqrt{y} = 1$$

$$y = 1^2 = 1 \Rightarrow \therefore \boxed{y = 1}$$

Rpta: El conjunto solución del sistema es: C.S. = {1; 1}

7. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{5}{\sqrt{x-2}} + \dfrac{4}{\sqrt{y+2}} = 2 & \text{.......... (1)} \\[2ex] \dfrac{15}{\sqrt{x-2}} - \dfrac{8}{\sqrt{y+2}} = 1 & \text{.......... (2)} \end{cases}$$

Resolución:

Multiplico por "**2**" a los términos de la ecuación **(1)**; obteniendo:

$$\boxed{\frac{10}{\sqrt{x-2}} + \frac{8}{\sqrt{y+2}} = 4} \quad \text{.......... (3)}$$

Sumamos miembro a miembro las ecuaciones **(3)** y **(2)** :

$$\frac{10}{\sqrt{x-2}} + \frac{8}{\sqrt{y+2}} = 4 \quad \text{.......... (3)}$$

$$\frac{15}{\sqrt{x-2}} - \frac{8}{\sqrt{y+2}} = 1 \quad \text{.......... (2)}$$

Σ **M.A.M:** $\dfrac{25}{\sqrt{x-2}} = 5 \Rightarrow \dfrac{25}{5} = \sqrt{x-2} \Rightarrow 5 = \sqrt{x-2}$

$$5^2 = x - 2 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 27}$$

Reemplazamos el valor de $\boxed{x = 27}$; en la ecuación **(1)**:

$$\frac{5}{\sqrt{x-2}} + \frac{4}{\sqrt{y+2}} = 2 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{27-2}} + \frac{4}{\sqrt{y+2}} = 2$$

$$\frac{5}{\sqrt{25}}+\frac{4}{\sqrt{y+2}}=2 \Rightarrow \frac{5}{5}+\frac{4}{\sqrt{y+2}}=2$$

Recuerda que:

$\sqrt[n]{A}=x \Rightarrow A=x^n$

$$1+\frac{4}{\sqrt{y+2}}=2 \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{y+2}}=1 \Rightarrow 4=\sqrt{y+2}$$

$$4^2=y+2$$

$$\therefore \; 14=y$$

Respuesta: El conjunto solución del sistema es: C.S. = {27; 14}

8. Resolver el sistema:

$$\begin{cases}(a-1)x+(a+1)y=2\left(a^2-1\right) & \text{.......... (1)}\\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a-1}=\dfrac{2a+1}{a} & \text{.......... (2)}\end{cases}$$

Resolución:

De la ecuación **(2)**; se obtiene :

Recuerda que:

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{A\cdot D+B\cdot C}{B\cdot D}$$

$$\frac{x(a-1)+ay}{a(a-1)}=\frac{2a+1}{a}$$

$$x(a-1)+ay=\frac{\not{a}(a-1)(2a+1)}{\not{a}} \Rightarrow \boxed{(a-1)x+ay=(a-1)(2a+1)} \quad \text{.... (3)}$$

Restamos miembro a miembro las ecuaciones **(1)** y **(3)**:

$$\cancel{(a-1)x}+(a+1)y=2(a^2-1) \quad \text{.......... (1)}$$

$$\cancel{(a-1)x}+ay=(a-1)(2a+1) \quad \text{.......... (3)}$$

– M.A.M: $(a+1)y-ay=2(a^2-1)-(a-1)(2a+1)$

$$\cancel{ay}+y-\cancel{ay}=2(a^2-1^2)-(a-1)(2a+1)$$

$$y=2(a+1)\underline{(a-1)}-\underline{(a-1)}(2a+1)$$; factorizamos "$\underline{(a-1)}$"

$$y=(a-1)[2(a+1)-(2a+1)]$$

$$y=(a-1)[1] \Rightarrow \therefore \; \boxed{y=(a-1)}$$

Reemplazamos el valor de "y" en la ecuación **(3)**; obteniendo:

$$(a-1)x+a(a-1)=(a-1)(2a+1)$$

$$\cancel{(a-1)}[x+a]=\cancel{(a-1)}(2a+1)$$

$$x + a = 2a + 1 \Rightarrow \quad \therefore \quad x = a + 1$$

Rpta: El conjunto solución del sistema es: C.S. = {(a + 1); (a − 1)}

TALLER DE EJERCICIOS Nº 53

I. En cada sistema siguiente:

a) Hallar el conjunto solución

b) Gráfica en un sólo plano las dos rectas y verifica las respuestas

1. $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 2 \end{cases}$	4. $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$	7. $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 4x + 3y = 11 \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$	5. $\begin{cases} 6x - 7y = 9 \\ 4x - 5y = 5 \end{cases}$	8. $\begin{cases} 12x + 9y = 21 \\ -8x + 15y = 14 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 18x - 49y = 5 \\ 12x - 35y = 1 \end{cases}$	6. $\begin{cases} 3x + 5y = -29 \\ 2x + 3y = -18 \end{cases}$	9. $\begin{cases} 9x - 4y = 0 \\ 6x + 2y = 7 \end{cases}$

II. Halla el determinante de cada matriz siguiente:

$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$	$C = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 8 \\ \frac{3}{4} & -6 \end{bmatrix}$	$E = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$
$B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$	$D = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{5}{6} \\ 12 & 10 \end{bmatrix}$	$F = \begin{bmatrix} -\frac{8}{7} & 16 \\ \frac{7}{4} & -21 \end{bmatrix}$

III. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones; aplicando la Regla de Cramer:

1. $\begin{cases} 2x + 3y = 28 \\ 3x + 2y = 32 \end{cases}$	2. $\begin{cases} x + y = 19 \\ 3x - 4y = 8 \end{cases}$	3. $\begin{cases} 8x - 64 = y \\ 9x - 4y = 49 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 7x - 5y = 2 \\ 8x - 3y = 5 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 6x - 12y = -1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x - 30 = -5y - x + 15 \\ 5x - 7y = 29 \end{cases}$

IV. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones, aplicando cualquiera de los métodos estudiados (Reducción, sustitución, igualación, o determinantes).

1. $\begin{cases} 8x = y + 21 \\ 9x - 2y = -7 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ 2x - 6y = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 7x + 5y = \dfrac{33}{2} \\ 3x = 6 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5x + 4y = 22 \\ 3x - 7y = -15 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ \dfrac{3}{4}x - y = 2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{6x}{5} - \dfrac{2y}{3} = \dfrac{5}{6} \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{3} = 9 \\ \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{9} = 3 \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{4x}{6} + \dfrac{5y}{4} = 7 \\ \dfrac{10x}{15} - \dfrac{y}{2} = 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{6} = 1\dfrac{7}{12} \\ \dfrac{2x}{5} + \dfrac{3y}{12} = \dfrac{-1}{20} \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{4x}{9} - \dfrac{5y}{3} = \dfrac{11}{6} \\ \dfrac{2x}{3} + \dfrac{2y}{3} = \dfrac{-1}{10} \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{x+1}{4} - \dfrac{x-y}{6} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x+1}{12} + \dfrac{2x+y}{18} = 1 \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{2x+3y}{3} - \dfrac{2x+y}{5} = 4 \\ \dfrac{4x+y}{8} + \dfrac{5x+y-7}{12} = 1 \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{5} + \dfrac{6y+4}{7} = 1 \\ \dfrac{7(2x+1)}{5} + \dfrac{9(6y+4)}{7} = 3 \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dfrac{3x-y}{4} + \dfrac{2y-x}{3} = -\dfrac{3}{4} \\ \dfrac{x+2}{5} + \dfrac{3x-y}{4} = \dfrac{7}{20} \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{3} + \dfrac{y-x}{2} = 9 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{x+y}{9} = 5 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x + \dfrac{y-2}{5} = 21 \\ 4y + \dfrac{x-4}{6} = 29 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 5x - 3y = 12 \\ \dfrac{x-1}{3} + \dfrac{y-2}{4} + 1 = \dfrac{23}{12} \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{3x-1}{5} - \dfrac{2x+1}{3} = -\dfrac{5x+y}{5} \\ \dfrac{y}{3} - \dfrac{x}{2} = -\dfrac{5}{36} \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dfrac{12}{x} - \dfrac{15}{y} = 1 \\ \dfrac{6}{x} + \dfrac{10}{y} = 4 \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dfrac{6}{x} - \dfrac{9}{y} = 0 \\ \dfrac{8}{2x} + \dfrac{18}{3y} = 4 \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} = 8 \\ \dfrac{2}{y} - \dfrac{1}{x} = 4 \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dfrac{9}{2x} - \dfrac{10}{3y} = 7 \\ \dfrac{10}{3x} - \dfrac{9}{2y} = -7 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2\sqrt{x+5} - 3\sqrt{y-2} = 3 \\ 3\sqrt{x+5} - 4\sqrt{y-2} = 5 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 3\sqrt{x} + 4\sqrt{y} = 32 \\ 5\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 5 \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dfrac{6}{\sqrt{x-4}} + \dfrac{9}{\sqrt{y+3}} = 6 \\ \dfrac{14}{\sqrt{x-4}} - \dfrac{12}{\sqrt{y+3}} = 3 \end{cases}$

26. $\begin{cases} \dfrac{6}{3\sqrt{5-x}} + \dfrac{12}{2\sqrt{11-y}} = 3 \\ \dfrac{10}{\sqrt{5-x}} - \dfrac{9}{\sqrt{11-y}} = 2 \end{cases}$

V. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones; aplicando cualquiera de los métodos estudiados:

1. $\begin{cases} \dfrac{3x}{a+b} + \dfrac{2y}{a-b} = 5 \\ \dfrac{8x}{a+b} - \dfrac{3y}{a-b} = 5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{x-a}{b} - \dfrac{y-b}{a} = 0 \\ \dfrac{x+y}{a} - \dfrac{y-a}{y} = \dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{b} \end{cases}$

3. $\begin{cases} (a+c)x - by = bc \\ x + y = a + b \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y = a + b \\ bx + ay = 2ab \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + ay = b \\ ax + y = c \end{cases}$

VI. En cada sistema siguiente; verifica si los valores numéricos dados a sus variables satisfacen o no al sistema :

1. $\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 5x - 2y = 13 \end{cases}$ ➡ $\boxed{x = 3}$ $\boxed{y = 1}$

2. $\begin{cases} 2x + 6y = 26 \\ 6x - 7y = 3 \end{cases}$ ➡ $\boxed{x = 4}$ $\boxed{y = 3}$

3. $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ \dfrac{3}{4}x - y = 2 \end{cases}$ ➡ $\boxed{x = 4}$ $\boxed{y = 1}$

4. $\begin{cases} 11x - 9y = -6 \\ 13x + 2y = 94 \end{cases}$ ➡ $\boxed{x = 6}$ $\boxed{y = 8}$

5. $\begin{cases} \dfrac{1}{x-y+2} = \dfrac{15}{3x+y+6} \\ \dfrac{4}{3x-5y+1} = \dfrac{5}{2x+3y-3} \end{cases}$ ➡ $\boxed{x = 2}$ $\boxed{y = 3}$

6. $\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 2 \\ ay = by \end{cases}$ ➡ $\boxed{x = a}$ $\boxed{y = b}$

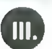
RESPUESTAS TALLER 53

I.

1. C.S. = {7; 5}	**2.** C.S. = {2; 1}	**3.** C.S. = {3; 1}
4. C.S. = {2; –1}	**5.** C.S. = {5; 3}	**6.** C.S. = {–3; –4}
7. C.S. = {3; 2}	**8.** C.S. = $\left\{\frac{3}{4}; \frac{4}{3}\right\}$	**9.** C.S. = $\left\{\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right\}$

II.

|A| = 18	|B| = –21	|C| = –10	|D| = 4	|E| = 10	|F| = –4



1. C.S. = {8, 4}	**2.** C.S. = {12; 7}	**3.** C.S. = {9; 8}
4. C.S. = {1; 1}	**5.** C.S. = $\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right\}$	**6.** C.S. = {10; 3}

1. C.S. = {7; 35}	**2.** C.S. = $\left\{-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right\}$	**3.** C.S. = $\left\{2;\frac{1}{2}\right\}$
4. C.S. = {2; 3}	**5.** C.S. = { 4; 1}	**6.** C.S. = $\left\{-\frac{5}{6};-\frac{11}{4}\right\}$
7. C.S. = { 10; 21}	**8.** C.S. = { 3; 4}	**9.** C.S. = {3; 5}
10. C.S. = $\left\{\frac{3}{4};-\frac{9}{10}\right\}$	**11.** C.S. = {5; –1}	**12.** C.S. = {3; 4}
13. C.S. = {7; –3}	**14.** C.S. = {1; 2}	**15.** C.S. = {6; 12}
16. C.S. = {10; 7}	**17.** C.S. = {3; 1}	**18.** C.S. = $\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right\}$
19. C.S. = {3; 5}	**20.** C.S. = {2; 3}	**21.** C.S. = $\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right\}$
22. C.S. = $\left\{\frac{1}{6};\frac{1}{6}\right\}$	**23.** C.S. = {4; 3}	**24.** C.S. = {16; 25}
25. C.S. = {8; 6}	**26.** C.S. = {1; 2}	

1. C.S. = {(a + b); (a – b)}	**2.** C.S. = {a; b}	**3.** C.S. = {b; a}
4. C.S. = {a ; b}	**5.** C.S. = $\left\{\frac{ac-b}{a^2-1};\frac{ab-c}{a^2-1}\right\}$	

1. Si satisface.	**2.** Si satisface.	**3.** Si satisface.
4. Si satisface.	**5.** Si satisface.	**6.** Si satisface.

5.6 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS POR MEDIO DE LAS ECUACIONES SIMULTÁNEAS DE PRIMER GRADO CON DOS VARIABLES

Problema (1): La suma de dos números es 55; y uno de ellos es 9 unidades menor que el otro. Determinar los números.

Resolución:

Sean los dos números: $\{x$ é y

Del enunciado, planteamos las ecuaciones:

$\boxed{x + y = 55}$ .... **(1)** $\boxed{x - y = 9}$ .... **(2)**

Sumamos miembro a miembro las ecuaciones **(1)** y **(2)**, obteniendo:

$$2x = 64 \Rightarrow x = \frac{64}{2} = 32 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 32}$$

Reemplazamos el valor de $\boxed{x = 32}$; en la ecuación **(1)**:

$$32 + y = 55 \Rightarrow y = 55 - 32 = 23 \Rightarrow \therefore \boxed{y = 23}$$

Rpta: Los números pedidos son: 32 y 23.

Problema (2): Hallar dos números cuya suma es 196, si el mayor excede al menor en 8.

Resolución:

Sean los dos números: $\begin{cases} x = \text{\# Mayor} \\ y = \text{\# Menor} \end{cases}$ ➡ $\boxed{x + y = 196}$ .... **(1)**

Del enunciado:

El # mayor excede al menor en 8, obtenemos: $\boxed{x - y = 8}$ .... **(2)**

Sumamos miembro a miembro las ecuaciones **(1)** y **(2)**:

$x + y = 196$ .... **(1)**

$x - y = 8$ .... **(2)**

$$\Sigma \textbf{ M.A.M: } 2x = 204 \Rightarrow x = \frac{204}{2} = 102 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 102}$$

Reemplazamos el valor de "x" en la ecuación **(1)**:

$$102 + y = 196 \Rightarrow y = 196 - 102 \Rightarrow \therefore \boxed{y = 94}$$

Rpta: Los números pedidos son: 102 y 94.

Problema (3): La suma de los dígitos de un número de dos dígitos es 11. Si el orden de los dígitos se invierte; el número resultante excede al número original en 45. Hállase el número original.

Resolución:

Sea el número de dos dígitos: $\overline{xy} \Rightarrow \boxed{x + y = 11}$ .... **(1)**

Del enunciado: Si el orden de los dígitos del número original ($\overline{xy}$) se invierte ($\overline{yx}$) el número resultante excede al número original ($\overline{xy}$) en 45; planteamos la ecuación:

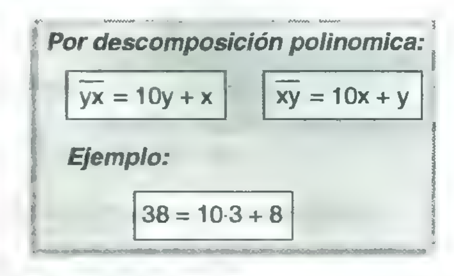
$\overline{yx}$ excede a $\overline{xy}$ en 45

$$\overline{yx} - \overline{xy} = 45$$

$$(10y + x) - (10x + y) = 45$$

$$10y + x - 10x - y = 45$$

$$9y - 9x = 45$$



Sacamos novena a cada término: $\boxed{y - x = 5}$ .... **(2)**

- Sumamos miembro a miembro las ecuaciones **(1)** y **(2)**:

$$x + y = 11 \quad .... (1)$$

$$y - x = 5 \quad .... (2)$$

$$\Sigma\ \textbf{M.A.M:}\quad 2y = 16 \Rightarrow y = \frac{16}{2} = 8 \Rightarrow \therefore \boxed{y = 8}$$

Reemplazamos el valor de $\boxed{y = 8}$, en la ecuación **(1)**:

$$x + 8 = 11 \Rightarrow x = 11 - 8 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 3}$$

Rpta. El número original es: $\overline{xy} = 38$

Problema (4): La suma de dos números es 74 , su diferencia dividida entre el menor da 2 por cociente y 10 por residuo. ¿Cuáles son los números?

Resolución:

Sean los dos números: $\begin{cases} x = \#\ \text{Mayor} \\ y = \#\ \text{Menor} \end{cases}$

Del enunciado, planteamos las ecuaciones: $\boxed{x + y = 74}$ .... **(1)**

Por Propiedad:

$$\begin{array}{c|l} D & d \\ \hline r & q \end{array} \Rightarrow \boxed{D = d \cdot q + r}$$

$$\begin{array}{c|l} x - y & y \\ \hline 10 & 2 \end{array} \Rightarrow x - y = 2y + 10$$

$$\boxed{x - 3y = 10} \quad .... (2)$$

Restamos miembro a miembro las ecuaciones **(1)** y **(2)**:

$$x + y = 74 \quad .... (1)$$
$$x - 3y = 10 \quad .... (2)$$

Restamos: **M.A.M:** $4y = 64 \Rightarrow y = \frac{64}{4} = 16 \Rightarrow \therefore \boxed{y = 16}$

Reemplazamos el valor de $\boxed{y = 16}$, en la ecuación **(1)**:

$$x + 16 = 74 \Rightarrow x = 74 - 16 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 58}$$

Rpta: Los números pedidos son: 58 y 16.

Problema (5): Hallar las edades de dos personas, sabiendo que si la primera tuviese 10 años menos, su edad sería los **4/3** de la edad de la segunda, y si la segunda tuviese 20 años más, ambas tendrían la misma edad.

Resolución:

Sean la edad de las dos personas: $\begin{cases} x = \text{Edad de la primera persona} \\ y = \text{Edad de la segunda persona} \end{cases}$

*) ***Del enunciado:*** Si la primera persona tuviese 10 años menos, su edad sería los 4/3 de la edad de la segunda .

$$x - 10 = \frac{4}{3}y \Rightarrow \boxed{3x - 30 = 4y} \quad .... (1)$$

) ***Del enunciado:* Si la segunda tuviese 20 años más, ambas tendrían la misma edad.

$$\boxed{y + 20 = x} \quad .... (2)$$

Sustituimos la ecuación **(2)** en **(1)**:

$$3(y + 20) - 30 = 4y \Rightarrow 3y + 60 - 30 = 4y \Rightarrow \therefore \boxed{30 = y}$$

Reemplazamos el valor de "y" en **(2)**:

$$30 + 20 = x \Rightarrow \therefore \boxed{50 = x}$$

Rpta: Las edades de las dos personas son: 30 años y 50 años.

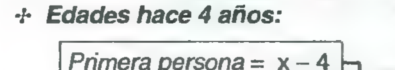
Problema (6): Hace 4 años las edades de dos personas estaban en la relación de 2 a 3, y dentro de 4 años estarán en la relación de 4 a 5. ¿Qué edad tienen dichas personas?

Resolución:

Sean las edades actuales de las dos personas:

$$\begin{cases} x = \text{Edad actual de la primera persona} \\ y = \text{Edad actual de la segunda persona} \end{cases}$$

∔ *Edades hace 4 años:*



$$\frac{x-4}{y-4} = \frac{2}{3}$$

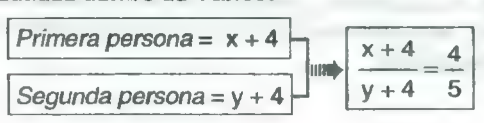
Haciendo el producto de extremos y medios:

$$3(x-4) = 2(y-4)$$

$$3x - 12 = 2y - 8$$

$$\boxed{3x - 2y = 4} \quad \text{......... (1)}$$

∔∔ *Edades dentro de 4 años:*



$$\frac{x+4}{y+4} = \frac{4}{5}$$

Haciendo el producto de extremos y medios:

$$5(x+4) = 4(y+4)$$

$$5x + 20 = 4y + 16$$

$$\boxed{5x - 4y = -4} \quad \text{......... (2)}$$

Luego para eliminar la variable "y" en las ecuaciones **(1)** y **(2)**; multiplicamos la ecuación **(1)** por –2:

$$3x - 2y = 4 \longrightarrow \textbf{Por } -2 \longrightarrow -6x + 4y = -8$$

$$5x - 4y = -4 \longrightarrow 5x - 4y = -4$$

$$\Sigma \text{ M.A.M:} \quad -x = -12 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 12}$$

Reemplazamos el valor de $\boxed{x = 12}$; en la ecuación **(1)**:

$$3(12) - 2y = 4 \Rightarrow 36 - 2y = 4 \Rightarrow 32 = 2y \Rightarrow \therefore \boxed{y = 16}$$

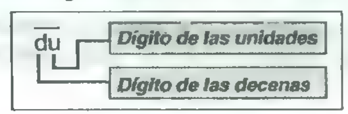
Rpta:

> Las edades actuales de las dos personas es: 12 años y 16 años.

Problema 7: La suma de los dígitos de un número es 15; si el dígito de las unidades excede en 3 al dígito de las decenas. ¿Cuál es el número?

Resolución:

Sea el número de dos dígitos:



Del enunciado, planteamos las ecuaciones:

$$d + u = 15 \quad ...\ (I)$$
$$u - d = 3 \quad ...\ (II)$$

Σ **M.A.M:** $2u = 18 \Rightarrow u = \dfrac{18}{2} = 9 \Rightarrow \therefore\ \boxed{u = 9}$

Reemplazamos el valor de $\boxed{u = 9}$, en la ecuación **(I)**:

$$d + 9 = 15 \Rightarrow d = 15 - 9 \Rightarrow \therefore\ d = 6$$

Rpta. El número pedido es: $\overline{du} = 69$

Problema (8): Si se resta 2 al numerador de una fracción, ella se hace igual a 4; y si se suma 4 a su denominador, ella se hace igual a 2. ¿Cuál es la fracción?

Resolución:

Sea la fracción pedida igual a: $\boxed{\dfrac{n}{d}}$

Del enunciado, planteamos las ecuaciones:

$\boxed{\dfrac{n-2}{d} = 4}$ .... **(1)** $\qquad$ $\boxed{\dfrac{n}{d+4} = 2}$ .... **(2)**

De la ecuación (1):

$$n - 2 = 4d$$

$\boxed{n - 4d = 2}$ .... **(3)**

De la ecuación (2):

$\boxed{n = 2d + 8}$ .... **(4)**

Sustituimos la ecuación **(4)** en **(3)**:

$$(2d + 8) - 4d = 2 \Rightarrow 6 = 2d \Rightarrow \therefore\ 3 = d$$

Reemplazamos el valor de $\boxed{d = 3}$; en la ecuación **(4)**:

$$n = 2(3) + 8 \Rightarrow \therefore\ n = 14$$

Rpta. La fracción pedida es igual a: $\dfrac{n}{d} = \dfrac{14}{3}$

Problema (9): La suma, el producto y la diferencia de dos números son entre sí como 6, 16 y 2. ¿Cuáles son estos números?.

Resolución:

Sean los dos números: **"x"** e **"y"**

Del enunciado, planteamos las ecuaciones: $\frac{x+y}{6}=\frac{x\cdot y}{16}=\frac{x-y}{2}$

De la primera relación:

$$\frac{x+y}{6}=\frac{x\cdot y}{16}$$

Simplificamos los denominadores:

$$\frac{x+y}{3}=\frac{x\cdot y}{8}$$

$$8(x+y)=3xy \quad \text{......... (I)}$$

De la segunda relación:

$$\frac{x+y}{6}=\frac{x-y}{2}$$

Simplificamos los denominadores:

$$\frac{x+y}{3}=x-y$$

$$x+y=3x-3y$$

$$2y=x \quad \text{......... (II)}$$

Sustituimos **(II)** en **(I)**:

$$8(2y+y)=3(2y)y \Rightarrow 8(3y)=6y^2 \Rightarrow 24y=6y^2 \Rightarrow 4y=y^2 \Rightarrow 4y-y^2=0$$

Factorizamos 'y' en el primer miembro, obteniendo: $y(4-y)=0$

De donde:
- i) $y=0 \Rightarrow y=0$
- ii) $4-y=0 \Rightarrow y=4$

*Sólo tomamos el valor de **y = 4** y no **y = 0** ; pues este valor no satisface el sistema.*

Reemplazamos el valor $y=4$; en la ecuación **(II)**:

$$2(4)=x \Rightarrow \therefore\ x=8$$

Rpta: Los números pedidos son: $x=8$; $y=4$

Problema 10 : Si se agrega 3 a los dos términos de una fracción se obtiene otra equivalente a 7/10; y al restar 2 a los dos términos se obtiene una fracción equivalente a 3/5. Hallar la fracción.

Resolución:

Sea la fracción pedida igual a: $\frac{n}{d}$

Del enunciado, planteamos las siguientes ecuaciones:

$$\frac{n+3}{d+3}=\frac{7}{10} \quad \text{......... (I)} \qquad \frac{n-2}{d-2}=\frac{3}{5} \quad \text{......... (II)}$$

En las ecuaciones **(I)** y **(II)**, hacemos producto de extremos y medios, obteniendo:

De la ecuación (I):	**De la ecuación (II):**
$10(n + 3) = 7(d + 3)$	$5(n - 2) = 3(d - 2)$
$10n + 30 = 7d + 21$	$5n - 10 = 3d - 6$
$\boxed{10n - 7d = -9}$ .... **(III)**	$\boxed{5n - 3d = 4}$ .... **(IV)**

- Multiplicamos por **–2**, a la ecuación **(IV)**:

Ec. (IV): ➡ $5n - 3d = 4$ ⟶ **Por –2** ⟶ $-10n + 6d = -8$

Ec. (III): ➡ $10n - 7d = -9$ ⟶ $10n - 7d = -9$

Σ M.A.M: $-d = -17 \Rightarrow \therefore\ \boxed{d = 17}$

Reemplazamos el valor de $\boxed{d = 17}$; en la ecuación **(III)**:

$$10n - 7(17) = -9 \Rightarrow 10n - 119 = -9 \Rightarrow 10n = 110 \Rightarrow n = \frac{110}{10} \Rightarrow \therefore\ \boxed{n = 11}$$

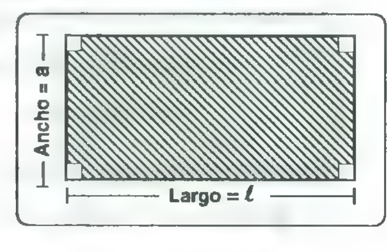
Rpta. La fracción pedida es: $\dfrac{n}{d} = \dfrac{11}{17}$

Problema (11): Los 2/5 del largo de un rectángulo sumados con los 3/4 del ancho da 27 cm, si el perímetro es 100 cm, hallar sus dimensiones.

Resolución:

Sean las dimensiones del rectángulo: $\begin{cases} \ell = \text{largo} \quad y \\ a = \text{ancho} \end{cases}$

Del enunciado planteamos las ecuaciones:



*) $\boxed{\dfrac{2}{5}\ell + \dfrac{3}{4}a = 27}$ .... **(1)**

**) Perímetro ▧ = 100

Σ de los 4 lados = 100

$2\ell + 2a = 100$; sacamos mitad a cada término:

$\boxed{\ell + a = 50}$ .... **(2)**

En la ecuación **(1)** ; aplicamos: $\boxed{\dfrac{A}{B}+\dfrac{C}{D}=\dfrac{A\cdot D+B\cdot C}{B\cdot D}}$

$$\frac{2\ell}{5}+\frac{3}{4}a=27 \Rightarrow \frac{4(2\ell)+5(3a)}{5\cdot 4}=27 \Rightarrow \frac{8\ell+15a}{20}=27$$

$$\boxed{8\ell+15a=540} \text{ .... (3)}$$

De la ecuación **(2)**; despejamos "ℓ"

$$\boxed{\ell=50-a} \text{ .... (4)}$$

Sustituimos la ecuación **(4)** en **(3)**:

$$8(50-a)+15a=540 \Rightarrow 400-8a+15a=540 \Rightarrow 7a=140 \Rightarrow \therefore \boxed{a=20}$$

Reemplazamos el valor de "a" en **(4)**:

$$\ell=50-20 \Rightarrow \therefore \boxed{\ell=30}$$

Rpta. Las dimensiones del rectángulo son: ancho = 20 cm ; y largo = 30 cm.

Problema 12 **:** Ocho camisas y un pantalón cuestan 125 soles. Al mismo precio, ocho pantalones y una camisa costarían 370 soles. Obténgase el precio de un pantalón.

Resolución:

Sea: $\begin{cases}\text{Precio de una camisa} = C \\ \text{Precio de un pantalón} = P\end{cases}$

Del enunciado, planteamos las ecuaciones siguientes:

$$\boxed{8C+1P=125} \text{ .... (1)} \quad ; \quad \boxed{8P+1C=370} \text{ .... (2)}$$

Sumamos miembro a miembro las ecuaciones **(1)** y **(2)**:

$9C + 9P = 495$; sacamos novena a cada término.

$$C+P=55 \Rightarrow \therefore \boxed{C=55-P} \text{ .... (3)}$$

Sustituimos la ecuación **(3)** en **(1)**:

$$8(55-P)+1P=125 \Rightarrow 440-8P+1P=125$$

$$440-125=8P-1P \Rightarrow 315=7P$$

$$\therefore \boxed{P=45}$$

Reemplazamos el valor de $\boxed{P=45}$, en la ecuación **(3)**:

$$C = 55 - 45 \Rightarrow \therefore \boxed{C = 10}$$

Rpta. El precio de un pantalón es de 45 soles.

Problema 13: Dividir 240 en dos partes, de manera que la razón de la mayor a la menor sea: 17 : 13. ¿Cuál es la parte mayor?

Resolución:

Sean "x" é "y" las dos partes en que se divide 240.

De donde: $\boxed{x + y = 240}$ .... **(1)** $\boxed{\dfrac{x}{y} = \dfrac{17}{13}}$ .... **(2)**

Despejamos "y" en la ecuación **(1)**: $y = 240 - x$ .... **(3)**

Sustituimos la ecuación **(3)** en **(2)**:

$$\frac{x}{240 - x} = \frac{17}{13}$$; hacemos producto de extremos y medios.

$$13x = 17\,(240 - x) \Rightarrow 13x = 17(240) - 17x$$

$$30x = 17(240) \Rightarrow x = 17(8) \Rightarrow \therefore \boxed{x = 136}$$

Reemplazamos el valor de $\boxed{\mathbf{x = 136}}$; en la ecuación **(3)**:

$$y = 240 - 136 \Rightarrow \therefore y = 104$$

Rpta. La parte mayor es igual a 136.

Problema 14: Si el largo de un terreno rectangular aumentase en 3 m y el ancho disminuye en 4 m, el área disminuirá en 56 m²; si el ancho aumentara en 5 m y el largo disminuyera en 4 m, el área aumentaría en 32 m². ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?

Resolución:

Sean las dimensiones del terreno rectángular: $\begin{cases} \ell = \text{largo} & y \\ \mathbf{a} = \text{ancho} \end{cases}$

De donde: $\boxed{\text{Área} \ \square = \ell \times a}$ .... **(1)**

*) Si el largo aumenta 3 m y el ancho disminuye 4 m, la nueva área sería:

$$\text{Área del nuevo rectángulo} = (\ell + 3)(a - 4)$$

Luego: $\boxed{\ell \times a - (\ell + 3)(a - 4) = 56}$ .... **(2)**

**) si el ancho aumenta 5 m y el largo disminuye 4 m, la nueva área sería:

Area del nuevo rectángulo = $(\ell - 4)(a + 5)$

Luego: $\boxed{(\ell - 4)(a + 5) - \ell \times a = 32}$ .... **(3)**

Efectuando los productos indicados en las ecuaciones **(2)** y **(3)**; obtenemos:

De la ecuación (2): $\ell \times a - (\ell \times a - 4\ell + 3a - 12) = 56$

$$4\ell - 3a + 12 = 56 \Rightarrow \boxed{4\ell - 3a = 44} \text{ ..... (4)}$$

De la ecuación (3): $\ell \times a + 5\ell - 4a - 20 - \ell \times a = 32$

$$\boxed{5\ell - 4a = 52} \text{ ..... (5)}$$

De las ecuaciones **(4)** y **(5)** decidimos eliminar la variable "a", multiplicando la ecuación **(4)** por **4** y la ecuación **(5)** por **–3**.

$4\ell - 3a = 44$ ⟶ **Por 4** ⟶ $16\ell - 12a = 176$

$5\ell - 4a = 52$ ⟶ **Por –3** ⟶ $-15\ell + 12a = -156$

Σ **M.A.M:** $16\ell - 15\ell = 176 - 156 \Rightarrow \therefore \boxed{\ell = 20}$

Reemplazamos el valor de $\boxed{\ell = 20}$, en la ecuación **(4)**:

$$4(20) - 3a = 44 \Rightarrow 80 - 3a = 44 \Rightarrow 36 = 3a \Rightarrow \therefore \boxed{12 = a}$$

Rpta. Las dimensiones del terreno rectangular son: 20m y 12m

Problema (15) :Halla una fracción equivalente a 3/5 cuya suma de sus términos sea 96.

Resolución:

Sea: ***La fracción inicial*** = $\frac{3}{5}$ (3 ➡ ***Numerador***; 5 ➡ ***Denominador***)

La fracción equivalente a $\boxed{\frac{3}{5} = \frac{3k}{5k}}$ .... **(I)**

Del enunciado del problema se tiene que:

$$3k + 5k = 96 \Rightarrow 8k = 96 \Rightarrow k = \frac{96}{8} = 12 \Rightarrow \therefore \boxed{k = 12}$$

Reemplazamos el valor de "k" en **(I)**:

$$\textit{Fracción equivalente} = \frac{3k}{5k} = \frac{3(12)}{5(12)} = \frac{36}{60}$$

Rpta: La fracción equivalente a $\frac{3}{5}$ es igual a $\frac{36}{60}$

Problema 16: La suma de los inversos de dos números es 15/4 y la diferencia de estos inversos es 9/4 ¿Cuáles son los números?

Resolución:

Sean: Los números pedidos "**x**" e "**y**"; sus inversos son: $\frac{1}{x}$; $\frac{1}{y}$

Del enunciado, planteamos las ecuaciones:

$$\boxed{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{4}} \text{ .... (1)} \qquad \boxed{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{9}{4}} \text{ .... (2)}$$

Sumamos miembro a miembro las ecuaciones **(1)** y **(2)**:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{4} \text{ .... (1)}$$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{9}{4} \text{ .... (2)}$$

$$\Sigma \textbf{ M.A.M:} \quad 2\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{15}{4}+\frac{9}{4} \Rightarrow 2\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{24}{4} \Rightarrow 2\left(\frac{1}{x}\right)=6$$

De donde: $\frac{2}{6}=x \Rightarrow \therefore \boxed{\frac{1}{3}=x}$

De las ecuaciones **(1)** y **(2)**; restamos miembro a miembro:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{4} \text{ .... (1)}$$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{9}{4} \text{ .... (2)}$$

$$\textbf{Restamos M.A.M:} \quad 2\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{15}{4}-\frac{9}{4} \Rightarrow 2\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{6}{4} \Rightarrow 2\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{3}{2}$$

De donde: $\boxed{\frac{4}{3}=y}$

Rpta: Los números pedidos son: $\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{3}$

Problema 17: La diferencia de dos números es igual a los cinco sextos de su suma; el mayor excede a 10 veces el menor en 3. ¿Cuáles son esos números?

Resolución:

Sean los números pedidos: $\begin{cases} a = \text{Número mayor} \\ b = \text{Número menor} \end{cases}$

Del enunciado, planteamos las siguientes ecuaciones:

$$\boxed{a - b = \frac{5}{6}(a+b)} \;\text{........ (1)} \qquad \boxed{a - 10b = 3} \;\text{........ (2)}$$

Efectuando operaciones en **(1)**, obtenemos:

$$a - b = \frac{5}{6}(a+b) \Rightarrow 6a - 6b = 5a + 5b \Rightarrow 6a - 5a = 5b + 6b \Rightarrow \boxed{a = 11b} \;\text{...... (3)}$$

Reemplazamos **(3)** en **(2)**:

$$11b - 10b = 3 \Rightarrow \therefore \boxed{b = 3} \text{ (\# menor)}$$

Reemplazamos el valor de $\boxed{b = 3}$; en la ecuación **(3)**:

$$a = 11(3) \Rightarrow \therefore \boxed{a = 33} \text{ (\# mayor)}$$

Rpta. Los números pedidos son: 33 y 3

Problema 18 **:** Si el mayor de dos números se divide entre el menor el cociente es 2 y el residuo 2 y si el triple del menor se divide entre el mayor, el cociente es 1 y el residuo 3. ¿Cuáles son los números?

Resolución:

Sean los números pedidos: $\begin{cases} a = \text{Número mayor} \\ b = \text{Número menor} \end{cases}$

Del enunciado planteamos las ecuaciones:

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline 2 & 2 \end{array} \Rightarrow \boxed{a = 2 \cdot b + 2} \;\text{........ (1)} \qquad \begin{array}{r|l} 3b & a \\ \hline 3 & 1 \end{array} \Rightarrow \boxed{3b = 1 \cdot a + 3} \;\text{........ (2)}$$

Reemplazamos **(1)** en **(2)**:

$$3b = 1(2b + 2) + 3 \Rightarrow 3b = 2b + 2 + 3 \Rightarrow \therefore \boxed{b = 5} \text{ (\# menor)}$$

Reemplazamos el valor de $\boxed{b = 5}$; en **(1)**:

$a = 2(5) + 2 \Rightarrow \therefore\ a = 12$ **(# mayor)**

Rpta. Los números pedidos son: 5 y 12

Problema (19): Si se triplica el numerador de una fracción y se añade 2 al denominador se obtiene 3/2. Si se aumenta 4 a cada término, resulta 3/4 ¿Cuál es la fracción?

Resolución:

Sea la fracción pedida = $\dfrac{N}{D}$

Del enunciado, planteamos las siguientes ecuaciones:

$$\boxed{\frac{3N}{D+2} = \frac{3}{2}} \text{ .... (1)} \qquad \boxed{\frac{N+4}{D+4} = \frac{3}{4}} \text{ .... (2)}$$

De la ecuación **(1)**, se obtiene:

$$2(3N) = 3(D+2) \Rightarrow \boxed{N = \frac{D+2}{2}} \text{ .... (3)}$$

De la ecuación **(2)**, se obtiene:

$$4(N+4) = 3(D+4) \Rightarrow 4N + 16 = 3D + 12 \rightarrow \therefore \boxed{4N = 3D - 4} \text{ ...... (4)}$$

Reemplazamos **(3)** en **(4)**:

$$4\left(\frac{D+2}{2}\right) = 3D - 4 \Rightarrow 2(D+2) = 3D - 4 \Rightarrow 2D + 4 = 3D - 4$$

$$\therefore\ D = 8$$

Reemplazamos el valor de $\boxed{D = 8}$; en la ecuación **(3):**

$$N = \frac{8+2}{2} \Rightarrow \therefore\ N = 5$$

Rpta. La fracción pedida es igual a: $\dfrac{N}{D} = \dfrac{5}{8}$

Problema (20) : Manuel tiene 8 animales entre pollos y conejos. Si cuenta en total 22 patas (extremidades). ¿Cuántos animales hay de cada especie?

Resolución:

Sean:
- # de pollos = p ⇒ # total de patas de pollos = 2p
- # total de conejos = c ⇒ # total de patas de los conejos = 4c

Del enunciado, planteamos las ecuaciones:

$\boxed{p + c = 8}$ .... **(I)** ; $\boxed{2p + 4c = 22}$ .... **(II)**

Para resolver este sistema, aplicamos el método de reducción, pudiéndose aplicar cualquiera de los métodos ya mencionados, veamos:

Multiplicamos por **–4**, ambos miembros de la ecuación **(I)**, obteniendo:

$-4p - 4c = -32$ .... **(I)**

$2p + 4c = 22$ .... **(II)**

Σ **M.A.M:** $-2p = -10 \Rightarrow p = \dfrac{10}{2} \Rightarrow \therefore \boxed{p = 5}$ **(# de pollos)**

Reemplazamos el valor de $\boxed{\mathbf{p = 5}}$; en la ecuación **(I)**:

$p + c = 8 \Rightarrow 5 + c = 8 \Rightarrow \therefore \boxed{c = 3}$ **(# de conejos)**

Rpta: El # de animales de cada especie son: **# de pollos = 5 y # de conejos = 3.**

Problema (21): Una lancha que navega por un río recorre 30 km/h en favor de la corriente y 16km/h contra la corriente. ¿Cuál es la velocidad de la lancha y la del río?

Resolución:

Sean:
- Velocidad de la lancha en agua tranquila = **x**
- Velocidad del río = **y**
- Velocidad de la lancha en favor de la corriente = **x + y**
- Velocidad de la lancha contra la corriente = **x – y**

Del enunciado, planteamos las ecuaciones:

$\boxed{x + y = 30}$ .... **(1)** ; $\boxed{x - y = 16}$ .... **(2)**

Sumamos miembro a miembro las ecuaciones **(1)** y **(2)**:

$x + y = 30$ .... **(1)**

$x - y = 16$ .... **(2)**

Σ **M.A.M:** $2x = 46 \Rightarrow x = \dfrac{46}{2} \Rightarrow \therefore \boxed{x = 23}$

Reemplazamos el valor de $\boxed{\mathbf{x = 23}}$; en la ecuación **(1)**:

$x + y = 30 \Rightarrow 23 + y = 30 \Rightarrow \therefore \boxed{y = 7}$

Rpta: Las velocidades son: **Velocidad de lancha: x = 23 km/h**
Velocidad de río: y = 7 km/h

Problema (22): Hace 4 años la edad de Sara era 4 veces la de su hijo y dentro de 9 años excederá en 1 año al doble de la de este último. ¿Qué edad tiene cada uno?

Resolución:

Para este tipo de problemas es recomendable hacer un cuadro ya que se relacionan los 3 tiempos, veamos:

	Edades hace 4 años	***Edades actuales***	***Edades dentro de 9 años***
Sara	**S – 4** ←	**S**	→ **S + 9**
Su hijo	**H – 4** ←	**H**	→ **H + 9**

Del enunciado, planteamos las ecuaciones:

$$\boxed{(S-4)=4(H-4)} \;\ldots\ldots\ldots \textbf{(1)} \quad ; \quad \boxed{(S+9)-1=2(H+9)} \;\ldots\ldots\ldots \textbf{(2)}$$

Efectuando, operaciones en **(1)**; se obtiene:

$$S-4=4H-16 \;\Rightarrow\; \boxed{S=4H-12} \;\ldots\ldots\ldots \textbf{(3)}$$

Reemplazamos **(3)** en **(2)**:

$$(4H-12+9)-1=2(H+9) \;\Rightarrow\; 4H-4=2H+18 \;\Rightarrow\; 2H=22$$

$$\therefore \quad H=11$$

Reemplazamos el valor de $\boxed{\mathbf{H=11}}$; en la ecuación **(3)**:

$$S=4(11)-12 \;\Rightarrow\; \therefore \; S=32$$

Rpta: Las edades que tienen cada uno son:
Edad de Sara: **S = 32 años**
Edad de su hijo: **H = 11 años**

Problema (23): La suma de las cifras de un número de dos cifras es 10, al invertir el orden de sus cifras, este nuevo número supera al primero en 18. Hallar el número inicial.

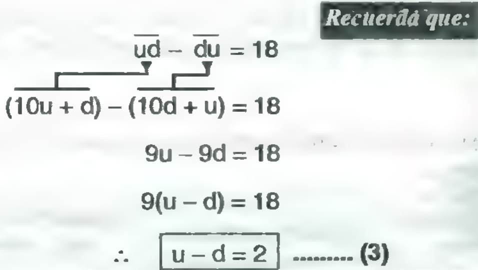
Resolución:

Sea:
- El número inicial de 2 cifras = $\overline{du}$
- Número que resulta de invertir sus cifras = $\overline{ud}$

Del enunciado, planteamos las ecuaciones:

$$\boxed{d+u=10} \;\ldots\ldots\ldots \textbf{(1)} \quad ; \quad \boxed{\overline{ud}-\overline{du}=18} \;\ldots\ldots\ldots \textbf{(2)}$$

En la ecuación **(2)**; descomponemos polinómicamente los números de 2 cifras.



$$\overline{ud} - \overline{du} = 18$$

$$(10u + d) - (10d + u) = 18$$

$$9u - 9d = 18$$

$$9(u - d) = 18$$

$$\therefore \quad \boxed{u - d = 2} \quad \text{.......... (3)}$$

Recuerda que:

$38 = 3 \cdot 10 + 8$

$26 = 2 \cdot 10 + 6$

En General:

$\overline{ab} = 10a + b$

Descomposición Polinómica.

De las ecuaciones **(1)** y **(3)**; se tiene:

$$d + u = 10 \quad \text{.......... (1)}$$

$$u - d = 2 \quad \text{.......... (3)}$$

$$\Sigma \textbf{ M.A.M:} \quad 2u = 12 \Rightarrow u = \frac{12}{2} = 6 \Rightarrow \therefore \boxed{u = 6}$$

Reemplazamos el valor de $\boxed{u = 6}$; en la ecuación **(3)**:

$$6 - d = 2 \Rightarrow \therefore \boxed{d = 4}$$

Rpta: El número inicial de 2 cifras: $\overline{du} = 46$

Problema 24 **:** Un padre tiene el triple de la edad de su hijo. Si el padre tuviera 20 años menos y su hijo 16 años más, entonces ambos tendrían la misma edad. Hallar las edades actuales de los dos.

Resolución:

Sea: Edad actual del padre = P
Edad actual del hijo = H

Del enunciado, planteamos las ecuaciones:

$$\boxed{P = 3H} \text{ .... (1)} \quad ; \quad \boxed{P - 20 = H + 16} \text{ .... (2)}$$

Reemplazamos **(1)** en **(2)**:

$$3H - 20 = H + 16 \Rightarrow 2H = 36 \Rightarrow \therefore \boxed{H = 18}$$

Reemplazamos el valor de $\boxed{H = 18}$; en la ecuación **(1)**:

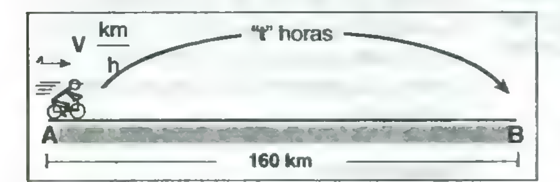
$$P = 3H \Rightarrow P = 3(18) \Rightarrow \therefore \boxed{P = 54}$$

Rpta: Las edades actuales son:
Padre: **P = 54 años** ; Hijo: **H = 18 años**

Problema 25 : Un ciclista empleó cierto tiempo para ir de un pueblo a otro, distantes entre si 160 km; si la velocidad media hubiera sido 8 km más por hora, habría empleado una hora menos en recorrer la misma distancia. ¿Cuál fue la velocidad y qué tiempo empleó?

Resolución:

Sea: $\begin{cases} t = \text{Tiempo empleado en recorrer los 160 km} \\ V = \text{Velocidad empleado en recorrer los 160 km} \end{cases}$



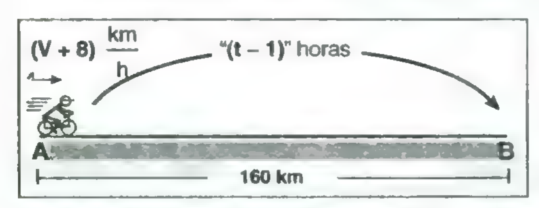
Sabemos que:

Espacio = Velocidad × tiempo

Donde:

$160 = V \times t$ .... **(1)**

Si la velocidad media hubiera sido 8 km más por hora, habría empleado una hora menos en recorrer la misma distancia o sea los 160 km



Sabemos que:

Espacio = Velocidad × tiempo

Donde:

$160 = (V + 8) \times (t - 1)$

$160 = Vt - V + 8t - 8$ ..... **(2)**

Reemplazamos **(1)** en **(2)**:

$\cancel{Vt} = \cancel{Vt} - V + 8t - 8 \Rightarrow \boxed{V = 8t - 8}$ ..... **(3)**

Reemplazamos **(3)** en **(1)**:

$160 = (8t - 8) \times t \Rightarrow 160 = 8(t - 1) \times t$

$20 = (t - 1) \times t$; *descomponemos el 20 como:* $\boxed{20 = 4 \times 5}$

$4 \times 5 = (t - 1) \times t$ ➡ ***De donde:*** $\boxed{t = 5}$

Luego, reemplazamos el valor de $\boxed{t = 5}$; en la ecuación **(3)**; obteniendo:

$V = 8(5) - 8 \Rightarrow V = 40 - 8 \Rightarrow \therefore \boxed{V = 32}$

Rpta: La velocidad: V = 32 km/h y el tiempo es: t = 5 horas.

TALLER DE EJERCICIOS Nº 54

Problema 1 : La suma de un número, más el triple de otro es igual a 17; si del triple del primero, se resta el duplo del segundo se obtiene 7. ¿Cuáles son los números?

Resolución:

Rpta. 5 y 4

Problema 2 : La diferencia de dos números es -9/4 y su cociente 0,1 ¿Cuáles son los números?

Resolución:

Rpta. 1/4 y 5/2

Problema 3 : Si se aumenta en 2 cm el largo y el ancho de un rectángulo, el perímetro resulta de 24 cm. Si el largo se disminuye en 2 cm resulta un cuadrado. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

Resolución:

Rpta. 5 cm y 3 cm

Problema 4 : La suma de dos números es 406, su cociente es 2 y el resto 91. ¿Cuáles son los números?

Resolución:

Rpta. 301 y 105

Problema 5 : Si al numerador de una fracción se le suma 1 y se le resta 2 al denominador, dicha fracción se convierte en 1; si se resta 1 al numerador y se le suma 1 al denominador, se transforma en 1/6. ¿Cuál es esa fracción?

Resolución:

Rpta. 2/5

Problema 6 : Julio tiene la mitad de la edad que tendrá Pedro dentro de 5 años y Pedro tiene la mitad de las dos edades, más 5. ¿Cuáles son las edades de Julio y de Pedro?

Resolución:

Rpta. Julio = 15 años
Pedro = 25 años

Problema 7 : Un número de dos cifras es tal que la cifra de las decenas es igual a los 3/4 de la cifra de las unidades; si se permutan las cifras se obtiene un número 9 unidades mayor que el primero. ¿Cuál es el primer número?

Resolución:

Rpta. 34

Problema 8 : El largo de un rectángulo es igual al ancho aumentado en un 40%. Si el perímetro es de 48 m. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

Resolución:

Rpta. 10 m y 14 m

PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE SISTEMA DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

NIVEL I

Problema 1: La suma de las edades de Nataly y Vanessa es 50 años y el triple de la edad de Nataly es igual al doble de la edad de Vanessa. ¿Cuál edad tiene Nataly?

A) 20 años **B)** 30 años **C)**40 años
D) 10 años **E)** N.A.

Problema 2: Halla dos números tales que el triple del mayor excede a un tercio del menor en 176 y cinco veces el menor excede a tres octavos del mayor en 216.

A) 64 y 28 **B)** 32 y 96 **C)** 64 y 48
D) 48 y 24 **E)** N.A.

Problema 3: Halla una fracción equivalente a 5/8; cuya suma de sus términos sea 117.

A) 32/69 **B)** 35/67 **C)** 72/45
D) 45/72 **E)** 45/82

Problema 4: La suma de dos números es igual a los cinco tercios de su diferencia y el mayor excede a dos veces el menor en 32. ¿Cuál es el mayor?

A) 16 **B)** 64 **C)** 32 **D)** 48 **E)** 26

Problema 5: Halla dos números tales que el quíntuplo del mayor exceda tres cuartos del menor en 54 y tres veces el menor exceda a dos tercios del mayor en 16.

A) 13 y 9 **B)** 14 y 10 **C)** 12 y 9
D) 12 y 8 **E)** N.A.

Problema 6: En una granja donde existen vacas y gallinas se contaron 80 cabezas y 220 patas (extremidades). ¿Cuántas vacas hay?

A) 50 **B)** 30 **C)** 20 **D)** 40 **E)** 60

Problema 7: La suma de los inversos de dos números es 7/6 y la diferencia de estos inversos es 1/6. ¿Cuál es el producto de dichos números?

A) 3/2 **B)** 4 **C)** 5/2 **D)** 3 **E)** N.A.

Problema 8: Andrés es 40 años más joven que Sara. Dentro de 3 años Sara tendrá el triple de la edad de Andrés. ¿Qué edad tienen ahora Sara?

A) 19 años **B)** 17 años **C)** 75 años
D) 57 años **E)** N.A.

Problema 9: Si al doble de la edad de Nataly, le sumamos el triple de la edad de Vanessa obtenemos 77 años. Si al triple de la edad de Nataly, le sumamos el doble de la edad de vanessa, resulta 78 años. ¿Qué edad tiene Vanessa?

A) 17 años **B)** 16 años **C)** 15 años
D) 18 años **E)**14 años

Problema 10: Si al numerador de la fracción 3/5 se le suma un número y al denominador se le resta el mismo número se obtiene otra fracción equivalente a la recíproca de la fracción dada. Calcular el número.

A) 3 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

Problema 11: Si al mayor de dos núme-

ros se divide entre el menor, el cociente es 4 y el residuo 3; y el quíntuplo del menor se divide entre el mayor, el cociente es 1 y el residuo 16. ¿Cuál es el menor?

A) 29 **B)** 79 **C)** 19 **D)** 89 **E)** 97

Problema : Si a un número se le quita 30 unidades, queda los 3/5 del número. ¿Qué cantidad se le debe quitar al número inicial para que quede los 2/3 del mismo?

A) 27 **B)** 25 **C)** 24 **D)** 26 **E)** 22

Problema : Tengo 360 soles y deseo comprar, camisas y pantalones. Si compro 2 camisas y un pantalón me sobran 50 soles; pero si compro 1 camisa y dos pantalones me faltan 20 soles. ¿Cuánto cuesta cada camisa?

A) S/. 60 **B)** S/. 80 **C)** S/. 100
D) S/.150 **E)** S/. 120

Problema : Una lancha puede viajar a 20 km/h en aguas tranquilas; puede navegar 36 km/h a favor de la corriente, en el mismo tiempo que viaja río arriba 24 km. ¿Cuál es la velocidad de la corriente?

A) 63 **B)** 45 **C)** 27 **D)** 72 **E)** 54

Problema : La suma de las dos cifras de un número es 9. Si la cifra de las decenas se aumenta en 1 y la cifra de las unidades se disminuyen en 1; las cifras se invierte. ¿Cuál es el número?

A) 63 **B)** 45 **C)** 27 **D)** 72 **E)** 54

Clave de Respuestas

1. A	2. C	3. D	4. B	5. D
6. B	7. D	8. D	9. C	10. B
11. C	12. B	13. B	14. C	15. B

NIVEL II

Problema : El doble de la edad de Fidel excede en 50 años a la edad de susana, y 1/4 de la edad de Susana es 35 años menos que la edad de Fidel. Hallar la edad de Fidel?

A) 35 años **B)** 40 años **C)** 45 años
D) 30 años **E)** 50 años

Problema : Un número excede a otro en 20; hallar los números sabiendo que 1/5 del mayor más 1/3 del menor es igual a la diferencia. (Dar como respuesta el mayor).

A) 30 **B)** 40 **C)** 50 **D)** 20 **E)** 60

Problema : Halla dos números, si el tercio del primero más la mitad del segundo dan 14, siendo el quinto del primero igual al sexto del segundo. (Dar como respuesta el menor).

A) 16 **B)** 18 **C)**15 **D)** 20 **E)** N.A.

Problema : Se paga una cuota de S/. 425 con 60 billetes; unas de 5 soles y otras de 10 soles. ¿Cuántos billetes son de 10 soles?

A) 28 **B)** 25 **C)** 30 **D)** 35 **E)** 32

Problema : Dos números están entre si como 3 a 4; pero si se añade 5 a cada uno de ellos su relación será como 4 es a 5. Hallar el menor de dichos números.

A) 15 **B)** 20 **C)** 25 **D)** 16 **E)** 18

Problema : La relación de dos números es de 6 a 5; pero si se disminuyera a cada uno de ellos en 4. Su relación quedaría como 4 es a 3. Hallar el mayor de dicho número.

A) 10 **B)** 12 **C)** 14 **D)** 16 **E)** 20

Problema : Triplicando el denominador de una fracción resulta 1/5 y disminuyendo el mismo denominador en 2, su valor es igual a la unidad. Hallar la fracción.

A) 2/3 **B)** 5/3 **C)** 3/5 **D)** 6/9 **E)** 5/8

Problema : Las edades de A y B están en la relación de 4 a 5. Hace 15 años la relación era de 1 a 2. Halla la edad que tiene A.

A) 20 años **B)** 25 años **C)** 30 años
D) 35 años **E)** 40 años

Problema : Si al numerador de una fracción se añade 5, el valor de la fracción es 2; y si al numerador se resta 2, el valor de la fracción es 1. Halla la fracción.

A) 5/8 **B)** 7/9 **C)** 9/7 **D)** 6/4 **E)** N.A

Problema : Si Manuel le dá a Franklin 30 soles, ambos tienen igual suma, pero si Franklin le dá a Manuel 30 soles, éste tiene 4 veces lo que le queda a Franklin. ¿Cuánto tiene Franklin?

A) 130 soles **B)** 110 soles **C)** 70 soles
D) 90 soles **E)** 100 soles

Problema : Hace 6 años la edad de Nataly era 3 veces la edad de Vanessa y dentro de 8 años excederá en 4 años a la edad de Vanessa. ¿Qué edad tiene Nataly?

A) 8 años **B)** 12 años **C)** 10 años
D) 14 años **E)** N.A.

Problema : Un motociclista empleó cierto tiempo para ir de un pueblo a otro; distantes entre si 240 km, si la velocidad media hubiera sido 6 km menos por hora, habría empelado dos horas más en recorrer la misma distancia. ¿Cuál fue la velocidad y qué tiempo empleó?

A) 35 km/h y 9 h **B)** 32 km/h y 8 h
C) 30 km/h y 6 h **D)** 30 km/h y 8 h
E) N.A.

Problema : Un cierto número que esta comprendido entre 10 y 100 es 8 veces la suma de sus digitos y si se le resta 45 sus dígitos se invierten. Hallar el número.

A) 27 **B)** 72 **C)** 63 **D)** 36 **E)** 45

Problema : Se tiene 74 litros de agua repartidos en baldes de 2 y 3 litros. Si contamos el total de baldes, encontramos que son 32 en total. ¿Cuántos baldes de 2 litros hay?

A) 2 **B)** 22 **C)** 20 **D)** 23 **E)** 25

Problema : En una reunión se cuentan tantos caballeros como tres veces el número de damas, después se retiran 8 parejas, el número de caballeros, que aún quedaba es igual a 5 veces el de damas. ¿Cuántos caballeros habían inicialmente?

A) 45 **B)** 36 **C)** 48 **D)** 62 **E)** 51

Clave de Respuestas

1. C	2. C	3. C	4. B	5. A
6. B	7. C	8. A	9. C	10. C
11. B	12. D	13. B	14. B	15. C

5.7 SISTEMAS DE ECUACIONES CON TRES VARIABLES

Un sistema de tres ecuaciones con tres variables (incógnitas) es de la forma:

$$\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{array}$$

⇒ ***Donde:***
- a_1, a_2, a_3, *son los coeficientes de "x"*
- b_1, b_2, b_3, *son los coeficientes de "y"*
- c_1, c_2, c_3, *son los coeficientes de "z"*
- d_1, d_2, d_3, *son los términos independientes*

- ***Un sistema de ecuaciones de primer grado con tres variables (incógnitas) puede ser resuelto por los siguientes métodos:***

a) Por Reducción	***c) Por Igualación***
b) Por Sustitución	***d) Por Determinación o por el método de Cramer***

a) Método por Reducción:

Se elimina una de las incógnitas tomando de dos en dos las ecuaciones. Esto nos permite formar un sistema de dos ecuaciones con las otras dos incógnitas que se resuelve por cualquiera de los métodos conocidos.

Ejemplo①: Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 & \text{........ (1)} \\ 2x - y + z = 3 & \text{........ (2)} \\ 4x - y - z = 4 & \text{........ (3)} \end{cases}$$

Resolución:

Sumamos miembro a miembro las ecuaciones **(1)** y **(2)**:

$$\begin{array}{rl} x + y + z = 6 & \text{.......... (1)} \\ 2x - y + z = 3 & \text{.......... (2)} \\ \hline \Sigma\ \textbf{M.A.M:}\ \boxed{3x + 2z = 9} & \text{.......... (4)} \end{array}$$

Sumamos miembro a miembro las ecuaciones **(1)** y **(3)**:

$$\begin{array}{rl} x + y + z = 6 & \text{.......... (1)} \\ 4x - y - z = 4 & \text{.......... (3)} \\ \hline \end{array}$$

$$\Sigma\ \textbf{M.A.M:}\quad 5x = 10 \ \Rightarrow\ \therefore\ \boxed{x = 2}$$

Reemplazamos el valor de **"x"** hallado, en la ecuación **(4)**; obteniendo:

$$3(2) + 2z = 9 \ \Rightarrow\ 6 + 2z = 9 \ \Rightarrow\ 2z = 3 \ \Rightarrow\ \therefore\ \boxed{z = 3/2}$$

Reemplazando los valores de **"x"** y **"z"** en **(1)**:

$$2 + y + \frac{3}{2} = 6 \ \Rightarrow\ y = 6 - \frac{7}{2} \ \Rightarrow\ \therefore\ \boxed{y = 5/2}$$

Rpta: El conjunto solución del sistema es: $S = \{2 ; 5/2 ; 3/2\}$

b) Método por Sustitución:

Se despeja una incógnita de una de las ecuaciones y se sustituye en los otros dos para obtener un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Ejemplo ②: Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 11 & \text{........ (1)} \\ 5x - y - 2z = -10 & \text{........ (2)} \\ 2y + 3z = 6 & \text{............... (3)} \end{cases}$$

Resolución:

De la ecuación **(3)**, despejamos "y"

$$2y + 3z = 6 \;\Rightarrow\; 2y = 6 - 3z \;\Rightarrow\; \therefore\; \boxed{y = \frac{6-3z}{2}} \quad \text{........ (4)}$$

Sustituimos el valor de **(4)** en **(1)**:

$$2x - 3\left(\frac{6-3z}{2}\right) + z = 11 \;\Rightarrow\; 4x - (18 - 9z) + 2z = 22$$

$$4x - 18 + 9z + 2z = 22$$

$$\boxed{11z + 4x = 40} \quad \text{........ (5)}$$

Sustituimos el valor de **(4)** en **(2)**:

$$5x - \left(\frac{6-3z}{2}\right) - 2z = -10 \;\Rightarrow\; 10x - (6 - 3z) - 4z = -20$$

$$10x - 6 + 3z - 4z = -20$$

$$\boxed{10x - z = -14} \quad \text{........ (6)}$$

Despejamos **"z"** de la Ecuación **(6)**:

$$10x - z = -14 \;\Rightarrow\; 10x + 14 = z \;\Rightarrow\; \therefore\; \boxed{z = 10x + 14} \quad \text{........ (7)}$$

Reemplazamos **(7)** en **(5)**:

$$11(10x + 14) + 4x = 40 \;\Rightarrow\; 114x + 154 = 40 \;\Rightarrow\; 114x = -114$$

$$\therefore\; \boxed{x = -1}$$

Reemplazamos el valor de **"x"** hallado en la ecuación **(7)**:

$$z = 10(-1) + 14 \;\Rightarrow\; \therefore\; \boxed{z = 4}$$

Reemplazamos el valor de **"z"** hallado en **(4)**:

$$y = \frac{6 - 3(4)}{2} \Rightarrow \therefore \boxed{y = -3}$$

Rpta. El conjunto solución del sistema es: $S = \{-1 ; -3 ; 4\}$

c) *Método de igualación:*

Se despeja una incógnita de las tres ecuaciones y se igualan sus valores dos a dos, quedando un sistema de ecuaciones con dos incógnitas.

Ejemplo 3: Resolver el sistema: $\begin{cases} 2x + y + z = 1 & \text{......... (1)} \\ 3x + 2y + 2z = 1 & \text{......... (2)} \\ x - 2y - z = 0 & \text{............. (3)} \end{cases}$

Resolución:

En cada una de las ecuaciones dadas, despejemos la incógnita **"x"**

$$2x + y + z = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1 - y - z}{2}} \text{ .... (I)}$$

$$3x + 2y + 2z = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1 - 2y - 2z}{3}} \text{ .... (II)}$$

$$x - 2y - z = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2y + z} \text{ .... (III)}$$

Igualamos las ecuaciones **(I)** y **(III)**:

$$\frac{1 - y - z}{2} = 2y + z \Rightarrow 1 - y - z = 4y + 2z \Rightarrow \boxed{1 = 5y + 3z} \text{ .... (a)}$$

Igualamos las ecuaciones **(II)** y **(III)**:

$$\frac{1 - 2y - 2z}{3} = 2y + z \Rightarrow 1 - 2y - 2z = 6y + 3z \Rightarrow \boxed{1 = 8y + 5z} \text{ .... (b)}$$

Igualamos las ecuaciones **(I)** y **(II)**:

$$\frac{1 - y - z}{2} = \frac{1 - 2y - 2z}{3} \Rightarrow 3 - 3y - 3z = 2 - 4y - 4z \Rightarrow \boxed{y = -z - 1} \text{ .... (c)}$$

Sustituimos el valor de **"y"** en la ecuación **(a)**:

$$1 = 5(-z - 1) + 3z \Rightarrow 2z = -6 \Rightarrow \therefore \boxed{z = -3}$$

Reemplazamos el valor de **"z"** en la ecuación **(a)**:

$$1 = 5y + 3(-3) \Rightarrow 10 = 5y \Rightarrow \therefore \boxed{y = 2}$$

Reemplazamos los valores de **"y"** y **"z"** en la ecuación **(1)**:

$$2x + 2 + (-3) = 1 \quad \Rightarrow \quad 2x = 2 \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad x = 1$$

Luego, el conjunto solución del sistema es: $S = \{1\ ;\ 2\ ;\ -3\}$

d) Método por Determinantes o Método de Cramer:

Supongamos el sistema de ecuaciones lineales con coeficientes literales.

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

Por determinantes obtenemos:

$$x = \frac{\begin{bmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}} \quad ; \quad y = \frac{\begin{bmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}} \quad ; \quad z = \frac{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}}$$

Ejemplo 4: Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 & \text{......... (1)} \\ 3x + 2y + 2z = 1 & \text{......... (2)} \\ x - 2y - z = 0 & \text{......... (3)} \end{cases}$$

Resolución:

El sistema dado, se puede escribir así:

$$\begin{cases} 2x + 1y + 1z = 1 & \text{......... (1)} \\ 3x + 2y + 2z = 1 & \text{......... (2)} \\ 1x - 2y - 1z = 0 & \text{......... (3)} \end{cases}$$

Por el **método de Cramer,** obtenemos:

$$x = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}}$$

; ***Aplicamos el método de Sarrus en el numerador y denominador.***

- **Para el numerador:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-2)+(-2)+(0)-(0)-(-4)-(-1) = 1$$

- **Para el denominador:**

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-4)+(-6)+(2)-(2)-(-8)-(-3) = 1$$

Luego: $x = \frac{1}{1} \Rightarrow \therefore \boxed{x = 1}$

☞ Para la variable **"y"** procedemos de igual modo como se ha hecho para la variable **"x"**.

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{2}{1} \Rightarrow \therefore \boxed{y = 2}$$

☞ Para la variable **"z"**, hacemos igual como los casos anteriores.

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}}$$

$$z = \frac{-3}{1} \Rightarrow \therefore \boxed{z = -3}$$

Luego, el conjunto solución del sistema es: $\boxed{S = \{1\ ;\ 2\ ;\ -3\}}$

5.8 SISTEMAS ESPECIALES DE ECUACIONES

Para estos sistemas especiales, vamos a estudiar dos casos:

(1.) *Cuando el sistema de ecuaciones está expresado como **"Igualdades de cuatro partes"***

(2.) *Cuando el sistema contiene expresiones de las formas:*

Ejemplo (1): Resolver el sistema: $2x + y - 1 = x + 3y - 3 = 3x - y + 1 = 20$

Resolución:

El sistema dado, se puede escribir así:

$$2x + y - 1 = 20 \Rightarrow \boxed{2x + y = 21} \quad \text{.......... (1)}$$

$$x + 3y - 3 = 20 \Rightarrow \boxed{x + 3y = 23} \quad \text{.......... (2)}$$

$$3x - y + 1 = 20 \Rightarrow \boxed{3x - y = 19} \quad \text{.......... (3)}$$

Sumamos miembro a miembro las ecuaciones **(1)** y **(3)**:

$$2x + y = 21 \quad \text{.......... (1)}$$

$$3x - y = 19 \quad \text{.......... (2)}$$

$$\Sigma\ \text{M.A.M:} \quad 5x = 40 \Rightarrow x = \frac{40}{5} \Rightarrow \therefore \boxed{x = 8}$$

Reemplazamos el valor de "**x**" hallado, en la ecuación **(1)**:

$$2(8) + y = 21 \Rightarrow \therefore \boxed{y = 5}$$

Rpta. Luego, el conjunto solución del sistema es: $S = \{8 ; 5\}$

Ejemplo (2): Resolver el sistema: $3x - 2y + 5 = x + 3z - 7 = 4y - z + 8 = 18$

Resolución:

El sistema dado, se puede escribir así:

$$3x - 2y + 5 = 18 \Rightarrow \boxed{3x - 2y = 13} \quad \text{.......... (1)}$$

$$x + 3z - 7 = 18 \Rightarrow \boxed{x + 3z = 25} \quad \text{.......... (2)}$$

$$4y - z + 8 = 18 \Rightarrow \boxed{4y - z = 10} \quad \text{.......... (3)}$$

Multiplicamos por 3 ambos miembros de la ecuación **(3)**:

$$3(4y - z) = 3(10) \Rightarrow \boxed{12y - 3z = 30} \quad \text{.......... (4)}$$

De las ecuaciones **(2)** y **(4)**, obtenemos:

$$x + 3z = 25 \quad \text{.......... (2)}$$

$$12y - 3z = 30 \quad \text{.......... (4)}$$

$$\Sigma\ \text{M.A.M:} \quad x + 12y = 55 \Rightarrow \boxed{x = 55 - 12y} \quad \text{.......... (5)}$$

Reemplazamos **(5)** en **(1)**:

$$3(55-12y)-2y=13 \Rightarrow 165-36y-2y=13 \Rightarrow 152=38y \Rightarrow \therefore \quad y=4$$

Reemplazamos el valor de **"y"** en **(5)**:

$$x=55-12(4) \Rightarrow \therefore \quad x=7$$

Reemplazamos el valor de "x" en **(2)**:

$$7+3z=25 \Rightarrow 3z=18 \Rightarrow \therefore \quad z=6$$

Rpta: El conjunto solución del sistema es: $S=\{7;4;6\}$

Ejemplo 3: Resolver el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=3 & \text{.......... (1)} \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=4 & \text{.......... (2)} \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=5 & \text{.......... (3)} \end{cases}$$

Resolución:

Para este tipo de ejercicios es recomendable hacer, cambios de variable así:

$$\boxed{\frac{1}{x}=a} \quad ; \quad \boxed{\frac{1}{y}=b} \quad ; \quad \boxed{\frac{1}{z}=c}$$

Reemplazamos cada uno de estos valores en las ecuaciones dadas, obteniendo:

$$\boxed{a+b=3} \text{ .... (1)} \qquad \boxed{a+c=4} \text{ .... (2)} \qquad \boxed{b+c=5} \text{ .... (3)}$$

Restamos miembro a miembro las ecuaciones **(2)** y **(3)**:

$$a+c=4 \quad \text{.......... (2)}$$
$$b+c=5 \quad \text{.......... (3)}$$

Restamos M.A.M: $\boxed{a-b=-1}$ .... **(4)**

Sumamos miembro a miembro las ecuaciones **(1)** y **(4)**:

$$a+b=3 \quad \text{.......... (1)}$$
$$a-b=-1 \quad \text{.......... (4)}$$

Σ **M.A.M:** $2a=2 \Rightarrow \therefore \quad \boxed{a=1}$

Reemplazamos el valor de **"a"** en **(1)**:

$$1+b=3 \Rightarrow \therefore \quad \boxed{b=2}$$

Reemplazamos el valor de **"b"** en **(3)**:

$$2 + c = 5 \Rightarrow \therefore \boxed{c = 3}$$

Ahora, calculamos los valores de **x, y, z,** reemplazamos los valores de **a, b** y **c**.

$$\frac{1}{x} = a \Rightarrow \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 1}$$

$$\frac{1}{y} = b \Rightarrow \frac{1}{y} = 2 \Rightarrow \therefore \boxed{y = \frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{z} = c \Rightarrow \frac{1}{z} = 3 \Rightarrow \therefore \boxed{z = \frac{1}{3}}$$

Rpta: El conjunto solución del sistema es: $S = \{1 ; 1/2 ; 1/3\}$

Ejemplo 4: Resolver el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{y} + \dfrac{2}{z} = 5 & \text{....... (1)} \\ \dfrac{4}{x} + \dfrac{5}{y} - \dfrac{3}{z} = 5 & \text{....... (2)} \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{y} - \dfrac{4}{z} = 28 & \text{....... (3)} \end{cases}$$

Resolución:

El sistema dado, se puede escribir así:

$$\boxed{2\frac{1}{x} - 3\frac{1}{y} + 2\frac{1}{z} = 5} \text{ .... (1)} \qquad \boxed{4\frac{1}{x} + 5\frac{1}{y} - 3\frac{1}{z} = 5} \text{ .... (2)}$$

$$\boxed{3\frac{1}{x} - 2\frac{1}{y} - 4\frac{1}{z} = 28} \text{ .... (3)}$$

Hacemos cambios de variables: $\boxed{\frac{1}{x} = A}$; $\boxed{\frac{1}{y} = B}$; $\boxed{\frac{1}{z} = C}$

Reemplazamos cada uno de estos valores en las ecuaciones dadas, obteniendo:

$$\boxed{2A - 3B + 2C = 5} \text{ .... (1)} \qquad \boxed{4A + 5B - 3C = 5} \text{ .... (2)}$$

$$\boxed{3A - 2B - 4C = 28} \text{ .... (3)}$$

Igualamos las ecuaciones **(1)** y **(2)**:

$$2A - 3B + 2C = 4A + 5B - 3C \Rightarrow 5C = 2A + 8B \Rightarrow \boxed{C = \frac{2A + 8B}{5}} \text{ .... (4)}$$

Reemplazamos **(4)** en **(3)**:

$$3A - 2B - 4\left(\frac{2A + 8B}{5}\right) = 28$$

$$15A - 10B - 4(2A + 8B) = 140 \Rightarrow \boxed{7A - 42B = 140} \text{ .... (5)}$$

Multiplicamos por 2 ambos miembros de la ecuación **(1)**:

$$2(2A - 3B + 2C) = 5 \cdot 2 \Rightarrow \boxed{4A - 6B + 4C = 10} \text{ .... (6)}$$

Sumamos miembro a miembro las ecuaciones **(6)** y **(3)**:

$$4A - 6B + 4C = 10 \text{ .... (6)}$$

$$3A - 2B - 4C = 28 \text{ .... (3)}$$

$$\sum \textbf{M.A.M}: 7A - 8B = 38 \Rightarrow \boxed{7A = 8B + 38} \text{ .... (7)}$$

Reemplazamos **(7)** en **(5)**:

$$38 + 8B - 42B = 140 \Rightarrow -34B = 102 \Rightarrow \therefore \boxed{B = -3}$$

Reemplazamos el valor el **"B"** en **(7)**:

$$7A = 38 + 8(-3) \Rightarrow 7A = 14 \Rightarrow \therefore \boxed{A = 2}$$

Reemplazamos los valores de **"A"** y "B" en **(4)**:

$$C = \frac{2(2) + 8(-3)}{5} \Rightarrow \therefore \boxed{C = -4}$$

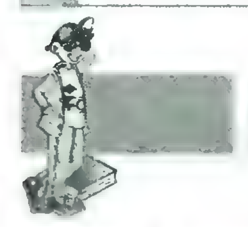
Ahora, calculamos los valores de **x, y, z**, reemplazamos los valores de **A, B** y **C**

$$\frac{1}{x} = A \Rightarrow \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow \therefore \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{y} = B \Rightarrow \frac{1}{y} = -3 \Rightarrow \therefore \boxed{y = -\frac{1}{3}}$$

$$\frac{1}{z} = C \Rightarrow \frac{1}{z} = -4 \Rightarrow \therefore \boxed{z = -\frac{1}{4}}$$

Rpta: El conjunto solución del sistema es: $S = \{1/2 \,;\, -1/3 \,;\, -1/4\}$



PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE SISTEMAS DE ECUACIONES

Problema 1 : La suma de tres números es 19; la suma de los dos primeros es 16, y la suma de los dos últimos es 12. Halar los números.

Resolución:

Sean los tres números: **x, y, z**

Del enunciado, obtenemos:
$$\begin{cases} x + y + z = 19 & \text{........ (1)} \\ x + y \; = 16 & \text{........ (2)} \\ y + z = 12 & \text{........ (3)} \end{cases}$$

Sumamos miembro a miembro las ecuaciones **(2)** y **(3)**:

$$(x + y) + (y + z) = 28 \Rightarrow \boxed{(x + y + z) + y = 28} \quad \text{........ (4)}$$

Reemplazamos **(1)** en **(4)**: $19 + y = 28 \Rightarrow \therefore \boxed{y = 9}$

Reemplazamos el valor de **"y"** en **(2)**: $x + 9 = 16 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 7}$

Reemplazamos el valor de **"y"** en **(3)**: $9 + z = 12 \Rightarrow \therefore \boxed{z = 3}$

Rpta: Luego, los números pedidos son: 7, 9 y 3

Problema 2 : La suma de tres números es 32, la suma de los dos primeros es igual al tercero; y la semisuma del primero con el tercero es igual al segundo aumentado en 1. ¿Cuáles son los números?

Resolución:

Sean los 3 números: **x, y, z**

Del enunciado, obtenemos:

$$\begin{cases} x + y + z = 32 & \text{........ (1)} \\ x + y = z & \text{........ (2)} \\ \dfrac{x + z}{2} = y + 1 & \text{........ (3)} \end{cases}$$

> ***Recuerda que:***
> ***Semisuma*** $= \dfrac{\textit{Suma de 2 términos}}{2}$

Reemplazamos **(2)** en **(1)**: $x + y + z = 32$

$$z + z = 32 \Rightarrow 2z = 32 \Rightarrow \therefore \boxed{z = 16}$$

De la ecuación **(3)** obtenemos:

$$\frac{x+z}{2}=y+1 \Rightarrow x+z=2y+2 \Rightarrow x+16=2y+2$$

$$\therefore \boxed{x=2y-14} \text{ .... (4)}$$

Reemplazamos el valor de **"z"** y la ecuación **(4)** en **(2)**:

$$x+y=z \Rightarrow (2y-14)+y=16 \Rightarrow 3y=30 \Rightarrow \therefore \boxed{y=10}$$

Reemplazamos los valores de **"y"**, **"z"** en **(1)**:

$$x+10+16=32 \Rightarrow \therefore \boxed{x=6}$$

Rpta: Luego, los números pedidos son: {6 ; 10 y 16}

Problema 3: La suma de tres números es 60; el primero excede en 1 al segundo y la suma de los dos primeros es el triple del tercero. Hallar los números.

Resolución:

Sean los 3 números pedidos: **x, y, z**

Del enunciado, obtenemos:
$$\begin{cases} x+y+z=60 & \text{....... (1)} \\ x-1=y & \text{............. (2)} \\ x+y=3z & \text{............. (3)} \end{cases}$$

Reemplazamos **(3)** en **(1)**:

$$3z+z=60 \Rightarrow 4z=60 \Rightarrow \therefore \boxed{z=15}$$

Reemplazamos el valor **"z"** en **(3)**:

$$x+y=3(15) \Rightarrow \boxed{y=45-x} \text{ .... (4)}$$

Reemplazamos **(4)** en **(2)**:

$$x-1=45-x \Rightarrow 2x=46 \Rightarrow \therefore \boxed{x=23}$$

Reemplazamos el valor de **"x"** en **(4)**:

$$y=45-23 \Rightarrow \therefore \boxed{y=22}$$

Rpta. Los números pedidos son: {23 ; 22 y 15}

Problema 4: La suma de los tres dígitos de un número es 12. La suma del dígito de las centenas y el dígito de las decenas excede al dígito de las unidades en 4 y la suma del dígito de las centenas y el dígito de las unidades excede al dígito de la decenas en 4. Hallar el número.

Resolución:

Sea: El número de tres dígitos = $\overline{cdu}$ — **Unidades**, **Decenas**, **Centenas**

$$\boxed{c + d + u = 12} \;\; \text{.........} \; (1)$$

Del enunciado, planteamos las siguientes ecuaciones:

$$\boxed{(c + d) - u = 4} \;\; \text{.........} \; (2) \qquad \boxed{(c + u) - d = 4} \;\; \text{.........} \; (3)$$

Sumamos miembro a miembro las ecuaciones **(2)** y **(3)**:

$$c + \cancel{d} - \cancel{u} = 4 \;\; \text{..........} \; (2)$$

$$c + \cancel{u} - \cancel{d} = 4 \;\; \text{..........} \; (3)$$

$$\Sigma \, \textbf{M.A.M:} \quad 2c = 8 \;\Rightarrow\; \boxed{c = 4}$$

Reemplazamos el valor de **"c"** en **(2)**: $(4 + d) - u = 4 \;\Rightarrow\; \therefore \; \boxed{d = u}$

Reemplazamos los valores de **"c"** y **"d"** en **(1)**:

$$4 + u + u = 12 \;\Rightarrow\; 2u = 8 \;\Rightarrow\; \therefore \; \boxed{u = 4} \text{; También: } \boxed{d = 4}$$

Rpta: El número pedido es: $\overline{cdu} = 444$

Problema 5: El ángulo mayor de un triángulo, excede en 35° al menor de sus ángulos y el menor excede en 20° a la diferencia entre el mayor y el mediano. Cuál es la medida de cada ángulo?

Resolución:

Sean; los tres ángulos del triángulo:

$$\boxed{a = \angle \text{ mayor}} \; ; \; \boxed{b = \angle \text{ mediano}} \; ; \; \boxed{c = \angle \text{menor}}$$

Por propiedad en todo triángulo: $\boxed{a + b + c = 180°}$ .... **(1)**

Del enunciado, obtenemos:

$$\boxed{a - 35° = c} \;\; \text{...........} \; (2) \qquad \boxed{c - 20° = (a - b)} \;\; \text{...........} \; (3)$$

Reemplazamos **(2)** en **(3)**:

$$(a - 35°) - 20° = (a - b) \;\Rightarrow\; \cancel{a} - 55° = \cancel{a} - b \;\Rightarrow\; \therefore \; \boxed{b = 55°}$$

De la ecuación **(3)**, obtenemos:

$$c - 20° = (a - b) \;\Rightarrow\; \boxed{b + c = a + 20°} \;\; \text{...........} \; (4)$$

Reemplazamos **(4)** en **(1)**:

$$a + (a + 20°) = 180° \Rightarrow 2a = 160° \Rightarrow \therefore \boxed{a = 80°}$$

Reemplazamos el valor de **"a"** en **(2)**:

$$80° - 35° = c \Rightarrow \therefore \boxed{c = 45°}$$

Respuesta. Los ángulos del triángulo son: 80° ; 55° y 45°

Problema 6 : A, B y **C** pueden hacer un trabajo en 10 días; **A** y **B** lo pueden hacer en 12 días; **A** y **C** en 20 días. ¿Cuántos días tomarían cada uno de ellos para hacerlo separadamente?

Resolución:

Sea: t = trabajo

Del enunciado, obtenemos:

$A + B + C = 10$ días $\Rightarrow$ **En 1 día harán:** $\boxed{A + B + C = \frac{1}{10}t}$ .... (1)

$A + B = 12$ días $\Rightarrow$ **En 1 día harán:** $\boxed{A + B = \frac{1}{12}t}$ .... (2)

$A + C = 20$ días $\Rightarrow$ **En 1 día harán:** $\boxed{A + C = \frac{1}{20}t}$ .... (3)

Reemplazamos **(2)** en **(1)**:

$$\frac{1}{12}t + C = \frac{1}{10}t \Rightarrow C = \frac{1}{10}t - \frac{1}{12}t \Rightarrow C = \frac{6t - 5t}{60} = \frac{t}{60}$$

$$\therefore \boxed{C = \frac{t}{60}} \quad \text{... (4)}$$

Si **"C"** en 1 día hace $\frac{t}{60}$. ¿En cuántos días hará todo el trabajo **"t"**?

$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ día} \longrightarrow \frac{t}{60} \\ x \longrightarrow t \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{1 \text{ día} \times t}{\frac{t}{60}} \Rightarrow \therefore \boxed{x = 60 \text{ días}}$$

$\therefore$ "C" necesita 60 días para realizar todo el trabajo "t"

Reemplazamos **(4)** en **(3)**:

$$A + \frac{t}{60} = \frac{1}{20}t \Rightarrow A = \frac{t}{20} - \frac{1}{60}t \Rightarrow A = \frac{3t - t}{60} = \frac{2t}{60}$$

$$\boxed{A = \frac{t}{30}} \quad ....(5)$$

Si "**A**" en 1 día hace $\frac{t}{30}$. ¿En cuántos días hará todo el trabajo "**t**"?

$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ día} \longrightarrow \frac{t}{30} \\ y \longrightarrow t \end{array}\right\} \Rightarrow y = \frac{1 \text{ día} \times t}{\frac{t}{30}} \Rightarrow \therefore \boxed{y = 30 \text{ días}}$$

$\therefore$ **"A" necesita 30 días para realizar todo el trabajo "t"**

Reemplazamos **(5)** en **(2)**:

$$\frac{t}{30} + B = \frac{1}{12}t \Rightarrow B = \frac{1}{12}t - \frac{t}{30} \Rightarrow B = \frac{5t - 2t}{60} = \frac{3t}{60}$$

$$\boxed{B = \frac{t}{20}}$$

Si "**B**" en 1 día hace $\frac{t}{20}$. ¿En cuántos días hará todo el trabajo "**t**"?

$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ día} \longrightarrow \frac{t}{20} \\ z \longrightarrow t \end{array}\right\} \Rightarrow z = \frac{1 \text{ día} \times t}{\frac{t}{20}} \Rightarrow \therefore \boxed{z = 20 \text{ días}}$$

$\therefore$ **"B" necesita 20 días para realizar el trabajo "t"**.

Problema 7 : La suma de las tres cifras de un número es 6. Si el número se divide entre la suma de la cifra de las centenas y la de las decenas, el cociente es 41 y si al número se le añade 198 las cifras se invierten. Hallar el número.

Resolución:

Sea; el número de tres cifras: $\overline{cdu}$

Del enunciado, obtenemos:

$$\boxed{c + d + u = 6} \quad ....(1) \qquad \boxed{\frac{\overline{cdu}}{c + d} = 41} \quad ....(2)$$

$$\boxed{\overline{cdu} + 198 = \overline{udc}} \quad ....(3)$$

La ecuación **(3)**, se puede escribir así:

$$\overline{cdu} + 198 = \overline{udc} \Rightarrow (100c + \cancel{10d} + u) + 198 = (100u + \cancel{10d} + c)$$

$$198 = 99u - 99c$$

$$198 = 99(u - c)$$

$$\Downarrow$$

$$u - c = 2$$

$$\boxed{c = u - 2} \ldots\ldots. (4)$$

De la ecuación **(2)**, obtenemos:

$$\overline{cdu} = 41(c + d)$$

$$100c + 10d + u = 41c + 41d$$

$$\boxed{u = 31d - 59c} \ldots\ldots. (5)$$

Reemplazamos **(4)** en **(1)**:

$$(u - 2) + d + u = 6 \Rightarrow 2u + d = 8 \Rightarrow \boxed{d = 8 - 2u} \ldots\ldots. (6)$$

Reemplazamos **(4)** en **(5)**:

$$u = 31d - 59(u - 2) \Rightarrow u = 31d - 59u + 118 \Rightarrow \boxed{60u = 31d + 118} \ldots\ldots. (7)$$

Reemplazamos **(6)** en **(7)**:

$$60u = 31\ (8 - 2u) + 118 \Rightarrow 122u = 366 \Rightarrow \therefore\ \boxed{u = 3}$$

Reemplazamos el valor de "u" en **(6)**:

$$d = 8 - 2(3) \Rightarrow \therefore\ \boxed{d = 2}$$

Reemplazamos el valor de "u" en **(4)**:

$$c = 3 - 2 \Rightarrow \therefore\ \boxed{c = 1}$$

Respuesta: Luego, el número pedido es: $\overline{cdu} = 123$

TALLER DE PROBLEMAS Nº 55

Problema 1 : La suma de tres números es 13. El triple del menor más el mediano excede en 5 al duplo del mayor. El triple del mayor más el duplo del menor excede en 4 a cuatro veces el mediano. Hallar los números.

Resolución:

Rpta. 3,5 ; 4,5 y 5

Problema 2 : La suma de las edades de tres hermanos es 35 años. El mayor tiene dos veces la edad del menor y el triple de la edad del mediano excede en 1 al duplo de la edad del mayor. ¿Cuál es la edad de cada uno?

Resolución:

Rpta. 8; 11 y 16 años

Problema 3 : La suma de las tres cifras de un número es 12. La suma de las cifras de las centenas y decenas excede en 2 a la cifra de las unidades. Si al número se suma 198 el nuevo número tiene las mismas cifras pero en orden inverso. ¿Cuál es el número?

Resolución:

Rpta. 345

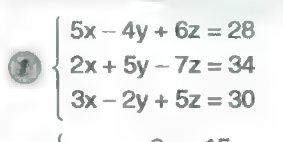
Problema 4 : La suma de las edades de una señora, su esposo y su hija es de 84 años. La quinta parte de la edad de la hija es igual a la diferencia entre las edades del padre y de la madre. La suma de las edades de la madre y la hija es igual a 4/3 de la edad del padre. ¿Cuál es la edad de cada persona?

Resolución:

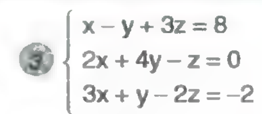
Rpta. esposa = 33 años
esposo = 36 años
hija = 15 años

EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE SISTEMAS DE ECUACIONES CON TRES VARIABLES

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones, aplicando la **regla de Cramer**:



1. $\begin{cases} 5x - 4y + 6z = 28 \\ 2x + 5y - 7z = 34 \\ 3x - 2y + 5z = 30 \end{cases}$



3. $\begin{cases} x - y + 3z = 8 \\ 2x + 4y - z = 0 \\ 3x + y - 2z = -2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y + 2z = 15 \\ x + 2y + z = 16 \\ 2x + y + z = 17 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ x - 2y + 2z = 10 \\ 3x + y - 2z = -3 \end{cases}$

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones, aplicando cualquiera de los métodos estudiados o sea (reducción, sustitución, igualación o determinantes).

5. $\begin{cases} 3x + y + z = 8 \\ x + 3y + z = 10 \\ x + y + 3z = 12 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 4x + 2y - 3z = 17 \\ x + y - 2z = 9 \\ 2x - y + z = -3 \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{3} - \dfrac{z}{4} = 1 \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} - \dfrac{z}{2} = -3 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} - \dfrac{z}{3} = 7 \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - z = -10 \\ y - \dfrac{z}{7} = 8 \\ x - \dfrac{y}{5} = 6 \end{cases}$

9. $3x + 2y - 1 = 4y + z + 4 = 2z + 5x - 15 = 25$

10. $2y + 2z - 2x = 2z + 2x - 6y = x + y - 2z = 2$

11. $\begin{cases} \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{y} + \dfrac{2}{z} = 6 \\ \dfrac{6}{x} + \dfrac{8}{y} - \dfrac{4}{z} = 8 \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{6}{y} + \dfrac{8}{z} = 3 \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{6}{x} - \dfrac{5}{y} + \dfrac{12}{z} = 3 \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{10}{y} - \dfrac{6}{z} = 2 \\ \dfrac{9}{x} + \dfrac{15}{y} + \dfrac{18}{z} = 9 \end{cases}$

Resolver los siguientes problemas:

Problema 13: La suma de tres números es 36, la suma de los dos primeros es 21 y la suma de los dos últimos es 24. Hallar el mayor de dichos números.

A) 12 **B)** 9 **C)** 15 **D)** 18 **E)** 14

Problema 14: La suma de tres números es 32, la suma de los dos primeros es igual al tercero, y la semidiferencia del tercero con el primero es igual al segundo disminuido en 1. ¿Cuál es el menor?

A) 14 **B)** 16 **C)** 6 **D)** 4 **E)** 2

Problema 15: la suma de tres números es 127. Si a la mitad del número menor se le añade la tercera parte del mediano y la novena parte del mayor, se obtiene 39 y el mayor excede en 4 a la mitad de la suma del mediano y el menor. ¿Cuál es el mayor?

A) 45 **B)** 42 **C)** 40 **D)** 48 **E)** 43

Problema 16: La suma de las cifras de un número de tres cifras es 16. La suma de la cifra de las centenas y la de las decenas es el triple de la cifra de las unidades y si al número se le resta 99, las cifras se invierten. Hallar el número.

A) 826 **B)** 475 **C)** 745
D) 574 **E)** N.A

Problema 17: de los tres ángulos de un triángulo ABC, el ángulo A excede en 30° al ángulo B, y este excede en 30° al ángulo C. ¿Qué clase de triángulo es el triángulo ABC?

A) Isósceles **B)** Isósceles rectángulo

C) Rectángulo **D)** Equilatero **E)** N.A.

Problema 18: Un depósito se puede llenar por los conductos A y B en 70 horas, por los conductos A y C en 84 horas y por los conductos B y C en 140 horas. ¿Qué tiempo demorarán los 3 juntos en llenar el depósito?

A) 70 h **B)** 60 h **C)** 80 h
D) 50 h **E)** 40 h

Problema 19: La suma de las dos cifras de un número es 9. Si la cifra de las decenas se aumenta en 1 y la cifra de las unidades se disminuye en 1, las cifras se invierten. ¿Cuál es el número?

A) 27 **B)** 63 **C)** 54 **D)** 45 **E)** N.A

Problema 20: Cuatro hermanos tienen 45 dólares. Si el dinero del primero es aumentado en 2 dólares , el del segundo reducido en dos dólares, se duplica el del tercero y el del cuarto se reduce a la mitad, todos los hermanos tendrán la misma cantidad de dólares. ¿Cuánto dinero tiene el primero?

A) 8 dólares **B)** 6 dólares **C)** 9 dólares
D) 10 dólares **E)** N.A

Problema 21: Los tres hijos de Manuel tienen: $(2x + 9$; $(x - 1)$ y $(x + 2)$ años respectivamente. Cuántos años tiene que transcurrir para que la suma de las edades de los dos últimos sean iguales a la edad del primero.

A) 6 años **B)** 9 años **C)** 8 años
D) 9 años **E)** N.A

Problema 22: En un corral de chanchos y pelicanos el número de ojos es 24 menos que el número de patas (extremidades). ¿Hallar el número de hocicos?

A) 11 **B)** 12 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 13

Problema 23: Un número entero consta de tres dígitos. El dígito de las centenas es igual a la suma de los otros dos, y el quintuplo de la cifra de las unidades es igual a la suma de las decenas y de las centenas. Hállase este número sabiendo que si se invierten los dígitos resulta disminuido en 594.

A) 639 **B)** 936 **C)** 369 **D)** 963 **E)** N.A

Problema 24 : El doble de un número sumado con el triple de otro dá como resultado 8, y el quintuple del segundo es igual al triple del primero, aumentado en 7. Dar la suma de ambos números.

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

Problema 25 : Manuel, Percy y Vanessa tienen juntos 140 soles Manuel tiene S/. 20 menos que Percy pero S/. 15 más que Vanessa. ¿Cuánto es lo que tiene Percy?

A) 45 **B)** 30 **C)** 65 **D)** 20 **E)** 35

Problema 26:Carlos tiene tres números, los suma dos a dos y obtiene 13, 17 y 24. Hallar la semisuma de los dos mayores.

A) 27 **B)** 63 **C)** 54 **D)** 45 **E)** N.A

Problema 27 : Se tiene un número de 3 cifras, la suma de ellas es 17, la de las centenas es el duplo de la que ocupa el lugar de las decenas; y si se suma 198 al número invertido. Señale el producto de multiplicar las cifras del número.

A) 140 **B)** 248 **C)** 144 **D)** 280 **E)** 288

Problema 28 : Las 3/4 partes del contenido de un barril, más 7 litros es vino y la tercera parte del contenido, menos 20 litros es agua. ¿Diga qué cantidad de litros contiene el barril de cada uno de estos líquidos?

A) Vino = 120, agua = 48
B) Vino = 124, agua = 48
C) Vino = 124, agua = 32
D) Vino = 120, agua = 48
E) Ninguna Anterior

Problema 29 : Dos números son entre sí como 1 es a 3, si a cada uno de los números se les suma "u" unidades, entonces son entre sí como 3 es a 7. ¿Cuál será la razón entre ellas si a cada uno se le suma "2u" unidades?

A) 1/2 **B)** 1/3 **C)** 2/5 **D)** 2/3 **E)** 1/5

Problema 30 : Dos números están en la relación 2/3, si se sumara 9 a cada uno de ellos, los números obtenidos estarían en la relación 3/4, hallar esos números, señalar la suma de cifras de los números?

A) 9 **B)** 18 **C)** 16 **D)** 19 **E)** 10

Clave de Respuestas

A.
1. S = {8, 12, 6}
2. S = {5, 4, 3}
3. S = {17/19, 3/19 , 46/19}
4. S = {2, 1, 5}

B.
5. S = {1, 2, 3}
6. S = {1, 2, –3}
7. S = {18, 12, 24}
8. S = {8, 10, 14}

C.
9. S = {6, 4, 5}
10. S = {8, 4, 5}
11. S = {1, 2, 2}
12. S = {3, 5, 6}

D.

13. C	14. E	15. A
16. D	17. C	18. B
19. D	20. A	21. C
22. B	23. D	24. C
25. C	26. A	27. C
28. C	29. A	30. B

Capítulo 6 MAGNITUDES PROPORCIONALES

6.1 MAGNITUDES PROPORCIONALES

- Muchos de los problemas que se presentan en Matemática, Física y Química, vinculan dos magnitudes relacionadas de tal forma que cuando una de ellas varía, como consecuencia también varía la otra, **Por ejemplo** la variación del área de un rectángulo guarda una cierta relación con respecto a las variaciones de la longitud de la base y de la altura.

La proporcionalidad entre las cantidades de estas magnitudes establece una relación funcional o ley de variación de la cantidad de una de ellas respecto a la otra, y según sea dicha ley, las magnitudes se clasifican en **directa o inversamente proporcionales.**

***Definición 1:** Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando el cociente de sus valores correspondientes es constante.*

Así, por ejemplo, si se está llenando un recipiente con un líquido, de tal manera que cada segundo el volumen del líquido aumenta 6 litros, el volumen y el tiempo serán magnitudes directamente proporcionales, como se puede apreciar en el siguiente cuadro:

Tiempo (T)	Volumen (V)	V/T
1 s	6 ℓ	6 ℓ/s
2 s	12 ℓ	6 ℓ/s
3 s	18 ℓ	6 ℓ/s

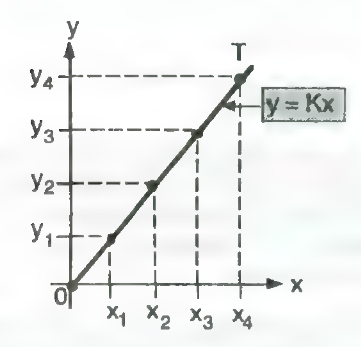
(Constante)

pues, el cociente entre el volumen (V) y el tiempo (T) es constante.

En General, si **x** e **y** son los valores correspondientes de las magnitudes A y B, y se cumple que y/x = **K,** entonces **A** y **B** son **directamente proporcionales**, donde **K** es una constante denominada **"Constante de proporcionalidad"** o **"Coeficiente de Variación".**

La dependencia de la primera cantidad respecto de la segunda se llama **"Ley de Proporcionalidad Directa"** y se representa mediante la ecuación: $y = Kx$

y gráficamente se representa por la **recta OT**.



$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \frac{y_4}{x_4} = \ldots\ldots\ldots = K$$

> ***Definición 2:** Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** cuando el **producto** de sus valores correspondientes es **constante**.*

Así, por ejemplo el tiempo empleado por un automóvil en recorrer un cierto espacio y su velocidad, son inversamente proporcionales como se puede apreciar en el siguiente cuadro:

Tiempo (T)	Velocidad (V)	V . T
1 h	100 Km/h	100 Km
2 h	50 Km/h	100 Km
4 h	25 Km/h	100 Km

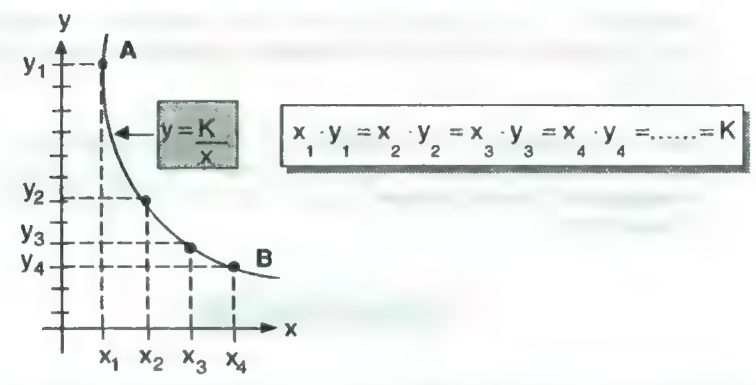
(Constante)

pues, el producto de la velocidad **(V)** y el Tiempo **(T)** es constante.

En General, si **x** e **y** son los valores correspondientes de las magnitudes **A** y **B**, y se cumple que **x . y = K,** entonces **A** y **B** son **inversamente proporcionales**, donde **K** es la **"Constante de Proporcionalidad".**

La dependencia de la primera cantidad respecto de la segunda, se llama **"Ley de Proporcionalidad Inversa"** y se representa mediante la ecuación: $y = \frac{K}{x}$

y Gráficamente se representa por la Hipérbola **Equilátera AB.**



- Los dos casos de variación que acabamos de mencionar, comprenden solamente dos magnitudes, pero también se presentan problemas en los que aparecen más de dos magnitudes. En este caso, se dice que una magnitud **"Varía Conjuntamente"** con dos o más magnitudes, si es directamente a su producto. Por ejemplo se dice que **A** varía conjuntamente con **B** y **C**; si: A = **K** B . C, donde **K** es la constante de proporcionalidad. Además, si **A** varía conjuntamente con **B** y **1/C**, de modo que A = **K** B . 1/C, entonces decimos que **A** es directamente proporcional a **B** e inversamente proporcional a **C.**

6.1.1 RECONOCIMIENTO DE LA PROPORCIONALIDAD DIRECTA O INVERSA ENTRE DOS MAGNITUDES.

- Para determinar si dos magnitudes son directa o inversamente proporcionales, se toman dos valores correspondientes de ellas, luego se duplica, triplica cuadruplica, quintuplica,.........., uno de ellos y si en virtud de la ley de dependencia de las magnitudes, el valor correspondiente queda respectivamente duplicado, triplicado, cuadriplicado, quintuplicado,............., entonces las magnitudes son **directamente proporcionales**, pero si el valor correspondiente se ha hecho respectivamente la mitad, la tercera, la cuarta, la quinta,.......... parte, las magnitudes son **inversamente proporcionales**. Si no ocurre tal cosa, las magnitudes no son ni directa ni inversamente proporcionales.

Ejemplo 1: El área **(A)** de un círculo es **directamente proporcional** al cuadrado de su radio **(r)**. El factor de proporcionalidad es el número irracional π; Así: $A = \pi r^2$.

Ejemplo 2: La longitud **(L)** de una circunferencia es **directa proporcional** a su radio **(r)**, el factor de proporcionalidad es 2π, entonces: $L = 2\pi \cdot r$.

Ejemplo 3: El número de kilogramos de una sustancia y el costo de ella, supuesto constante el valor del kilogramo, son **directamente proporcionales**, pues si 5 Kg de arroz valen 15 soles 10 Kg valdrán 30 soles

Ejemplo 4: Las longitudes de dos lados (variables) de un rectángulo con el área o superficie de 24 m^2 son **inversamente proporcionales**, puesto que: $b \times h = 24$.

Ejemplo 5: La duración de un trabajo y el número de empleados en hacerlo, suponiendo que todos los obreros trabajan con igual, intensidad, son **inversamente proporcionales**, pues si 4 obreros tardan 12 días, 8 obreros tardarán 6 días.

Problemas Resueltos

Problema 1. Se sabe que "P" es directamente proporcional a "T" e inversamente proporcional a "V", cuando P = 8; T = 2; V = 4. Hallar el valor de "P", cuando: T = 3 y V = 12.

Resolución:

- De acuerdo al enunciado: $\boxed{P = K \cdot T \cdot \frac{1}{V}}$ ...(I)

- Reemplazando: P = 8; T = 2 ; V = 4; en (I), obtenemos:

$$8 = K \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad \boxed{K = 16}$$

- De igual manera reemplazamos: T = 3 ; V = 12 y K = 16; en (I); obteniendo:

$$P = 16 \cdot 3 \cdot \frac{1}{12} \quad \Rightarrow \quad \therefore \quad \boxed{P = 4} \qquad \textbf{Rpta.}$$

Problema 2: Si: "A" es directamente proporcional a "B" e inversamente proporcional a "C^2", si cuando $C = 5$, $A = \frac{1}{5}B$, determinar "B", cuando $A = 5$ y $C = 2$.

Resolución:

- De acuerdo al enunciado: $\boxed{A = K \cdot B \cdot \frac{1}{C^2}}$ ...(I)

- Reemplazando: $C = 5$, $A = \frac{1}{5}B$, en (I); obtenemos:

$$\frac{1}{5}\cancel{B} = K \cdot \cancel{B} \cdot \frac{1}{5^2} \Rightarrow \therefore \boxed{K = 5}$$

- De igual manera reemplazamos: $A = 5$; $C = 2$ y $K = 5$, en (I), obteniendo:

$$5 = 5 \cdot B \cdot \frac{1}{2^2} \Rightarrow \therefore \boxed{B = 4}$$ **Rpta.**

Problema 3: El sueldo por un trabajo será proporcional al cuadrado de la edad del empleado, que actualmente tiene 15 años. ¿Dentro de cuántos años cuadriplicará su sueldo?

Resolución:

Sea: S = El sueldo por un trabajo.
E = Edad del empleado.

- Del enunciado: $\boxed{S = K \cdot E^2}$ ...(I)

> ***Recuerda Que:***
>
> *Cuando sólo nos mencionen la palabra **proporcional** pues esto quiere decir que es **directamente proporcional.***

- Reemplazando $E = 15$; en (I), obtenemos: $\boxed{S = K \cdot 15^2}$ ...(II)

- Dentro de "x" años se cuadriplicará su sueldo, osea:

$$\boxed{4S = K \cdot (15 + x)^2} \quad ...(III)$$

- Dividimos miembro a miembro (III) y (II):

$$\frac{4\cancel{S}}{\cancel{S}} = \frac{\cancel{K} \cdot (15+x)^2}{\cancel{K} \cdot 15^2} \Rightarrow 4 = \left(\frac{15+x}{15}\right)^2$$

$$\sqrt{4} = \frac{15+x}{15} \Rightarrow 2 = \frac{15+x}{15} \Rightarrow \therefore \boxed{x = 15}$$

Rpta. Dentro de 15 años se cuadriplicará su sueldo.

Problema 4: "A" varía directamente con la raíz cuadrada de "B" e inversamente con el cubo de "C".

Si: A = 3 cuando B = 256 y C = 2. Hallar "B" cuando A = 24 y C = 1/2.

Resolución:

- De acuerdo al enunciado: $\boxed{A = K \cdot \sqrt{B} \cdot \frac{1}{C^3}}$ ...(I)

- Reemplazando: A = 3; B = 256 y C = 2, en (I); obtenemos:

$$3 = K \cdot \sqrt{256} \cdot \frac{1}{2^3} \Rightarrow 3 = K \cdot 16 \cdot \frac{1}{8} \Rightarrow \therefore \boxed{K = \frac{3}{2}}$$

- De igual manera reemplazamos: A = 24; C = 1/2 y K = 3/2 en (I); obteniendo:

$$24 = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{B} \quad \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}$$

$$24 = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{B} \cdot 8 \Rightarrow \sqrt{B} = 2 \Rightarrow \boxed{B = 4}$$

Rpta. El valor de "B" cuando A = 24 y C = 1/2 es: 4

TALLER DE PROBLEMAS Nº 56

Problema 1 : "x" es directamente proporcional al cuadrado de "y" cuando "x" vale 4, "y" vale 2. ¿Cuánto valdrá "x" cuando "y" vale 4?

Resolución:

Rpta. $x = 16$

Problema 2 : Si "A" varía proporcionalmente al cuadrado de B y D e inversamente proporcional al cubo de C. Si: $A = 1/2$; $B = 1/3$; $C = 2$, entonces $D = 3$. Hallar el valor de "C" cuando $A = 2D$ y $B^2 = 6C$.

Resolución:

Rpta. $C = 6$

Problema 3 : "E" es directamente proporcional al producto de N x M e inversamente proporcional al cuadrado de "C". ¿Cuál será el nuevo valor de E, cuando "N" se cuadruplique, "M" se octiplique y "C" se duplique.

Resolución:

Rpta. 8E

Problema 4 : Si: "A" es proporcional a la suma de "B" y "C" y es inversamente proporcional al cuadrado de "D", si cuando $A = 2$; $B = 3$ y $D = 6$. Entonces $C = 5$; cuando $A = 9$; $B = 10$ y $D = 4$. Entonces "C" valdrá:

Resolución:

Rpta. $C = 6$

PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE MAGNITUDES PROPORCIONALES

Problema 1 : Si "x" varía directamente proporcional a "y" e inversamente proporcional al cuadrado de "z" cuando x = 10, entonces y = 4 y z = 14. Hallar "x" cuando y = 16 y z = 7.

A) 120 **B)** 140 **C)** 154 **D)** 160 **E)** 180

Problema 2 : Se sabe que: A^2 es directamente proporcional a "B", si A = 2, cuando B = 16. Hallar: "A", cuando B = 12.

A) 3 **B)** $\sqrt{3}$ **C)** 9 **D)** 27 **E)** N.A

Problema 3 : Se sabe que "A" es directamente proporcional a $\sqrt{B}$ e inversamente proporcional a C^2. Si A = 3 cuando B = 16 y C = 8. Hallar "B" cuando A = 6 y C = 4.

A) 2 **B)** 6 **C)** 4 **D)** 16 **E)** 64

Problema 4 : El valor de una tela es directamente proporcional al área e inversamente proporcional al peso. Si una tela de $2m^2$ de área con 50 g de peso, cuesta S/. 100. ¿Cuánto costará una tela de $3m^2$ de área y 100 g de peso?

A) 45 g **B)** 75 g **C)** 150 g
D) 750 g **E)** 250 g

Problema 5 : "A" varía directamente a "B" e inversamente a "C", si: A = 4/5 cuando B = 3/10 y C = 3/4. Hallar B, cuando: A = $\sqrt{32}$ y C = $\sqrt{50}$.

A) 40 **B)** 60 **C)** 20 **D)** 10 **E)** 30

Problema 6 : El precio de un pasaje varía inversamente con el número de pasajeros, si para 7 pasajeros el pasaje es S/. 3. ¿Cuántos pasajeros serán cuando el pasaje cuesta S/. $2\frac{1}{3}$.

A) 6 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 12 **E)** 18

Problema 7 : Se sabe que una magnitud "A" es inversamente proporcional a B^2. Hallar el valor de "A" sabiendo que si disminuye en 36 unidades. El valor de "B" varía en su cuarta parte.

A) 80 **B)** 60 **C)** 120 **D)** 100 **E)** 200

Problema 8 : Se tiene la siguiente tabla de valores para las magnitudes A y B.

A	36	144	324	9	4
B	6	3	2	12	18

Entonces:

A) A = K . B **B)** $A = KB^2$

C) $A = K \cdot \frac{1}{B^2}$ **D)** $A = K \cdot \frac{1}{B}$

E) N.A.

Clave de Respuestas

1. D	2. B	3. C	4. B
5. C	6. C	7. D	8. C

6.2 REGLA DE TRES

6.2.1 REGLA DE TRES: Es una operación que tiene por objeto, dados dos o más pares de cantidades proporcionales siendo una desconocida o incógnita, hallar el valor de esta última.

La regla de tres puede ser: **Simple** y **Compuesta.**

- Es **Simple** cuando intervienen dos pares de cantidades proporcionales.
- Es **Compuesta** cuando intervienen tres o más pares de cantidades proporcionales.

Regla de Tres Simple:

En la regla de tres simple intervienen tres cantidades conocidas o **datos** y una desconocida o **incógnita**. Esta regla puede ser: **Directa** o **Inversa**, según las cantidades que intervienen sean directa o inversamente proporcionales.

6.2.2 SUPUESTO Y PREGUNTA

En toda regla de tres hay dos filas de términos o números. **El supuesto** formado por los términos conocidos del problema va generalmente en la parte superior. **La pregunta** formada por los términos que contienen a la incógnita del problema va en la parte inferior.

Ejemplo: Si 8 lapiceros cuestan S/. 24. ¿Cuánto costarán 10 lapiceros?

Supuesto: 8 lapiceros ⟶ S/. 24

Pregunta: 10 lapiceros ⟶ S/. x

El supuesto está formado por 8 lapiceros y S/. 24; la pregunta por 10 lapiceros y la incógnita por S/. x.

6.2.3 MÉTODO DE RESOLUCIÓN: Todo problema que se plantea por una regla de tres puede resolverse por tres métodos:

I. Método de Reducción a la unidad.
II. Método de las proporciones y
III. Método de los signos

I. Método de Reducción a la Unidad

- **Regla de Tres Simple Directa:**

Ejemplo 1 : Si 4 sillas cuestan S/. 100. ¿Cuánto costarán 7 sillas?

Resolución:

Supuesto: 4 sillas ⟶ S/. 100

Pregunta: 7 sillas ⟶ x

Razonando: Si 4 sillas cuestan S/. 100

1 silla costará: S/. $\frac{100}{4}$ = S/. 25

Luego: 7 sillas costarán: 7 x S/. 25 = S/. 175 ***Rpta.***

Ejemplo 2: Si 12 chocolates cuestan S/. 18. ¿Cuánto costarán 4 chocolates?

Resolución:

Supuesto: 12 chocolates ⟶ S/. 18

Pregunta: 4 chocolates ⟶ x

Razonando: Si : 12 chocolates cuestan S/. 18

1 chocolate costará: S/. $\frac{18}{12}$ = S/. 1,5

Luego: 4 chocolates costarán: 4 . S/. 1,5 = S/. 6 ***Rpta.***

- **Regla de Tres Simple Inversa:**

Ejemplo 1: Si 6 obreros terminan una obra en 10 días, 12 obreros. ¿En cuántos días terminarían la misma obra?

Resolución:

Supuesto: 6 obreros ⟶ 10 días

Pregunta: 12 obreros ⟶ x

Razonando: Si : 6 obreros hacen la obra en 10 días

1 obrero lo hará en : 10 x 6 = 60 días

Luego: 12 obreros harán la obra en: 60 días/ 12 = 5 días ***Rpta.***

Ejemplo 2: Si trabajando 8 horas diarias una cuadrilla de obreros tardan 20 días para terminar una obra trabajando 5 horas diarias. ¿En cuántos días terminarían la misma obra?

Resolución:

Supuesto: 8 h/d ⟶ 20 días

Pregunta: 5 h/d ⟶ x

Razonando: Si: trabajando 8 h/d tardan 20 días

trabajando 1h/d tardarían: 20 x 8 = **160 días**

Luego: trabajando 5 h/d tardarían: $\frac{160 \text{ días}}{5} = 32$ días ***Rpta.***

II. Método de las Proporciones

- **Regla de Tres Simple Directa:**

Ejemplo 1: Si 30 pollos cuestan S/. 1 350. ¿Cuánto se pagará por 12 pollos?

Resolución:

Supuesto: Si 30 pollos ⟶ S/. 1 350

Pregunta: 12 pollos ⟶ x

Razonando: Si 30 pollos cuestan S/. 1 350 por menos pollos (12) se pagará menos soles. Estas cantidades proporcionales van de menos a menos (- a -), es decir son cantidades **Directamente proporcionales**, por consiguiente la Regla es **Directa**.

Ahora, formamos una proporción escribiendo la Razón directa de las primeras cantidades (pollos) igual a la razón directa de las segundas cantidades (soles), Así: $\frac{30}{12} = \frac{1\ 350}{x}$

Hallando el término desconocido: $x = \frac{12 \cdot 1\ 350}{30} = 540 \Rightarrow \therefore$ $\boxed{x = 540}$

Rpta: Por los 12 pollos pagará S/. 540.

- **Regla de Tres Inversa:**

Ejemplo: Si trabajando 8 horas diarias una cuadrilla de obreros demoran 15 días para terminar una obra, trabajando 5 horas diarias. ¿En cuántos días terminarían la misma obra?

Resolución:

Supuesto: 8 h/d ⟶ 15 días

Pregunta: 5 h/d ⟶ x

Razonando: Si trabajando 8h/d demoran 15 días, trabajando **menos** horas diarias (5) lo terminarían en **más** días. Vemos que estas cantidades proporcionales van de (- a +). Osea que son **inversamente proporcionales;** por consiguiente la Regla de Tres es **Inversa.**

Entonces se forma una proporción escribiendo la razón directa de las primeras cantidades (h/d) igual a la razón inversa de las segundas cantidades (días). Así: $\frac{8}{5} = \frac{x}{15}$

De donde: $x = \frac{8}{\cancel{5}} \cdot \cancel{15} = 24$

$\therefore$ $\boxed{x = 24 \text{ días}}$

Rpta: La misma obra lo terminarían en 24 días, trabajando 5h/d.

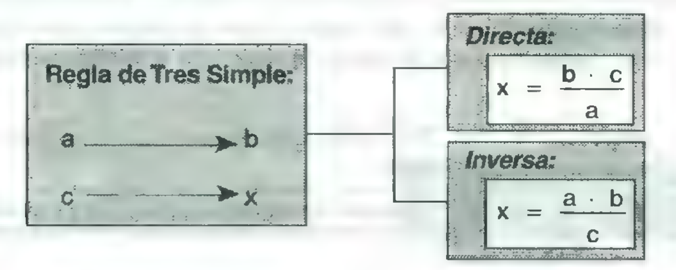
III. Método Práctico:

Regla:

1) Se examina si la Regla es Directa o Inversa. Si las cantidades proporcionales van de **más** a **más** o de **menos** a **menos,** la Regla es **Directa;** si van de **más** a **menos** o de **menos** a **más** la Regla es **Inversa.**

2) Si la Regla es **Directa:** Se multiplican los datos en aspa y se divide entre el otro dato; este cociente es el valor de la incógnita.

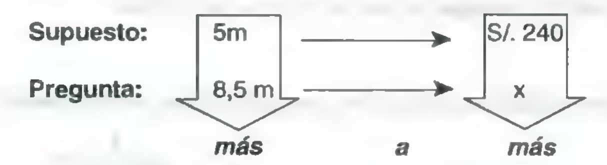
Si la Regla es **Inversa:** Se multiplican los datos del supuesto y se divide entre el otro dato de la pregunta, este cociente es el valor de la incógnita. (Ver cuadro)



- **Regla de Tres Simple Directa:**

Ejemplo: Si 5 metros de tela cuestan S/. 240. ¿Cuánto se pagará por 8,5 metros de la misma tela?

Resolución:



Razonando: Si por 5 metros se paga S/. 240 por más metros (8,5) se pagará más (+ a +); la regla es **Directa.**

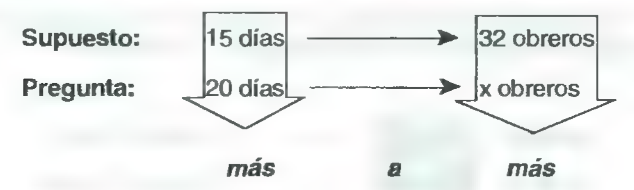
Luego: $x = \dfrac{S/.\ 240 \cdot 8{,}5\ \cancel{m}}{5\ \cancel{m}} = S/.\ 408 \Rightarrow \therefore$ $\boxed{x = S/.\ 408}$

Rpta. Por los 8,5 metros de la misma tela se pagará S/. 408

- **Regla de Tres Simple Inversa:**

Ejemplo: Si 32 obreros tardan 15 días para hacer una obra. ¿Cuántos obreros se necesitarían para hacer la misma obra en 20 días?

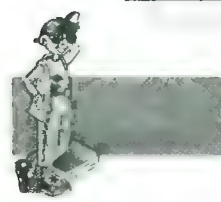
Resolución:



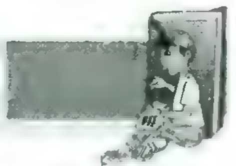
Razonando: Si en 15 días hacen la obra 32 obreros; para hacerlo en más días se necesitarán menos obreros (+ a -); la regla es inversa.

Luego: $x = \dfrac{32 \text{ obreros} \cdot 15 \text{ días}}{20 \text{ días}} = 24 \text{ obreros} \Rightarrow \therefore \ x = 24 \text{ obreros}$

Rpta. Para hacer la misma obra en 20 días se necesitarían 24 obreros.



PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE REGLA DE TRES



Problema 1 : Una obra puede ser hecha por 25 obreros en 12 días. ¿Cuántos obreros hay que añadir para que la obra se termine en 10 días?

Resolución:

Sea: x = # de obreros que hay que añadir para que la obra se termine en 10 días.

Luego:

			I
Si:	25 obreros	⟶	12 días
	(25 + x) obreros	⟶	10 días

- El número de obreros es inversamente proporcional al número de días (quiere decir a más obreros menos días), lo que se indica por la letra I encima de la columna días.

Por tanto: $\dfrac{12}{10} = \dfrac{25+x}{25} \Rightarrow 25 + x = \dfrac{12 \cdot 25}{10}$

$25 + x = 30 \Rightarrow \therefore \ x = 5 \text{ obreros}$

Rpta. El número de obreros que hay que añadir para que la obra se termine en 10 días es 5.

Problema 2: Un automóvil tarda 6 horas en recorrer un trayecto yendo a 90 km/h. ¿Cuánto tardará en recorrer el mismo trayecto yendo a 50 km/h?

Resolución:

	I		
yendo a	90 km/h	⟶	tarda 6 horas
yendo a	50 km/h	⟶	tarda "x" horas

- La duración, del trayecto es inversamente proporcional a la velocidad, lo que se indica por I colocada encima de la columna de las velocidades, por tanto:

$$\frac{90}{50}=\frac{x}{6}\ ;\ \text{De Donde: } x=\frac{90\cdot 6}{50}=10{,}8 \text{ horas}$$

$$\therefore \boxed{x = 10{,}8 \text{ horas}}$$

Esta última expresión 10,8 horas, también se puede escribir

así: 10,8 horas = 10 horas + 0,8 horas

= 10 horas + 0,8 x 60 minutos

= 10 horas + 48 minutos = 10 h . 48 min

Rpta. yendo a 50 km/h el automóvil tardaría 10 h 48 min en recorrer el mismo trayecto.

Problema 3: Un jardinero siembra un terreno cuadrado de 8 metros de lado en 5 días. ¿Cuánto tiempo se demorará en sembrar otro terreno cuadrado de 16 metros de lado?

Resolución:

Estimado alumno, quiero que para este tipo de problema tengas en cuenta que lo que se va a sembrar es la superficie del cuadrado y no su lado, veamos:

- El número de metros cuadrados (superficie) es directamente proporcional al número de días (quiere decir que cuanto a más m^2 siembre más días emplearía), lo que se indica por la letra D. Encima de la columna m^2.

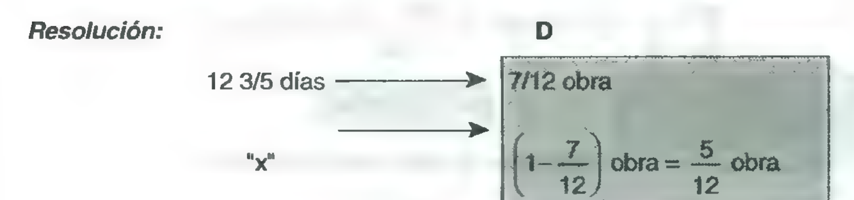
Por tanto: $$\frac{(8\text{ m})^2}{(16\text{ m})^2}=\frac{5}{x} \Rightarrow \frac{64\text{ m}^2}{256\text{ m}^2}=\frac{5}{x}$$

$$x=\frac{256\cdot 5}{64} \Rightarrow \therefore \boxed{x = 20 \text{ días}}$$

Rpta. Para sembrar el terreno cuadrado de 16 metros de lado demoraría 20 días.

Problema 4: Un hombre tarda 12 3/5 días en hacer 7/12 de una obra. ¿Cuánto tiempo necesitará para terminar la obra?

Resolución:



- La fracción de obra es directamente proporcional al número de días (quiere decir que a menos fracción de la obra, menos será el número de días que se emplearían para hacer dicha fracción de la obra), lo que se indica por la letra **D** encima de la columna obra.

Por tanto: $\dfrac{12\frac{3}{5}}{x}=\dfrac{\frac{7}{12}}{\frac{5}{12}} \Rightarrow \dfrac{63}{5x}=\dfrac{7}{5} \Rightarrow \therefore\ \boxed{x=9\ \text{días}}$

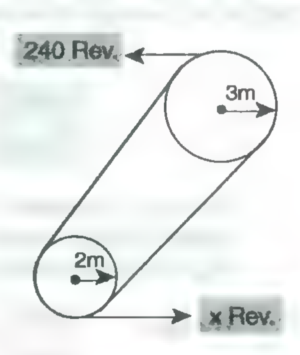
Rpta. Para terminar la obra, el hombre necesita 9 días.

Problema 5: Dos ruedas cuyos radios son 3 m y 2 m están movidas por una correa cuando la mayor da 240 revoluciones. ¿Cuántas revoluciones da la menor?

Resolución:

I

3 m	⟶	240 Rev.
2 m	⟶	x Rev.



- Los radios son inversamente proporcionales al número de revoluciones (quiere decir que a mayor radio la rueda dará menos vueltas o revoluciones), lo que se indica por una letra **I** encima de la columna metros.

Por tanto:

$\dfrac{3}{2}=\dfrac{x}{240} \Rightarrow x=\dfrac{\overset{120}{\cancel{240}}\cdot 3}{\cancel{2}} \Rightarrow \therefore\ \boxed{x=360\ \text{Rev.}}$

Rpta: La rueda menor da 360 revoluciones.

Problema 6: Un ganadero tiene 320 ovejas que puede alimentar durante 35 días. ¿Cuántos ovejas debe vender si quiere alimentar su rebaño por 5 días más dando la misma ración?

Resolución:

Sea: x = # de ovejas que debe vender.

Luego: I

Si: 320 ovejas ⟶ 35 días

(320 - x) ovejas ⟶ (35 + 5) días = 40 días

- El número de ovejas es inversamente proporcional al número de días. (quiere decir que a menos ovejas tendrán alimentos para más días), lo que se indica por la letra I encima de la columna días.

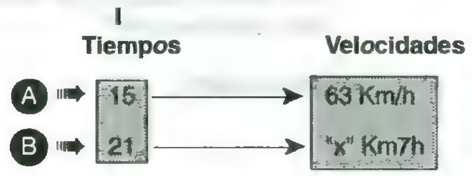
Por tanto: $\frac{35}{40}=\frac{320-x}{320} \Rightarrow 320-x=\frac{35\cdot 320}{40}$

$320-x = 280 \Rightarrow \therefore \boxed{x=40}$

> ***Rpta:*** El número de ovejas que debe vender si quiere alimentar su rebaño por 5 días más dando la misma ración es 40.

Problema 7: "A" y "B" recorren cierta distancia y los tiempos que emplean están en la razón 15/21. La velocidad de "A" es de 63 Km/h. ¿Cuál es la velocidad de "B"?

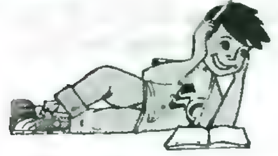
Resolución:



- El tiempo es inversamente proporcional a la velocidad. (quiere decir que a mayor velocidad menos será el tiempo empleado); lo que se indica por la letra I encima de la columna tiempos.

Por tanto: $\frac{15}{21}=\frac{x}{63} \Rightarrow x=\frac{63\cdot 15}{21} \Rightarrow \therefore \boxed{x=45\ \text{Km/h}}$

> ***Rpta:*** La velocidad de "B" es de: 45 Km/h



TALLER DE PROBLEMAS Nº 57

Problema 1 : Si 8 cuadernos cuestan S/. 40. ¿Cuánto costarán 7 cuadernos?

Resolución:

Rpta. S/. 35

Problema 2 : Un tornillo al dar 37 vueltas penetra 0,4 m.m. ¿Cuántas vueltas más dará para penetrar 3,6 m.m.

Resolución:

Rpta. 216

Problema 3 : "a" hombres tienen alimentos para "d" días si el 60% de los hombres se retiran. ¿Para cuántos días más durarán los víveres?

Resolución:

Rpta. 1,5 d.

Problema 4 : Un campesino ara un terreno cuadrado de 16 m. de lado en 16 días. ¿Qué tiempo empleará en arar otro terreno cuadrado de 4m. más de lado que el anterior?

Resolución:

Rpta. 25 días

PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE REGLA DE TRES

- Resolver los siguientes problemas; aplicando cualquiera de los métodos estudiados.

Problema 1 : Si 12 metros de cable cuestan 42 soles. ¿Cuánto costarán 16 metros?

A) 63 soles **B)** 56 soles
C) 58 soles **D)** 31,5 soles
E) 36 soles

Problema 2 : Tres hombres hacen una obra en 12 días. ¿Cuántos hombres harán la misma obra en 4 días?

A) 3 **B)** 4 **C)** 9 **D)** 12 **E)** 1

Problema 3 : 5 lapiceros cuestan S/. 35,50. ¿Cuánto costarán cuatro docenas de lapiceros?

A) S/. 320,60 **B)** S/. 380,40
C) S/. 340,80 **D)** S/. 430,80
E) S/. 480,30

Problema 4 : 9 hombres pueden hacer una obra en 5 días. ¿Cuántos hombres más harían falta para hacer la obra en un día?

A) 45 **B)** 6 **C)** 27 **D)** 32 **E)** N.A

Problema 5 : Una guarnición de 1 300 hombres tienen víveres para 4 meses. Si se quiere que los víveres duren 10 días más. ¿Cuántos hombres habrá que rebajar de la guarnición?

A) 100 **B)** 120 **C)** 150 **D)** 200 **E)** N.A

Problema 6 : Un jardinero siembra un terreno de forma rectángular de: 10 m x 15 m en 8 días. ¿Cuánto tiempo se demorará en sembrar otro terreno de: 20 m x 30 m?.

A) 23 días **B)** 32 días **C)** 28 días
D) 36 días **E)** N.A.

Problema 7 : Un hombre de 1,8 metros de altura proyecta una sombra de 1,33 metros. En el mismo momento una torre proyecta una sombra de 22,04 metros. ¿Cuál es su altura?

A) 1,68 m **B)** 1,24 m **C)** 22,04 m
D) 29,83 m **E)** 15,75 m

Problema 8 : Si "h" hombres hacen un trabajo en "d" días, entonces "h + r" hombres pueden hacer el trabajo en:

A) $d + r$ **B)** $d - r$ **C)** $\frac{d}{h+r}$

D) $\frac{hd}{h+r}$ **E)** N.A.

Problema 9 : Un hombre puede leer un libro de "p" páginas en "d" días. ¿Cuánto días se demorará en leer 5 libros de 10 páginas cada uno?

A) 50 d/p **B)** 50 p/d **C)** 2p/5d
D) 10p/2d **E)** N.A.

Problema 10 : Si un tren ha recorrido $(x^2 - 1)$ km en "a" h. ¿En cuánto tiempo recorrerá $(x + 1)$ km?

A) a horas **B)** $(x - 1)$ horas

C) a (x - 1) horas D) $\frac{a}{(x-1)}$ horas

E) N.A.

Problema 11 : Si por cada S/. 1 000 de venta un comisionista gana S/. 150. ¿Cuánto ganará si vende por un valor de S/. 12 000?

A) S/. 1 200 B) S/. 1 600
C) S/. 1 900 D) S/. 1 800 E) N.A.

Problema 12 : Una caja de 2 docenas de piñas cuestan S/. 54. ¿Cuánto se pagará por 7 cajas de 20 piñas cada una?

A) S/. 351 B) S/. 325 C) S/. 315
D) S/. 531 E) S/. 520

Problema 13 : El salario de dos obreros están en la relación de 3 a 7. si el segundo recibe 630 soles. ¿Cuánto recibirá el primero?

A) 240 soles B) 270 soles
C) 340 soles D) 420 soles E) N.A.

Problema 14 : Había comprado 15 Kg de café por 307,5 soles pero, por error me envían 6,5 Kg menos. ¿Cuánto debo pagar?

A) S/. 172,45 B) S/. 174,25
C) S/. 147,25 D) S/. 127,75 E) N.A.

Problema 15 : Las ruedas traseras y delanteras de un tractor tiene diámetros de 2,5 m y 1 m, respectivamente, cuando las delanteras han dado 225 revoluciones. ¿Cuántas revoluciones han dado las traseras?

A) 90 B) 60 C) 30 D) 120 E) N.A

Problema 16 : Si 35 hombres terminan una obra en 16 días. ¿Cuántos hombres menos se necesitarán para terminar la obra en 20 días?

A) 5 B) 7 C) 9 D) 11 E) 28

Problema 17 : Dos ruedas engranadas tiene respectivamente, 50 y 30 dientes. ¿Cuántas vueltas dará la primera rueda al mismo tiempo de dar 360 la segunda?

A) 261 B) 126 C) 612 D) 216 E) 240

Problema 18 : Quería comprar 8 docenas de pares de medias que importaban S/. 336, pero me faltó S/. 112 para el pago. ¿Cuántos pares compré con el dinero que tenía?

A) 46 B) 64 C) 58 D) 68 E) 32

Problema 19 : "m" obreros pueden hacer una obra en "a" días. ¿Cuántos obreros más serían necesarios para poder hacer dicha obra en "b" días menos?

A) $\frac{mb}{a-b}$ B) $\frac{mb}{a}$ C) $\frac{mb}{b-a}$

D) $\frac{ma}{b}$ E) N.A.

Problema 20 : Un obrero tarda en hacer un cubo compacto de concreto de 30 cm de arista 50 minutos. ¿Qué tiempo tardará en hacer 9 cubos, cada uno de 50 cm de arista?

A) $45\frac{13}{18}$h B) $43\frac{13}{18}$h C) $34\frac{13}{18}$h

D) $28\frac{13}{18}$h E) N.A.

Clave de Respuestas

1. B	2. C	3. C	4. B	5. A
6. B	7. D	8. D	9. A	10. C
11. D	12. C	13. B	14. B	15.C
16. B	17. D	18. B	19. A	20. C

6.3 REGLA DE TRES COMPUESTA

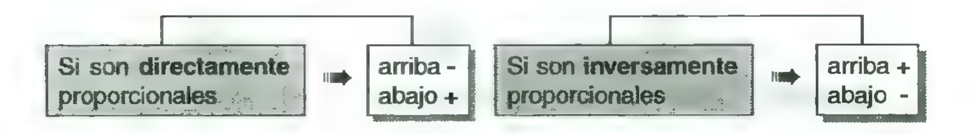
Toda Regla de Tres consta de dos partes esenciales: **El Supuesto** y **la Pregunta**. El supuesto está formado por el conjunto de valores donde todos ellos son conocidos, y la pregunta formada por el conjunto de valores donde uno de ellos se desconoce **(Incógnita)**.

	Magnitud A	Magnitud B	Magnitud C	Magnitud D
Supuesto ➡	a_1	b_1	c_1	d_1
Pregunta ➡	a_2	b_2	x	d_2

MÉTODO PRÁCTICO:

Para resolver los problemas de **Regla de Tres,** aplicamos el método llamado **"Ley de los Signos"**, que no es más que la consecuencia práctica de magnitudes proporcionales y que consiste en lo siguiente:

1. Se ordenan los datos de modo que la pregunta esté debajo del supuesto.
2. A la cantidad que está sobre la incógnita se le coloca el signo (+).
3. Se compara cada una de las magnitudes con aquella que contiene la incógnita (suponiendo que las demás no varían), con el fin de determinar si son directa o inversamente proporcionales.
4. En las magnitudes que son directamente proporcionales se coloca a la cantidad superior un signo (-) y a la inferior un signo (+), mientras que si son inversamente proporcionales, se le coloca a la cantidad superior un signo (+) y a la inferior un signo (-).

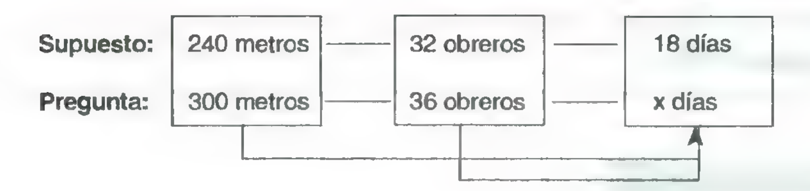


El valor de la incógnita será igual al producto de las cantidades que llevan el signo (+) dividido entre el producto de las cantidades que llevan el signo (-).

Problema 1: Para pavimentar 240 metros de pistas; 32 obreros tardan 18 días. ¿Cuántos días se necesitarán para pavimentar 300 metros de la misma pista con 4 obreros más?

Resolución:

Escribimos el supuesto y la pregunta; luego hacemos las comparaciones para saber si las Reglas de Tres simple son Directas o Inversas.

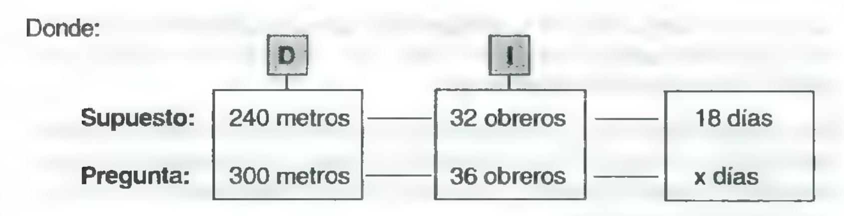


Comparación:

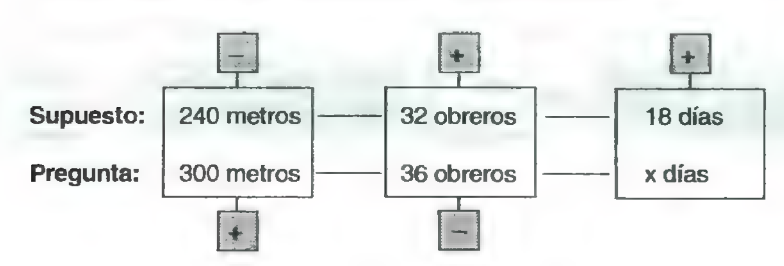
a) ***Metros con días:*** Para hacer más metros de pista tardarán más días; luego la Regla es Directa; colocando arriba de la columna de metros la letra **D**.

b) ***Obreros con Días:*** Más obreros tardarán menos días; la Regla es Inversa colocando arriba de la columna de obreros la letra **I**.

Donde:



- Luego, pasamos a colocar los signos correspondientes:



- La incógnita viene dado por un quebrado cuyo numerador es el producto de todas las cantidades de signo (+) y cuyo denominador es el producto de las cantidades afectadas por el signo (-); así:

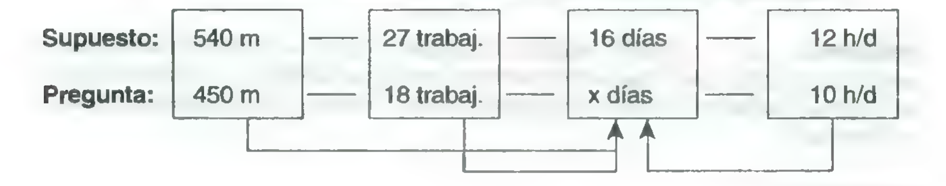
$$x = \frac{300 \text{ metros} \cdot 32 \text{ obreros} \cdot 18 \text{ días}}{240 \text{ metros} \cdot 36 \text{ obreros}} = 20 \text{ días}$$

Rpta.

Problema 2: Para hacer 540 metros de una obra 27 trabajadores emplean 16 días trabajando 12 horas diarias. Cuántos días necesitarán 18 trabajadores para hacer 450 metros de la misma obra; trabajando sólo 10 horas diarias.

Resolución:

Ordenando los datos se tiene:



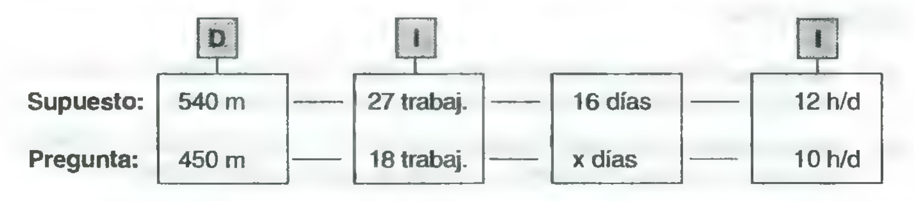
Comparaciones:

a) ***Metros con días:*** Para hacer menos metros de la obra se necesitan menos días; luego la Regla es Directa (Colocamos en la columna de metros **D**).

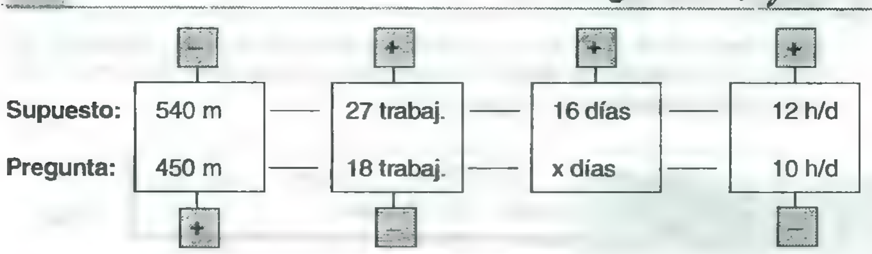
b) ***Trabajadores con días:*** A menos trabajadores tardarán más días, luego la Regla es Inversa (Colocamos en la columna de trabajadores **I**).

c) ***Horas de labor con días:*** Trabajando menos horas diarias tardarán más días; luego la Regla es Inversa (Colocamos en la columna de h/d **I**).

Donde:



- Luego, pasamos a colocar los signos correspondientes:



Ahora hallamos el valor de la incógnita:

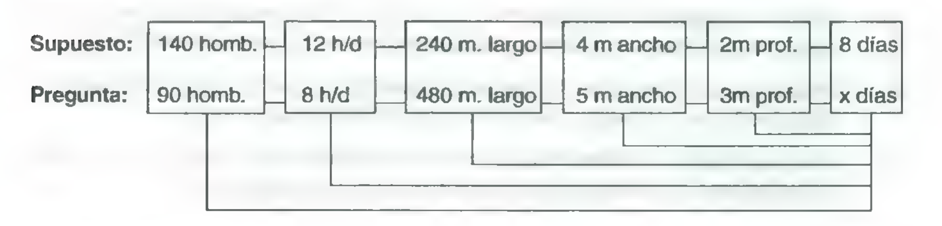
$$x = \frac{450\ \cancel{m} \cdot 27\ \cancel{trabaj.} \cdot 16\ d \cdot 12\ \cancel{h/d}}{540\ \cancel{m} \cdot 18\ \cancel{trabaj.} \cdot 10\ \cancel{h/d}} = 24\ \text{días}$$

Rpta.

Problema 3: Si 140 hombres en 8 días, trabajando 12 horas cada día puede hacer una zanja de 240 m de largo, 4m de ancho y 2m de profundidad. ¿En cuántos días, de 8 horas, harían 90 hombres una zanja de 480 m de largo; 5m de ancho y 3m de profundidad?

Resolución:

Ordenando los datos se tiene:



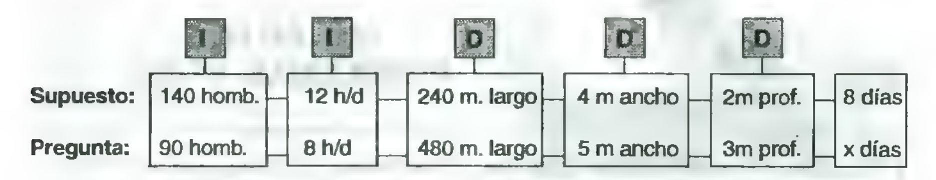
Comparaciones:

a) ***Hombres con días:*** Menos hombres tardarán más días; luego la regla es inversa (Colocamos arriba de la columna de hombres la letra I).

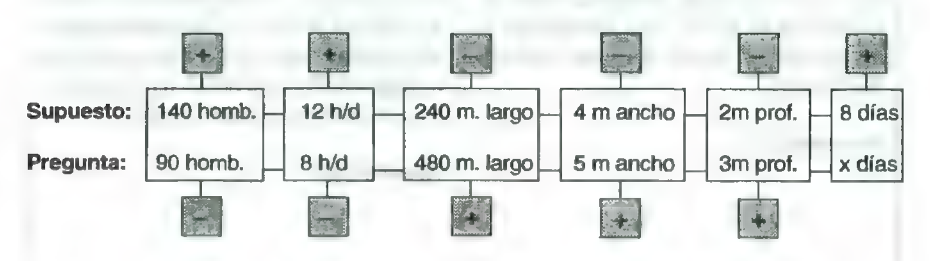
b) ***Horas de labor con días:*** Trabajando menos horas diarias tardarán más días la regla es inversa (Colocamos arriba de la columna de h/d la letra **I**).

c) ***Metros con días:*** A más metros más días; luego la regla es directa (Colocamos arriba de cada columna de metros la letra **D**).

Donde:



- Luego, pasamos a colocar los signos correspondientes:



Ahora, hallamos el valor de la incógnita:

$$x = \frac{140 \cdot 12 \cdot 480 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 8}{90 \cdot 8 \cdot 240 \cdot 4 \cdot 2} = 70 \text{ días}$$

Rpta.

TALLER DE PROBLEMAS Nº 58

Problema 1 : Se tiene un grupo de obreros que pueden hacer una obra en 20 días trabajando 9 horas diarias, pero con 7 obreros más, la misma obra se puede hacer en 12 días trabajando 8 horas diarias. Hallar el número inicial de obreros.

Resolución:

Rpta. 8

Problema 2 : Se sabe que: 1 500 hombres tienen víveres para un viaje de un mes, si se quiere que los víveres duren 4 meses dándole a cada hombre 3/4 de ración. ¿Cuántos hombres no podrán viajar?

Resolución:

Rpta. 1 000

Problema 3 : Un grupo de 24 obreros se comprometen hacer una obra en 30 días trabajando 8 horas diarias. Si al cabo de 14 días sólo han hecho los 7/25 de la obra. ¿Con cuántos obreros tendrán que reforzarse para que trabajando todos 9 horas diarias terminen la obra en el plazo fijado?

Resolución:

Rpta. 24

Problema 4 : Un grupo de alumnos resuelven 20 problemas en 40 minutos. ¿Cuánto demoran en resolver 25 problemas 20% más difíciles que los primeros?

Resolución:

Rpta. 1 hora

PROBLEMAS DE REFORZAMIENTO SOBRE REGLA DE TRES COMPUESTA

Problema 1 : Un albañil construye 400 metros de pared trabajando 6 horas por día; terminando en 24 días. ¿Cuánto tardará en construir 800 metros de pared trabajando 8 horas por día?

A) 36 días **B)** 28 días **C)** 12 días
D) 20 días **E)** N.A.

Problema 2 : Una guarnición de 500 hombres tienen víveres para 20 días a razón de 3 raciones diarias. ¿Cuántas raciones diarias tomará cada hombre, si se quiere que los víveres duren 5 días más?

A) 2 **B)** 2,5 **C)** $2\frac{2}{5}$ **D)** $2\frac{3}{5}$ **E)** 3

Problema 3 : Si 16 obreros trabajando 9 horas diarias en 12 días hacen 60 sillas. ¿Cuántos días necesitarán 40 obreros trabajando 1 hora diaria menos para hacer un ciento de las mismas sillas?

A) 6 días **B)** 8 días **C)** 10 días
D) 9 días **E)** 12 días

Problema 4 : 10 obreros trabajando en la construcción de un puente hacen 3/5 de la obra en 9 días. Si se retiran 6 hombres. ¿Cuántos días emplearan los restantes para terminar la obra?

A) 12 **B)** 14 **C)** 13 **D)** 15 **E)** 16

Problema 5 : Trabajando 10 horas diarias; 6 obreros han logrado asfaltar en 20 días 300 m de carretera. ¿Cuántos días tardará una cuadrilla de 11 obreros en asfaltar 220 m de la misma obra si trabajan diariamente 8 horas?

A) 9 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 14

Problema 6 : Una guarnición de 1 600 hombres tienen víveres, para 10 días a razón de 3 raciones diarias cada hombre. Si se refuerzan con 400 hombres. ¿Cuántos días durarán los víveres si cada hombre toma 2 raciones diarias?

A) 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 9

Problema 7 : 8 hombres cavan 3 fosas en 10 horas, si ahora fuesen el triple de hombres y trabajarán en cavar 90 fosas. ¿Cuántas horas tardarían?

A) 40 **B)** 100 **C)** 120 **D)** 90 **E)** N.A

Problema 8 : Una compañía constructora emplea 20 obreros que tardan en construir una pared de 400 m^3 en 2 días. ¿Cuánto tardarán en construir la quinta parte de la pared con 8 obreros?

A) 1 día **B)** 1 1/2 día **C)** 1/2 día
D) 20 horas **E)** N.A.

Clave de Respuestas

1. A	2. C	3. D	4. D
5. C	6. C	7. B	8. A

6.4 TANTO POR CIENTO O PORCENTAJE

Definición: Se llama **Tanto por Ciento** de un número a una o varias de las **cien partes iguales** en que se considera dividido dicho número; es decir, es uno o varios **centésimos** de un número.

El signo del tanto por ciento es **%** que representa el valor de **1/100** y el resultado que se obtiene al aplicar el tanto por ciento a un número se llama **Porcentaje.**

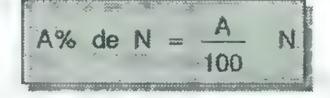
Así:

El 8% de 600 ó $\frac{8}{100}$ de 600 ; equivale a **ocho centésimas partes** de 600, es decir; que 600 se considera dividido en **cien** partes iguales y de ellas se toman **ocho.**

El $4\frac{3}{5}\%$ de 1 600 ó $\frac{4\ 3/5}{100}$ de 1 600 Significa que 1 600 se considera dividido en **cien** partes iguales y de ellas se toman **cuatro partes y tres quintos.**

El $0,6\%$ de 5 000 ó $\frac{0,6}{100}$ de 5 000 ; nos indica que 5 000 se considera dividido en **cien** partes iguales y de una de ellas sólo se toma los **seis décimos.**

En General:



$$A\% \text{ de } N = \frac{A}{100}\ N$$

OBSERVACIONES:

1. Todo número es el 100% de si mismo.
Ejemplos:

a) 16 es el 100% de 16 **b)** 180 es el 100% de 180

2. Se puede sumar o restar tantos por ciento referidos a un mismo número.
Ejemplos:

a) 25% de A + 13% de A = 38% de A

b) 48% de B - 15% de B = 33% de B

c) C + 20% de C = 120% de C

d) D - 46% de D = 54% de D

3. Para convertir un tanto por ciento a decimal se suprime el signo % y luego se divide por 100.
Ejemplos:

a) $32\% = \dfrac{32}{100} = \boxed{0,32}$ **b)** $148\% = \dfrac{148}{100} = \boxed{1,48}$

4. Para convertir un decimal a tanto por ciento, se multiplica el decimal por 100 y luego se añade el signo %.
Ejemplos:

a) 0,85 = 85 % **b)** 3,42 = 342 % **c)** 24,1 = 2 410%

5. Para convertir un tanto por ciento a fracción, se suprime el signo %, luego se divide el número por 100 y finalmetne se simplifica la fracción resultante.
Ejemplos:

a) $28\% = \dfrac{\not{28}}{\not{100}} = \boxed{\dfrac{7}{25}}$ **b)** $160\% = \dfrac{\not{160}}{\not{100}} = \boxed{\dfrac{8}{5}}$

6. Para convertir una fracción a tanto por ciento, se multiplica dicha fracción por 100 y luego se añade el signo %.
Ejemplos:

a) $\dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{5} \cdot 100\% = \boxed{20\%}$ **b)** $\dfrac{7}{2} = \dfrac{7}{2} \cdot 100\% = \boxed{350\%}$

*** Equivalencias Importantes:**

$50\% = \dfrac{50}{100} = \dfrac{1}{2}$	$25\% = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}$	$30\% = \dfrac{30}{100} = \dfrac{3}{10}$

$20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$	$75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$	$33\frac{1}{3}\% = \frac{\left(\frac{100}{3}\right)}{100} = \frac{1}{3}$
$40\% = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$	$10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$	$45\% = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$

6.4.1 ELEMENTOS QUE INTERVIENEN EN EL TANTO POR CIENTO

Son la base (**b**); el tanto (%), el porcentaje (**P**) y 100.

Ejemplo: El 25% de 40 es 10.

- 40 es la base o números (**b**) cuyo tanto por ciento se busca
- 25 es el tanto (%) o número de unidades que se toma de cada 100.
- 10 es el porcentaje (**P**) o parte de la base determinada por el tanto.
- 100 es el número que siempre interviene en estos problemas.

6.4.2 CASOS QUE SE PRESENTAN EN EL TANTO POR CIENTO

Todos los problemas sobre tanto por ciento se pueden clasificar dentro de los tres casos siguientes:

I. ***Hallar el porcentaje de un número:***

1. Hallar el 45% de 420.

Planteo: Si: de 100 es 45.

de 420 será x. ➡ $x = \frac{420 \cdot 45}{100} = 189$

• ***Esta Regla de Tres es siempre Directa.***

∴ El 45% de 420 es 189 ***Rpta.***

2. Hallar el 23% de 2 000

Planteo: Si: de 100 es 23

de 2 000 será x ➡ $x = \frac{2\ 000 \cdot 23}{100} = 460$

• ***Esta Regla de Tres es simpre Directa***

∴ El 23% de 2 000 es 460 ***Rpta.***

Regla Práctica:

1. Hallar el 45% de 420

$$\frac{45}{100} \cdot 420 = \frac{18\ 900}{100} = \boxed{189}$$

2. Hallar el 23% de 2 000

$$\frac{23}{100} \cdot 2\ 000 = \frac{46\ 000}{100} = \boxed{460}$$

> ***Recuerda Que:***
>
> *Las palabras **"de"** **"del"** o **"de los"** matemáticamente significan multiplicación y la palabra **"es"** significa igualdad.*

3. Hallar el 10% del 15% de 4 000

$$\frac{10}{100} \cdot \frac{15}{100} \cdot 4\ 000 = \boxed{60}$$

II. Hallar la Base o Número:

1.- ¿De qué cantidad es S/. 280 el 25%?

Planteo: Si el 25% de un número es 280; el 100% osea el número buscado será x.

Si: El 25% es S/. 280

El 100% será x ➡ $x = \frac{S/.\ 280 \cdot 100\%}{25\%} = S/.\ 1\ 120$

∴ S/. 280 es el 25% de S/. 1 120 ***Rpta.***

2.- ¿Cuál es el importe de una factura cuyo descuento o rebaja del 20% es de S/. 520?

Planteo: El 20% del importe de la factura es S/. 520; luego El 100% osea el valor de la factura será x.

Si: El 20% es S/. 520

El 100% será x ➡ $x = \frac{S/.\ 520 \cdot 100\%}{20\%} = S/.\ 2\ 600$

∴ S/. 520 es el 20% de S/. 2 600 ***Rpta.***

- ***El Ejercicio:*** ¿De qué cantidad es S/. 420 el 35%?; también se puede enunciar de la manera siguiente: S/. 420 es el 35% de qué cantidad; que se resuelve así:

$$\text{S/. } 420 = \frac{35}{100} \cdot C \Rightarrow \frac{\text{S/. } 420 \cdot 100}{35} = C \Rightarrow \therefore \boxed{1\,200 = C}$$

III. Hallar el Tanto por Ciento:

1. ¿Qué % de 1 200 es 60?

Planteo: Si: 1 200 es 100%

60 será x% ➡ $x = \frac{60 \cdot 100\%}{1\,200} = 5\%$

∴ 60 es el 5% de 1 200 ***Rpta.***

2. En el aula de Nataly rindieron examen 65 alumnos de los cuáles 15 fueron desaprobados. Hallar el % de alumnos aprobados.

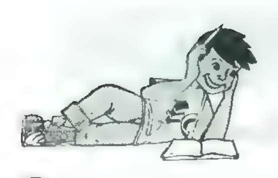
Resolución:

- Fueron aprobados : 65 - 15 = 50 alumnos
- Ahora hallamos que % de los 65 examinados es 50 aprobados.

Planteo: Si: 65 es 100%

50 será x % ➡ $x = \frac{50 \cdot 100\%}{65} = 77\%$ aprobados

∴ De los 65 alumnos que rindieron examen de Matemática el 77% resultaron aprobados. ***Rpta.***



TALLER DE EJERCICIOS Nº 59

1. Hallar los siguientes porcentajes:

a) 36% de 225	**h)** 3% del 6% de 320 000
b) 52% de 650	**i)** 2% del 15% de 16 000
c) 25% de 160	**j)** 8% del 3% del 2% de 400 000
d) 0,75% de 1 200	**k)** 0,4% del 20% de los 4/5% de 25 000
e) 0,40% de 80	**l)** 2/3% de 3/5% del 6% del 0,2% de 340 000
f) 3/5% de 750	**m)** 0,02% del 60% de los 2/5% de 360 000
g) 5/6% de 72 000	**n)** 0,1% del 70% de los 3/4% de 120 000

(2.) ¿De qué número es:

a) 72 el 6%	e) 185 el 20%	i) 22,5 el 1/4%
b) 36 el 25%	f) 66 el 2 3/4%	j) 148 el 3,7%
c) 120 el 4%	g) 153 el 4 1/4%	k) 540 el 13,5%
d) 6,4 el 10%	h) 6,5 el 2,5%	l) 150 el 2,4%

(3.) ¿Qué % de:

a) 60 es 9	e) 125 es 2,5	i) 0,015 es 0,003
b) 240 es 12	f) 750 es 120	j) 3/5 es 6/40
c) 175 es 35	g) 250 es 96	k) 1 873 es 37,46
d) 250 es 24	h) 125 es 80	l) 370 es 1,48

RESPUESTAS TALLER 59

(1.)	a) 81	b) 338	c) 40	d) 9	e) 0,32
	f) 4,5	g) 600	h) 576	i) 48	j) 19,2
	k) 0,16	l) 0,001 632	m) 0,1728	n) 0,63	
(2.)	a) 1 200	b) 144	c) 3 000	d) 64	e) 925
	f) 2 400	g) 3 600	h) 260	i) 9 000	j) 4 000
	k) 4 000	l) 6 250			
(3.)	a) 15%	b) 5%	c) 20%	d) 9,6%	e) 2%
	f) 16%	g) 38,4%	h) 64%	i) 20%	j) 25%
	k) 2%	l) 0,4%			

TALLER DE EJERCICIOS Nº 60

1. Escriba cada enunciado como una proporción:

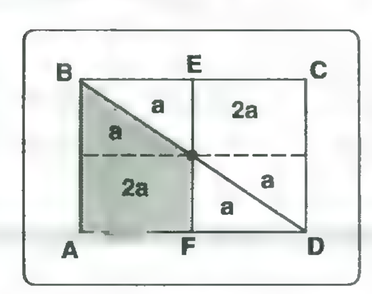
a) 6 es el 20% de 30 ➠	*Rpta.:* 6/30 = 20/100
b) 40% de 20 es 8 ➠	*Rpta.:* 8/20 = 40/100
c) 28 es el 35% de 80	h) 8% de 200 es 16
d) 217 es el 62% de 350	i) 15% de 600 es 90
e) 8 es el 40% de 20	j) 25% de 30 es 7,5
f) 3/5 es el 20% de 3	k) 30% de 20 es 6
g) 25% de 800 es 200	l) 33% de 3 000 es 990

2. En la figura mostrada: ABCD; es un rectángulo; "E" y "F" son puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ respectivamente:

a) ¿Qué porcentaje del área total está sombreado?

b) ¿Qué porcentaje del área total no está sombreado?

Resolución:



- Area ▭ ABCD = 8a
- Area sombreada = 3a

Luego:

a) ¿Qué porcentaje del área total está sombreado?

$$\text{Porcentaje Sombreado} = \frac{\text{Area Sombreado}}{\text{Area total}} \times 100\%$$

$$\therefore \quad \text{Porcentaje Sombreado} = \frac{3\cancel{a}}{8\cancel{a}} \times 100\% = 37,5\%$$

b) ¿Qué porcentaje del área total no está sombreado?

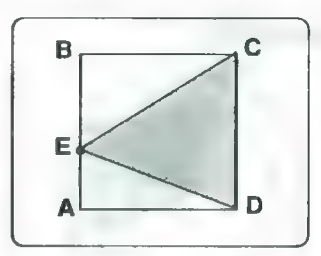
$$\text{Porcentaje No Sombreado} = \frac{\text{Area No Sombreado}}{\text{Area Total}} \times 100\%$$

$$\therefore \boxed{\text{Porcentaje No Sombreado} = \frac{5a}{8a} \times 100\% = 62,5\%}$$

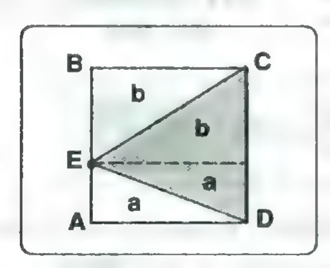
3. En la figura mostrada; ABCD es un cuadrado.

a) ¿Qué porcentaje del área total está sombreado?

b) ¿Qué porcentaje del área total no está sombreado?



Resolución:



- Area del cuadrado ABCD = 2 (a + b)
- Area sombreada = (a + b)

Luego:

a) ¿Qué porcentaje del área total está sombreado?

$$\text{Porcentaje Sombreado} = \frac{\text{Area Sombreado}}{\text{Area total}} \times 100\%$$

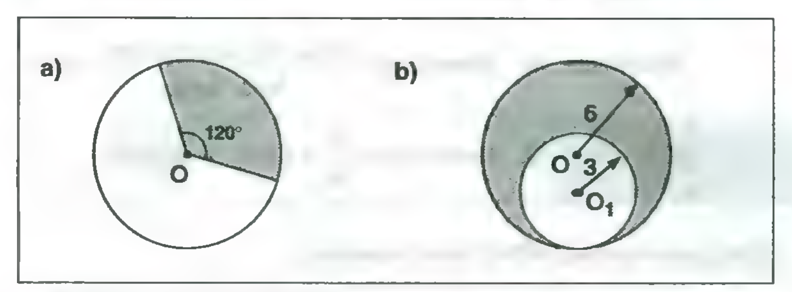
$$\therefore \boxed{\text{Porcentaje Sombreado} = \frac{(a+b)}{2(a+b)} \times 100\% = 50\%}$$

b) ¿Qué porcentaje del área total no está sombreado?

$$\text{Porcentaje No Sombreado} = \frac{\text{Area No Sombreado}}{\text{Area Total}} \times 100\%$$

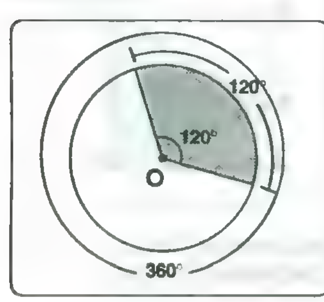
$$\therefore \boxed{\text{Porcentaje No Sombreado} = \frac{(a+b)}{2(a+b)} \times 100\% = 50\%}$$

Estime que tanto por ciento de cada región circular está sombreada.



Resolución:

a)



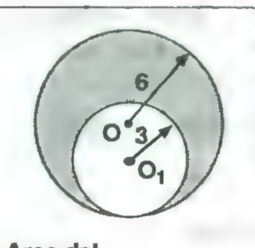
- Región circular abarca un arco de 360°
- Región sombreada abarca un arco de 120°

Luego:

$$\text{Porcentaje Sombreado} = \frac{\text{Area Sombreado}}{\text{Area total}} \times 100\%$$

$$\therefore \quad \text{Porcentaje Sombreado} = \frac{120°}{360°} \times 100\% = \boxed{33\frac{1}{3}\%}$$

b)



- Area del Círculo $= \pi \cdot (\text{radio})^2$

- Región Circular = Area del Círculo mayor

Región circular $= \pi \cdot 6^2 = \boxed{36\pi}$

- Región no sombreada = Area del círculo menor

Región no sombreada $= \pi \cdot 3^2 = \boxed{9\pi}$

Luego:

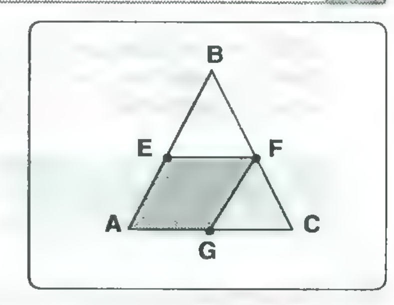
Región sombreada = Región circular - Región no sombreada

Región sombreada $= 36\pi - 9\pi = \boxed{27\pi}$

$$\text{Porcentaje Sombreado} = \frac{\text{Región Sombreada}}{\text{Región Circular}} \times 100\%$$

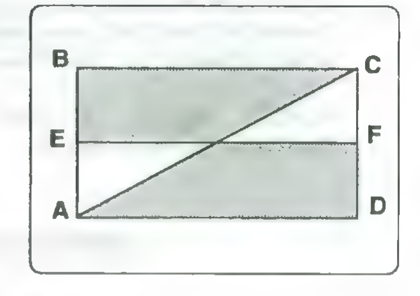
$$\therefore \quad \text{Porcentaje Sombreada} = \frac{27\pi}{36\pi} \times 100\% = \boxed{75\%}$$

5. En la figura mostrada: ABC es un triángulo equilátero; donde: "E"; "F" y "G" son puntos medios. Calcular qué porcentaje del área total representa el área de la región sombreada.



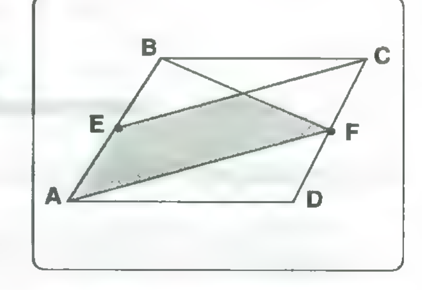
A) 80% B) 50% C) 60%
D) 75% E) N.A.

6. En la figura mostrada: ABCD es un rectángulo; "E" y "F" son puntos medios. Calcular qué porcentaje del área total representa las áreas de las regiones sombreadas.



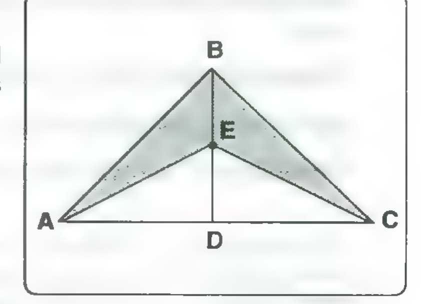
A) 60% B) 80% C) 50%
D) 75% E) 85%

7. En la figura mostrada: ABCD es un paralelogramo; "E" y "F" son puntos medios. Calcular qué porcentaje del área total representa el área de la parte achurada.



A) 40% B) 50% C) 37,5%
D) 42,5% E) N.A

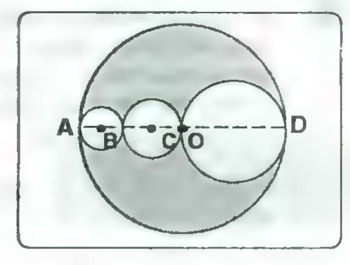
8. En la figura mostrada: ABC, es un triángulo; siendo "E" punto medio de BD. Calcular qué porcentaje del área total representa las áreas de las partes "achuradas".



A) 60% B) 80% C) 50%
D) 45,5% E) 52%

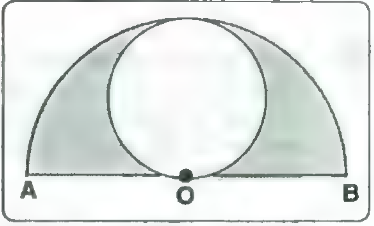
9. En la figura mostrada: "O" es el centro del círculo mayor; además: $\overline{BC} = 2\overline{AB}$

y $2\overline{CD} = 3\,\overline{BC}$. Calcular qué porcentaje del área total representa las áreas de las partes "achuradas".



A) 61% B) 62% C) 63%
D) 50% E) N.A.

10. De la figura mostrada: "O" es el centro del semicírculo. Calcular que porcentaje del área total, representa las áreas de las partes "achuradas".



A) 40% B) 50% C) 60%
D) 62,5% E) Faltan datos

RESPUESTAS TALLER 60

5. B	7. C	9. A
6. D	8. C	10. B

6.4.3 PROBLEMAS SOBRE PROBLEMAS DE COMPRA Y VENTA

El tanto por ciento tiene mucha aplicación en los problemas sobre precios de compra o de venta que se presentan en la vida diaria.

Precio de Compra (Pc): Es el valor en que se adquiere o compra una mercadería.

Precio de Venta (Pv): Es el valor en que se vende una mercadería.

Ganancia (g) ó Beneficio: Es la diferencia entre el Pv - Pc.

Pérdida (p). Es la diferencia entre el Pc - Pv.

Las ganancias o pérdidas se expresan generalmente en un tanto por ciento sobre el Pc, salvo indicación expresa.

Así, decir que al vender una mercadería se ha ganado el 25% significa que:

Por cada	S/. 100 precio de compra	(Pc)
hay	S/. 25 de ganancia	(g)
Luego:	S/. 125 precio de venta	(Pv)

De igual manera, si decimos que al vender un artículo se ha perdido el 18% de este dato se descompone en otros tres que son:

Por cada	S/. 100	precio de comprar	(Pc)
hay	S/. 18	de ganancia	(p)
Luego:	S/. 82	precio de venta	(Pv)

Los problemas sobre precios de compra o de venta se resuelven aplicando una Regla de Tres Simple Directa.

El supuesto de la Regla de Tres se forma con los datos que comprende el % de ganancia o de pérdida.

Se presentan 3 casos:

I. Hallar el **Pc**; conociendo el % de ganancia o pérdida.

II. Hallar el **Pv**; conociendo el % de ganancia o pérdida.

III. Hallar el **%**; de ganancia o pérdida, conociendo el **Pc** y **Pv**.

(1.) Hallar el precio de compra conociendo el % de ganancia o pérdida.

Problema 1: Una casa comercial vende una refrigeradora por 450 dólares ganando el 20%. Hallar el precio de compra y la ganancia.

Resolución:

El 20% de ganancia significa que:

(Supuesto)

Pc = $ 100 +
g = $ 20
Pv = $ 120

Ahora, planteamos la Regla de Tres Directa.

Si: $ 120 Pv. corresponde a $ 100 Pc.
$ 450 Pv. corresponde a "x" Pc.

Donde: $x = \frac{\$.100\ Pc \cdot \$.450\ Pv.}{\$.120\ Pv} = \$.375\ Pc$

Luego: g = Pv - Pc ⇒ g = $ 450 - $ 375 ⇒ **g = $ 75**

∴ El precio de compra es de $ 375 y la ganancia es de: $ 75 ***Rpta.***

Problema 2: Karina vende uno de sus pantalones por S/. 130; perdiendo el 35%. Hallar el precio de compra y la pérdida.

Resolución:

El 35% de pérdida significa que:

(Supuesto)

Pc = S/. 100 -
p = S/. 35
Pv = S/. 65

Ahora; planteamos la Regla de Tres Directa.

Si: S/. 65 Pv. corresponde a S/. 100 Pc.
S/. 130 Pv. corresponde a "x" Pc.

Donde: $x = \frac{S/.130\ Pv \cdot S/.100\ Pc.}{S/.65\ Pv} = S/.200\ Pc$

Luego: Pérdida = Pc - Pv ⇒ Pérdida = S/. 200 - S/. 130

Pérdida = S/. 70

∴ El precio de compra del pantalón es de: S/. 200 y la pérdida es de S/. 70. ***Rpta.***

II. Hallar el precio de venta conociendo el % de ganancia o pérdida.

Problema 1: Nataly ha ganado S/. 12 500 al vender un terreno con el 16% de ganancia. Hallar el precio de venta.

Resolución:

El 16% de ganancia significa que:

(Supuesto)

$$\begin{aligned} \textbf{Pc} &= S/.\ 100 \quad + \\ \textbf{p} &= S/.\ 16 \\ \hline \textbf{Pv} &= S/.\ 116 \end{aligned}$$

Ahora, planteamos la Regla de Tres Directa

Si: S/. 16 g. corresponde a S/. 116 Pv.

S/. 12 500 g. corresponde a S/. "x" Pv

Donde:

$$x = \frac{S/.12\ 500\ g \cdot S/.116\ Pv.}{S/.16\ g} = S/.90\ 625\ Pv$$

∴ El precio de venta del terreno es de S/. 90 625 ***Rpta.***

Problema 2: Perdiendo S/. 390 se ha vendido una computadora con el 26% de pérdida. Hallar el precio de venta y el precio de compra.

Resolución:

El 26% de pérdida significa que:

(Supuesto)

$$\begin{aligned} \textbf{Pc} &= S/.\ 100 \quad - \\ \textbf{p} &= S/.\ 26 \\ \hline \textbf{Pv} &= S/.\ 74 \end{aligned}$$

Ahora, planteamos la Regla de Tres Directa.

Si: S/. 26 p. corresponde a S/. 74 Pv.

S/. 390 p. corresponde a S/. x Pv.

Donde:

$$x = \frac{S/.390\ p \cdot S/.74\ Pv.}{S/.26\ p} = S/.1\ 110\ Pv$$

Luego: Pc = Pv + p ⇒ Pc = S/. 1 110 - S/. 390

Pc = S/. 720

∴ El precio de venta de la computadora es de: S/. 1 110 y el precio de compra es de S/. 720. ***Rpta.***

Nataly el % de Ganancia o Pérdida conociendo el precio de compra y precio de venta.

En este caso, de los datos deducimos las ganancia o la pérdida y lego se plantea la Regla de Tres Directa; buscando que % del precio de compra es la Ganancia o la Pérdida.

Problema 1: Manuel compra un automóvil por 10 200 dólares y lo vende por 12 000 dólares. Hallar el % de ganancia.

Resolución:

Sabemos que: La ganancia = Pv - Pc

Ganancia = 12 000 dólares - 10 200 dólares = 1 800 dólares.

Ahora buscamos que % de 10 200 dólares es 1 800 dólares.

- **Por Regla de Tres Directa:**

Si: 10 200 dólares es el 100%

1 800 dólares será el x%

$$x = \frac{100\% \cdot \$1\ 800}{\$10\ 200} = 17{,}64\%$$

∴ La Ganancia representa el 17,64% ***Rpta.***

Problema 2: Compré un televisor por S/. 780 y lo vendi por S/. 500. Hallar el % de pérdida.

Resolución:

Sabemos que: La Pérdida = Pc - Pv

Pérdida = S/. 780 - S/. 500 = S/. 280

Ahora, buscamos que % de S/. 780 es S/. 280

- **Por Regla de Tres Directa**

Si: S/. 780 es el 100%

S/. 280 será el x%

$$x = \frac{S/.280 \cdot 100\%}{S/.780} = 35{,}89\%$$

∴ La pérdida representa el 35,89% ***Rpta.***

TALLER DE EJERCICIOS Nº 61

Problema 1: Se vende un televisor por S/. 956 ganando el 25%. Hallar el precio de compra y la ganancia.

A) S/. 764,8 y S/. 112,9 **B)** S/. 746,8 y S/. 192,1 **C)** S/. 764,8 y S/. 191,2
D) S/. 746,8 y S/. 119,2 **E)** N.A.

Problema 2: Se ha vendido un carro por S/. 6 500 perdiendo el 60%. Hallar el precio de compra y la pérdida.

A) S/. 15 620 y S/. 7 950 **B)** S/. 16 250 y S/. 7 950 **C)** S/. 12 650 y S/. 9 750
D) S/. 16 520 y S/. 5 950 **E)** S/. 16 250 y S/. 9750

Problema 3: Se ha vendido una cocina a gas por S/. 560 ganando el 30%. Hallar el precio de compra.

A) S/. 430,67 **B)** S/. 430,76 **C)** S/. 340,76 **D)** S/. 403,67 **E)** N.A.

Problema 4: Un carnicero ha ganado S/. 24 al vender una pierna de chancho con el 12% de ganancia. Hallar el precio de venta.

A) S/. 288 **B)** S/. 124 **C)** S/. 214 **D)** S/. 224 **E)** N.A.

Problema 5: Sara compra una radio grabadora por S/. 470 y luego lo vende por S/. 510. Hallar el % de ganancia.

A) 5,81% **B)** 8,51% **C)** 8,15% **D)** 8,72% **E)** 19%

Problema 6: Una librería compra un lote de libros del Autor: Manuel Coveñas a S/. 15 por unidad y los vende al público por S/. 24 por unidad. Hallar el % de ganancia por libro.

A) 70% **B)** 40% **C)** 60% **D)** 80% **E)** 50%

Problema 7: Se ha vendido, una camioneta por S/. 38 250 ganando el $12\frac{1}{2}\%$. Hallar el precio de compra.

A) S/. 40 300 **B)** S/. 34 000 **C)** S/. 43 000 **D)** S/. 54 000 **E)** N.A.

Problema 8: Vanessa vendió su colección de libros por S/. 825 perdiendo 5 1/3%. Hallar el precio de compra.

A) S/. 925 B) S/. 675 C) S/. 625 D) S/. 900 E) N.A.

***Problema* (9):** Se ha vendido un televisor por S/. 840; pérdiendo el 6 $\frac{2}{3}$%. Hallar el precio de compra.

A) S/. 940 B) S/. 900 C) S/. 1 020 D) S/. S/. 890 E) N.A.

***Problema* (10) :** Karina compró una refrigeradora por S/. 948 y lo vendió luego por S/. 711. Hallar el % de pérdida.

A) 22% B) 35% C) 30% D) 25% E) 28%

***Problema* (11) :** Un comerciante compra una **"Combi"** en S/. 18 600 y lo vende por S/. 25 296. Hallar el % de ganancia.

A) 42% B) 38% C) 36% D) 45% E) N.A.

***Problema* (12) :** Nataly perdió S/. 10 080 al vender su casa con el 12 1/2% de pérdida. Hallar el precio de compra.

A) S/. 34 320 B) S/. 30 420 C) S/. 40 230 D) S/. 40 320 E) N.A.

***Problema* (13) :** Un comerciante ganó S/. 5 420 al vender su mercadería con el 16 2/3% de ganancia. Hallar el precio de venta.

A) S/. 6 054 B) S/. 6 504 C) S/. 6 405 D) S/. 5 604 E) N.A.

***Problema* (14) :** Luis compra un juego de **"Atari"** por S/. 210 y lo vende por S/. 157,50. ¿Qué % se ha pérdido?

A) 30% B) 35% C) 42% D) 25% E) 52%

***Problema* (15) :** Una señora ha vendido su **"congeladora"** por S/. 535,15 perdiendo el 30%. Hallar el precio de compra.

A) S/. 764,50 B) S/. 746,50 C) S/. 674,50 D) S/. 765,40 E) N.A.

RESPUESTAS TALLER 61

1. C	**4.** D	**7.** B	**10.** D	**13.** B
2. E	**5.** B	**8.** D	**11.** C	**14.** D
3. B	**6.** C	**9.** B	**12.** D	**15.** A

6.4.4 REGLA DE INTERÉS SIMPLE

La Regla de Interés Simple es una operación que tiene por objeto calcular el interés o rédito que produce un capital prestado a un % y durante un tiempo determinado.

Ejemplo: Se ha prestado un capìtal de S/. 4 000 al 8% anual, durante 2 años. Esto significa que por cada S/. 100 de capital se gana S/. 8 de interés al año por S/. 1 000 se ganará S/. 80 y por S/. 4 000 se ganará S/. 320 de interés al año, luego en 2 años se ganará: 2 x S/. 320 = S/. 640 de interés.

6.4.5 ELEMENTOS QUE INTERVIENEN EN LA REGLA DE INTERÉS SIMPLE

Son: **Capital, %, Tiempo e Interés o Rédio (C; %; t; I)**

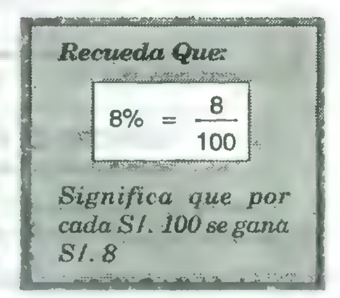
Asi en el ejemplo anterior los elementos son:

S/. 4 000 **Capital** o dinero prestado

8% **Tanto por Ciento** que gana por cada S/. 100 de capital.

2 años **Tiempo** (años, meses, días) que dura el préstamo.

S/. 640 **Interés**, rédito o ganancia.



Generalmente el % de interés es anual, pero puede pactarse mensual o semestralmente. En estos casos para aplicar las fórmulas se convierte primero a % anual multiplicando por 12 o por 2 respectivamente.

Interés Simple:

Es cuando el interés o rédito se percibe al final de períodos iguales de tiempo permaneciendo invariable el capital.

6.4.6 FÓRMULA PARA CALCULAR EL INTERÉS SIMPLE

Para obtener la fórmula para calcular el interés **"I"** producido por un capital **C**, prestado a un **%** anual en **t** años, aplicamos una Regla de Tres Compuesta con dichos elementos del problema:

Si: S/. 100 en 1 año gana **%** de interés
S/. **C** en **t** años ganará **I** de interés

Las dos Reglas de Tres Simple son Directas, luego:

El interés es igual al producto del capital por % por tiempo, dividido entre 100.

$$I = \frac{C \times \% \times t}{100}$$

➡ Esta fórmula sirve para calcular el interés cuando el tiempo se da en años.

• Cuando el Tiempo se da en Meses	• Cuando el Tiempo se da en Días
El denominador es 100 x 12 = 1 200 pues el año tiene 12 meses. $I = \frac{C \times \% \times t}{1\,200}$	El denominador es 100 x 360 = 36 000 pues el año comercial tiene 360 días. $I = \frac{C \times \% \times t}{36\,000}$

CUADRO DE FÓRMULAS DEL INTÉRES SIMPLE

Los otros elementos como el **capital, % y tiempo**, se calculan también resolviendo una Regla de Tres Compuesta.

Asi se obtienen las siguientes fórmulas:

AÑOS	MESES	DÍAS
$I = \frac{C \times \% \times t}{100}$	$I = \frac{C \times \% \times t}{1\,200}$	$I = \frac{C \times \% \times t}{36\,000}$
$C = \frac{100 \times I}{\% \times t}$	$C = \frac{1\,200 \times I}{\% \times t}$	$C = \frac{36\,000 \times I}{\% \times t}$
$\% = \frac{100 \times I}{C \times t}$	$\% = \frac{1\,200 \times I}{C \times t}$	$\% = \frac{36\,000 \times I}{C \times t}$
$t = \frac{100 \times I}{C \times \%}$	$t = \frac{1\,200 \times I}{C \times \%}$	$t = \frac{36\,000 \times I}{C \times \%}$

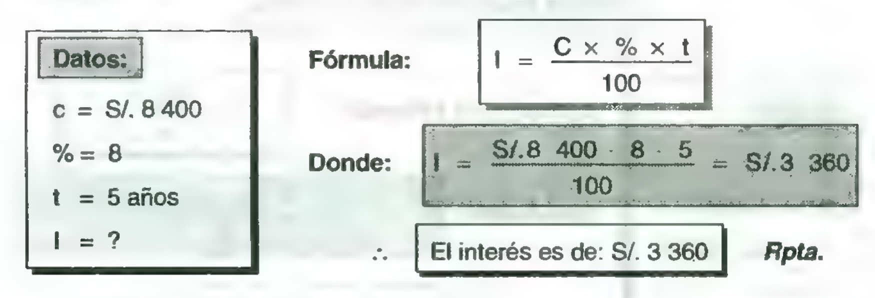
Problemas Resueltos

Calcular el Interés:

Problema 1: Hallar el interés que produce un capital de S/. 8 400 prestado al 8% anual, durante 5 años.

Resolución:

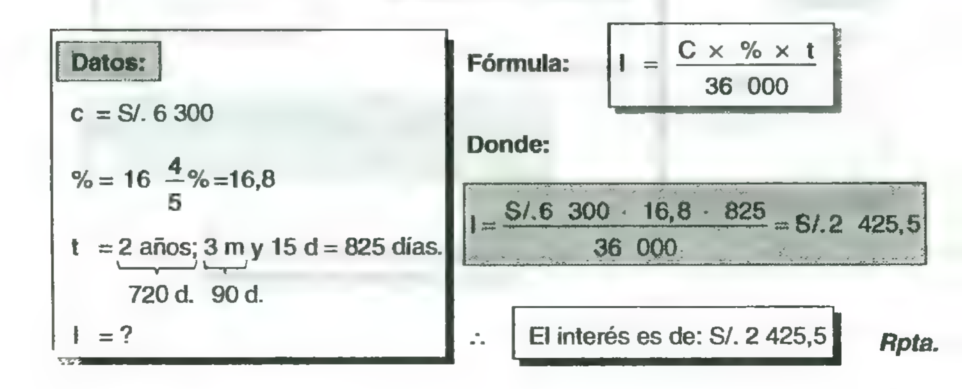
Reemplazamos los datos en la fórmula para calcular el interés en **años.**



Problema 2: Hallar el interés producido por S/. 6 300 colocado al $16\frac{4}{5}\%$ durante 2 años; 3 meses y 15 días.

Resolución:

Reemplazamos en la fórmula para calcular el interés cuando el tiempo está dado en **días.**

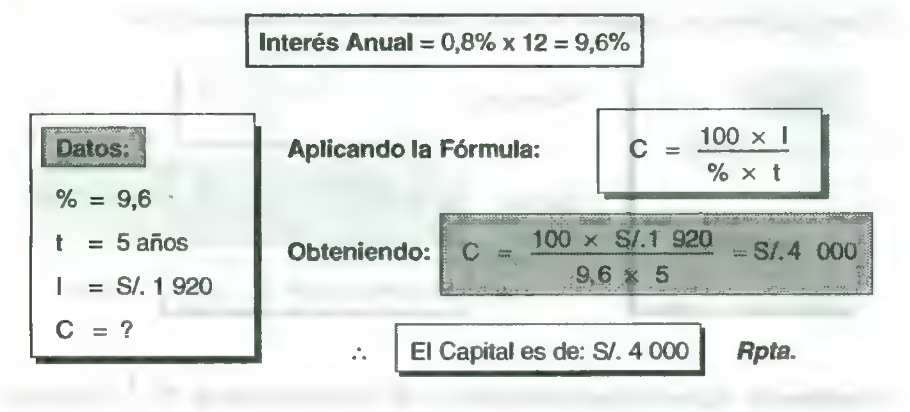


Calcular el Capital:

Problema 3: Hallar el capital que prestado al 0,8% mensual durante 5 años ha producido un interés de S/. 1 920.

Resolución:

Convertimos el % mensual en anual. Como el año tiene 12 meses, multiplicamos 12 por el interés mensual que es 0,8%; obteniendo:



Interés Anual = 0,8% x 12 = 9,6%

Datos:

% = 9,6

t = 5 años

I = S/. 1 920

C = ?

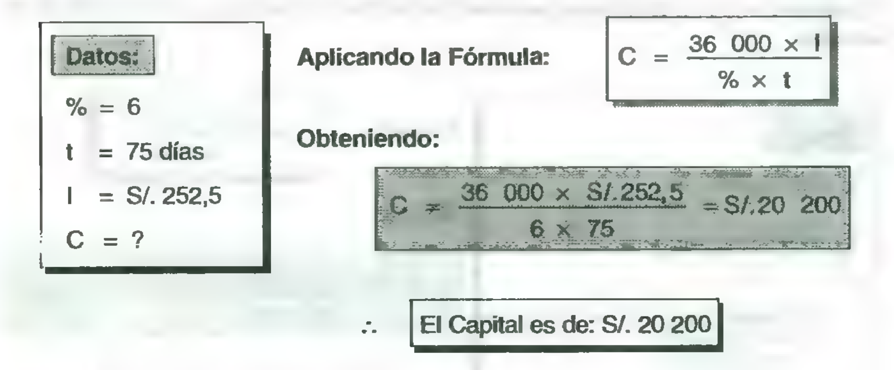
Aplicando la Fórmula: $C = \dfrac{100 \times I}{\% \times t}$

Obteniendo: $C = \dfrac{100 \times S/.1\ 920}{9,6 \times 5} = S/.4\ 000$

∴ El Capital es de: S/. 4 000 ***Rpta.***

Problema 4: ¿Cuál es el capital que colocado al 6% durante 75 días ha producido 252,5 soles de interés?

Resolución:



Datos:

% = 6

t = 75 días

I = S/. 252,5

C = ?

Aplicando la Fórmula: $C = \dfrac{36\ 000 \times I}{\% \times t}$

Obteniendo:

$$C = \dfrac{36\ 000 \times S/.252,5}{6 \times 75} = S/.20\ 200$$

∴ El Capital es de: S/. 20 200

Calcular el %:

Problema 5: ¿A qué % anual se prestó un capital de S/. 2 800 que en 1 año y 2 meses ha producido S/. 294 de interés?

Resolución:

1 año y 2 meses = 1 año y 1/6 año = 7/6 año

Datos:

C = S/. 2 800

t = 7/6 años

I = S/. 294

% = ?

Aplicando la Fórmula: $\% = \dfrac{100 \times I}{C \times t}$

Obteniendo: $\% = \dfrac{100 \times S/.294}{S/.2\ 800 \times 7/6} = 9$

∴ El tanto por ciento es: 9 ***Rpta.***

Nota: *En este problema también se ha podido convertir el tiempo a meses y aplicar la* ***fórmula:*** $\% = \dfrac{1\ 200 \times I}{C \times t}$

Veamos:

Reemplazando valores en la fórmula mencionada; obtenemos:

Datos:

C = S/. 2 800

t = 1 año y 2 m = 14 m
(1 año = 12 m.)

I = S/. 294

% = ?

Aplicando la Fórmula: $\% = \dfrac{1\ 200 \times I}{C \times t}$

Obteniendo: $\% = \dfrac{1\ 200 \times S/.294}{S/.2\ 800 \times 14} = 9$

∴ Como se podrá observar el resultado es el mismo que el anterior osea 9%.

Problema 6: ¿A qué tanto por ciento hay que colocar S/. 3 600 para obtener S/. 432 de interés en 18 meses?

Resolución:

Datos:

$C = S/.\ 3\ 600$

$t = 18$ meses

$I = S/.\ 342$

$\% = ?$

Aplicando la Fórmula: $\% = \dfrac{1\ 200 \times I}{C \times t}$

Obteniendo: $\% = \dfrac{1\ 200 \times S/.432}{S/.3\ 600 \times 18} = 8$

$\therefore$ El tanto por ciento es: 8 ***Rpta.***

Calcular el Tiempo:

Problema 7: Hallar el tiempo que estuvo prestado S/. 3 360 que al 5% ha producido S/. 420 de interés?

Resolución:

Datos:

$C = S/.\ 3\ 600$

$\% = 5$

$I = S/.\ 420$

$t = ?$

Aplicando la Fórmula del tiempo en años; osea: $t = \dfrac{100 \times I}{C \times \%}$

Obtenemos: $t = \dfrac{100 \times S/.420}{S/.3\ 360 \times 5} = 2{,}5$ años $= 30$ meses

$\therefore$ El tiempo es de: 30 meses ***Rpta.***

Nota: *También se puede aplicar la formula del tiempo en meses; osea:* $t = \dfrac{1\ 200 \times I}{C \times \%}$

$t = \dfrac{1\ 200 \times S/.420}{S/.3\ 360 \times 5} = 30$ ➡

Veamos:

Como se podrá observar el resultado es el mismo que el anterior osea: 30 meses.

Problema 8: ¿Durante cuánto tiempo hay que colocar S/. 2 850 al 12,5% para obtener S/. 712,50 de interés.

Resolución:

Datos:

C = S/. 2 850

% = 12,5

I = S/. 712,50

t = ?

Aplicando la Fórmula del tiempo en años; o sea:

$$t = \frac{100 \times I}{C \times \%}$$

Obtenemos:

$$t = \frac{100 \times S/.\ 712{,}50}{S/.\ 2\ 850 \times 12{,}5} = 2 \text{ años}$$

∴ El tiempo es de: 2 años ***Rpta.***

TALLER DE EJERCICIOS Nº 62

Problema 1: Calcular el interés de S/. 3 800 al 5% durante:

A) 2 años **B)** 6 meses **C)** 72 días

Problema 2: Calcular el interés de S/. 6 000 al 6% durante:

A) 5 años **B)** 10 meses **C)** 24 días

Problema 3: Calcular el interés de S/. 15 400 al 8% durante:

A) 2 años **B)** 9 meses **C)** 36 días

Problema 4: Halle el interés que producen S/. 3 620, colocados al 4%, durante 2 años 5 meses.

Problema 5: Halle el interés que producen S/. 7 340, colocados al 15%, durante 27 meses.

Problema 6: Halle el interés que producen S/. 920, colocados al 14%, durante 13 bimestres.

Problema 7: Halle el interés que producen S/. 12 350, colocados al 4%, durante 3 años, 2 meses y 15 días.

Problema 8: Halle el interés que producen S/. 85 400, colocados al 4%, del 20 de abril al 12 de mayo.

Problema 9: Halle el interés que producen 500 dólares, colocados al 25%, durante 10 semestres.

***Problema* (10) :** Calcula el capital que prestado al 23%, durante 2 años, produce un interés de S/. 49 680.

***Problema* (11) :** Calcula el capital que prestado al 12%, durante 18 meses, produce un interés de S/. 351,80.

***Problema* (12) :** Calcula el capital que prestado al 21%, durante 8 meses, produce un interés de S/. 3 220.

***Problema* (13) :** Halla el capital que prestado al 6%, durante 3 años, 4 meses y 10 días produce un interés de S/. 2 420.

***Problema* (14) :** Halla el capital que prestado al 4,5% desde el 2 de octubre al 13 de noviembre produce un interés de S/. 646.

***Problema* (15) :** Calcula el capital que colocado durante 7 meses, al 21% anual produjo un interés de S/. 6 615.

***Problema* (16) :** Por un préstamo al 7,5% trimestral durante 4 1/2 meses se pagan S/. 393,75. ¿A cuánto asciende el préstamo?

***Problema* (17) :** ¿A qué tanto por ciento se ha colocado un capital de S/. 68 400, que en tres años rindió un beneficio de S/. 36 936?

***Problema* (18) :** ¿A qué tanto por ciento ha sido colocado un capital de S/. 534 000 si se quiere obtener un beneficio de S/. 12 460 mensuales?

***Problema* (19) :** ¿A qué tanto por ciento ha sido colocado un capital S/. 9 000 que rinde S/. 562,50 de interés en 21 meses?

***Problema* (20) :** ¿A qué tanto por ciento ha sido colocado un capital de S/. 4 500 que produce S/. 168,75 de interés en 150 días?

***Problema* (21) :** Un capitalista invierte S/. 250 000 durante 3 años, 3 meses y recibe S/. 13 750 de interés. Además invierte S/. 87 000 durante 2 años, 4 meses que le producen S/. 1 624 de interés. ¿Qué inversón es más conveniente?

***Problema* (22) :** ¿Durante cuánto tiempo ha estado colocado un capital de S/. 9 660 en caja de ahorro si produjo S/. 2 060,80 de interés a una tasa del 8%?

***Problema* (23) :** Una persona ha prestado S/. 64 500 al 24% y le devuelven S/. 73 960. ¿Durante cuántos días ha prestado el capital?

***Problema* (24) :** Un capital de S/. 45 900 colocado al 18,5% produce un interés de S/. 16 983. ¿Cuánto tiempo estuvo invertido?

Problema (25) *:* ¿Al cabo de cuánto tiempo: un capital colocado al 20% produce un interés igual a la cuarta parte de su valor?

RESPUESTAS TALLER 62

1. A) S/. 380;	**B)** S/. 95	**C)** S/. 38
2. A) S/. 1 800	**B)** S/. 300	**C)** S/. 24
3. A) S/. 2 464	**B)** S/. 924	**C)** S/. 123,2
4. S/. 349,93	**5.** S/. 2 477,25	**6.** S/. 279,1
7. S/. 1 584,92	**8.** S/. 398,53	**9.** 625 dólares
10. S/. 10 800	**11.** S/. 1 954,4	**12.** S/. 23 000
13. S/. 12 000	**14.** S/. 123047,61	**15.** S/. 54 000
16. S/. 42 000	**17.** 18 %	**18.** 28%
19. $3\frac{4}{7}$%	**20.** 9%	
21. La primera es la más conveniente		**22.** 2 años; 8 meses
23. 220 días	**24.** 2 años	**25.** 1 año; 3 meses

6.5 DESCUENTOS SIMPLES: DESCUENTO COMERCIAL O BANCARIO

6.5.1 DESCUENTO COMERCIAL

En las operaciones bancarias, el descuento es el pago anticipado que hacen los bancos de los valores o descuentos de crédito (Letra de Cambio), a cambio del endoso de éste a su favor.

La operación del descuento permite hacer pagos utilizando letras, en reemplazo de dinero efectivo, y permite también recobrar los capitales invertidos manteniéndolos en constante movimiento y productividad.

Ejemplo:

Jaime Vásquez compra de Felipe Monzón un televisor pagando S/. 500 de cuota inicial y por el saldo acepta una letra de cambio por S/. 4 000 para pagar después de 90 días. Felipe Monzón no puede cobrar la letra hasta la techa de su vencimiento, pero necesitando dinero efectivo vende dicho docu-

mento al Banco de Crédito, que le anticipa el pago con una cantidad inferior a S/. 4 000. Esta diferencia entre la cantidad señalada en la letra (**Valor nominal**) y la cantidad pagada por el Banco (**Valor actual o efectivo**) se llama **Descuento.**

Descuento: *Es la cantidad que se rebaja de una suma de dinero expresada en una letra por cobrarlo ante de su vencimiento. El descuento viene a ser el interés que producirá el valor nominal de la letra durante el tiempo que falta para su vencimiento.*

Se terminó de Imprimir en Febrero de 1997
en los Talleres Gráficos de
EDITORIAL COVEÑAS E.I.R.Ltda.
RUC Nº 29534659
Jr. Las Verdolagas Nº 199 - Urb. Micaela Bastidas
Los Olivos - Lima/Perú
Telfs. 486-7957 • 521-0949